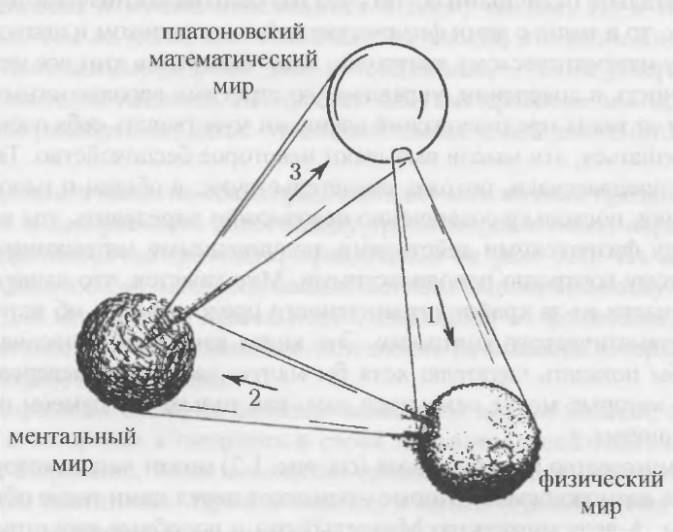
Геометрические методы в задачах электромагнетизма

Кулябов Д. С., Королькова А. В., Севастьянов Л. А.

Российский университет дружбы народов

21 января 2015 г.

Содержание


платоновский
математический
мир
3
1
2
ментальный
мир
физический
мир

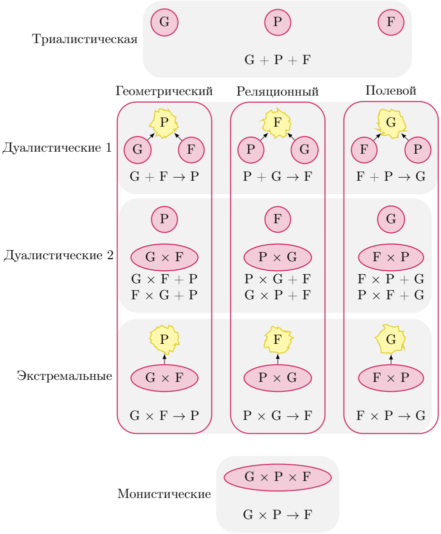
Изначально философия претендовала на формирование представлений не только о бытии как таковом (онтология), но и о его частностях, являющихся предметом специализированных наук.

Источники кризиса

- Претензии на всеобщность были порождены неразвитостью науки.
- Вряд ли можно надеяться на постижение бытия в целом посредством приписывания ему тех или иных общих истин и закономерностей.
- Незнание современной науки.

Итог

Философия вынуждена ограничиться онтологией.


Триалистическая
G
P
F
G + P + F
Геометрический
Реляционный
Полевой
Дуалистические 1
P
G
F
G + F → P
F
P
G
P + G → F
G
F
P
F + P → G
Дуалистические 2
P
G × F
G × F + P
F × G + P
F
P × G
P × G + F
G × P + F
G
F × P
F × P + G
P × F + G
Экстремальные
P
G × F
G × F → P
F
P × G
P × G → F
G
F × P
F × P → G
Монистические
G × P × F
G × P → F

Триалистическая парадигма. G + P + F

- Электродинамика.

Геометрическая парадигма. $G + F \to P$

- Нелинейная теория поля. Солитоны.

Геометрическая парадигма. $G \times F + P$

- Общая теория относительности (ОТО).

Геометрическая парадигма. $G \times F \to P$

- Геометродинамика Уилера.
- Супергравитация.

Реляционная парадигма. $\mathrm{P} + \mathrm{G} \to \mathrm{F}$

- Электродинамика Фоккера–Фейнмана.
- Квантовая механика в терминах интегралов по траекториям.

Реляционная парадигма. $\mathrm{P} \times \mathrm{G} + \mathrm{F}$

- Аксиоматическая частная теория относительности.
- Твисторная программа.
- Петлевая теория гравитации.

Реляционная парадигма. $\mathrm{P} \times \mathrm{G} \to \mathrm{F}$

- Теория S-матриц.
- Бинарная геометрофизика Ю. С. Владимирова.

Полевая парадигма. $\mathrm{P} \times \mathrm{F} + \mathrm{G}$

- Квантовая механика.

Полевая парадигма. $\mathrm{F} \times \mathrm{P} + \mathrm{G}$

- Квантовая теория поля.
- Струнные теории.

Геометрическая парадигма

- Формализм расслоений.
- Дополнительные размерности (Калуца–Клейн).

Реляционная парадигма

- Интегралы по траекториям.
- Метод функции Грина.

Полевая парадигма

- Операторный метод.

Метод

Формализм расслоеных пространств.

Гамильтонов формализм

- Дираковские системы со связями.
- Симплектические гамильтоновы системы.
- Неавтономные гамильтоновы системы.

Требования к CAS

- Универсальные системы компьютерной алгебры.
- Дифференциальная геометрия.

Варианты CAS

- Mathematica.
- Mathematica: Atlas 2 for Mathematica <http://digi-area.com/Mathematica/atlas/>.
- Maple.
- Maple: DifferentialGeometry <http://digitalcommons.usu.edu/dg/>.
- Sage.
- Maxima.

В терминах характеристик поля

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\partial_t \vec{B}, \\ (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0, \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \dfrac{1}{c}\partial_t \vec{D} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ (\vec{\nabla}, \vec{D}) = 4\pi\rho. \end{cases}$$

В терминах связностей

$$\begin{cases} F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \\ \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \dfrac{4\pi}{c} j^\beta. \end{cases}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} G_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha.$$

Преобразование Лежандра

$$\mathcal{H} := p_n \dot{q}^n - \mathcal{L};$$
$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^a}.$$

Детерминант матрицы Гессе (гессиан)

$$\det\{\mathbf{H}\}(\mathcal{L}) \neq 0,$$

$$\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i \partial \dot{A}^j}.$$

Вырожденность лагранжевой системы

$F_{00} = 0$, $\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{00} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}^0)^2} = 0$. Следовательно, $\det\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\} = 0$.

Система s уравнений

$$\dot{q}^{\underline{n}} = f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{;i}, x^i, t), \quad \underline{n} = \overline{1, s}.$$

Скобка Пуассона

$$\xi^{\underline{n}} := q^{\underline{n}}, \quad \xi^{\underline{n+s}} := p_{\underline{n}}, \quad \xi^a \in \mathbb{R}^{2s}; \quad \underline{n} = \overline{0, s}, \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} = \overline{0, 2s}.$$

$$\{A(\xi^c, t), B(\xi^c, t)\} = \Omega^{\underline{ab}} \frac{\partial A(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{a}}} \frac{\partial B(\xi^c, t)}{\partial \xi^{\underline{b}}}, \quad \Omega^{\underline{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_n f^n(q, q_{;i}, x^i, t).$$

Исходная система

$$\dot{q}^{\underline{n}} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_{\underline{n}}}, \quad \underline{n} = \overline{0, s}.$$

Ассоциированная система

$$\dot{p}_{\underline{n}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\underline{m}}}{\delta q^{\underline{n}}}.$$

Для простоты рассмотрим случай однородной и изотропной среды.

$$q^{\underline{n}} = \left(E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3\right)^T, \quad \underline{n} = \overline{1,6}.$$

Уравнения Максвелла

$$\dot{q}^n = f^n.$$

Гамильтонова запись

$$\mathcal{H} = p_n f^n$$

$$\begin{cases} \dot{q}^n = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n}, \\ \dot{p}_n = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n}. \end{cases}$$

Координаты и импульсы

$$\dot{q}^n = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n} = \frac{\delta \left(p_m f^m\right)}{\delta p^n} = \frac{\partial \left(p_m f^m\right)}{\partial p_n} = f^n.$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} = -\frac{\delta \left(p_m f^m\right)}{\delta q^n} = -\frac{\partial \left(p_m f^m\right)}{\partial q_n} + \nabla_i \frac{\partial \left(p_m f^m\right)}{\partial q^n_{;i}} = p_m \left(\frac{\partial f^m}{\partial q^n_{;i}}\right)_{;i}.$$

Правые части

$$f^{i1} = e^{ijk} \nabla_j E_k,$$
$$f^{i2} = e^{ijk} \nabla_j H_k.$$

Уравнения Максвелла

$$\partial_t E^i = \frac{c}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{{}^3 g}}\varepsilon^{ijk} H_{k,j}, \quad \partial_t H^i = -\frac{c}{\mu}\frac{1}{\sqrt{{}^3 g}}\varepsilon^{ijk} E_{k,j}.$$

$$D^i = \varepsilon E^{\,i}, \quad B^i = \mu H^{\,i}.$$

Гамильтониан

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{c}{\sqrt{{}^3 g}\varepsilon}\varepsilon^{ijk} H_{k,j} - \sum_{i=1}^{3} p_{i+3}\frac{c}{\sqrt{{}^3 g}\mu}\varepsilon^{ijk} E_{k,j}.$$

Метод

Эффективная геометрическая парадигма.

Геометрии

- Квадратичные геометрии.
- Неквадратичные геометрии. Метрика Бервальда-Моора.
- Пространства с кручением.

Требования к CAS

- Тензорные манипуляции.
- Дифференциальная геометрия.

Варианты CAS

- Mathematica: xAct <`http://www.xact.es/`>, Tensorial <`http://home.comcast.net/~djmpark/TensorialPage.html`>, Atlas 2 for Mathematica <`http://digi-area.com/Mathematica/atlas/`>.
- Maple: GRTensorII <`http://grtensor.phy.queensu.ca/`>, DifferentialGeometry <`http://digitalcommons.usu.edu/dg/`>.
- Cadabra <`http://cadabra.phi-sci.com/`>.
- Redberry <`http://redberry.cc/`>.
- FORM <`http://www.nikhef.nl/~form/`>.

Уравнения в среде, в декартовых координатах

Метрика $\underline{\eta_{\alpha\beta}} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$.

$$\begin{cases} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \\ \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \dfrac{4\pi}{c} j^\beta. \end{cases}$$

Вакуумные уравнения в эффективном римановом пространстве

Метрический тензор $g_{\alpha\beta}$.

$$\begin{cases} \partial_\alpha \tilde{F}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \tilde{F}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \tilde{F}_{\alpha\beta} = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \tilde{G}^{\alpha\beta} \right) = \dfrac{4\pi}{c} \tilde{j}^\beta. \end{cases}$$

Почленное сравнение

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \tilde{G}_{\alpha\beta}.$$

Подымаем индексы.

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \tilde{G}_{\gamma\delta}.$$

Результат.

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}, \qquad j^{\alpha} = \sqrt{-g}\tilde{j}^{\alpha},$$
$$G^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}.$$

Индукция D^i и диэлектрическая проницаемость

$$D^i = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} E_j + \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} H_k.$$

$$\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}.$$

Индукция B^i и магнитная проницаемость

$$B^i = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} H_j - \frac{1}{g_{00}} \varepsilon^{ijk} g_{j0} E_k.$$

$$\mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}.$$

Геометризованные материальные уравнения

$$D^i = \varepsilon^{ij} E_j + \varepsilon^{ijk} w_j H_k,$$

$$B^i = \mu^{ij} H_j - \varepsilon^{ijk} w_j E_k,$$

$$\varepsilon^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \quad \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \quad w_i = \frac{g_{i0}}{g_{00}}.$$