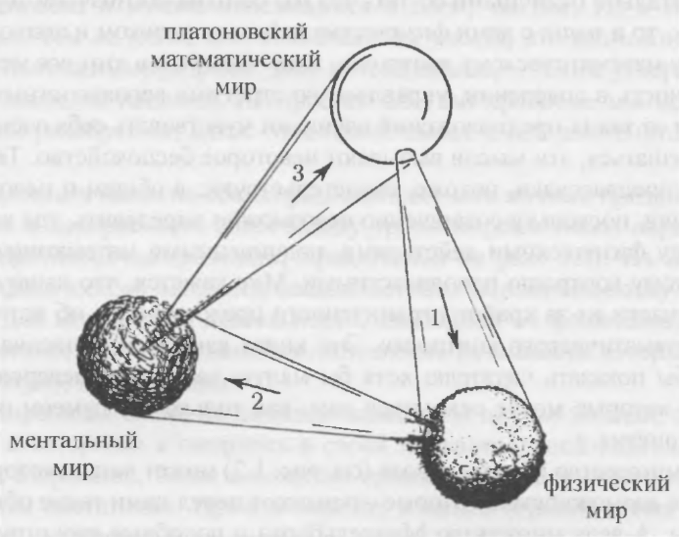
Применение симплектических интеграторов для задачи распространения электромагнитных волн

Кулябов Д. С., Королькова А. В., Геворкян М. Н., Севастьянов Л. А.

Российский университет дружбы народов

22 февраля 2012 г.

Содержание


платоновский
математический
мир
3
1
2
ментальный
мир
физический
мир

Гармонический осциллятор

$$\ddot{q} + q = 0.$$

Гамильтониан

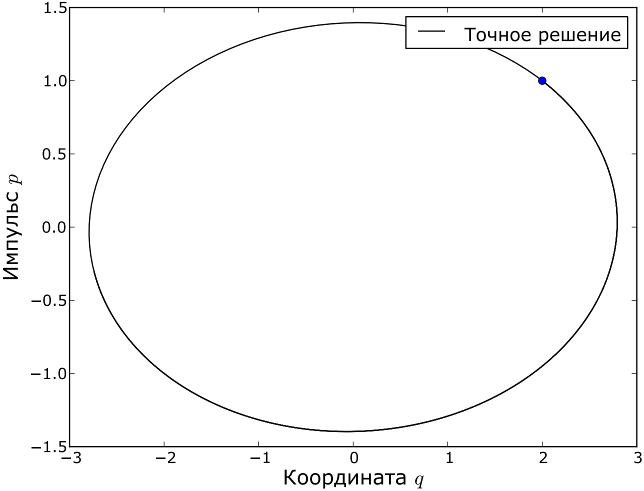
$$H(p, q) = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}.$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Система уравнений первого порядка

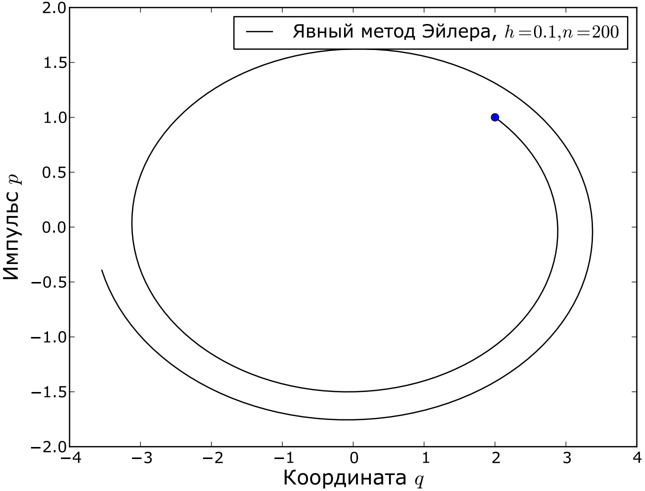
$$\begin{aligned}\dot{q} &= p,\\ \dot{p} &= -q.\end{aligned} \tag{1}$$


Точное решение
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3
Импульс p
Координата q

Явный метод Эйлера

Запишем для (1) явную разностную схему:

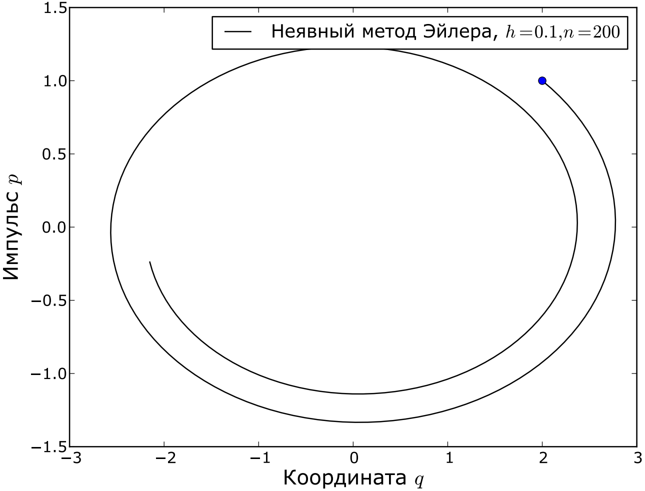
$$\frac{q_{n+1} - q_n}{h} = p_n,$$
$$\frac{p_{n+1} - p_n}{h} = q_n.$$


Явный метод Эйлера, $h = 0.1, n = 200$
Импульс p
Координата q
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Неявный метод Эйлера

Запишем для (1) неявную разностную схему:

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{h} = p_{n+1},$$
$$\frac{p_{n+1} - p_n}{h} = q_{n+1}.$$



Неявный метод Эйлера, $h=0.1, n=200$
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3
Импульс p
Координата q

Предпосылки

- Потребность использования криволинейных систем координат в задачах математического моделирования.
- Запись уравнений Максвелла в криволинейной системе координат с использованием векторного формализма крайне громоздка.
- Тензорный формализм имеет мощный математический аппарат, который позволяет работать с ковариантной бескоординатной формой записи уравнений. Переход к конкретной системе координат нужен только на заключительном этапе исследований при записи результата.

Основные задачи

- Продемонстрировать связь векторного и тензорного формализмов.
- Применить тензорный формализм для различных форм представления уравнений Максвелла.

Связь тензорного и векторного формализмов записи векторов

Тензорный формализм

Голономный базис

$$\delta_{\underline{i}}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}} \in V^{\bullet}, \quad \delta_{i}^{\underline{i}} = \mathrm{d}x^{\underline{i}} \in V_{\bullet}, \quad \underline{i} = \overline{1, n},$$

где $V^{\bullet}$ — произвольное n-мерное векторное пространство, $V_{\bullet}$ — сопряжённое к $V^{\bullet}$ пространство.

Векторный формализм

Неголономный базис (базис задаётся через элементы длины $\mathrm{d}s^{\underline{i}'}$ по соответствующей координате)

$$\delta_{\underline{i}'}^{i} = \frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}}, \quad \delta_{i}^{\underline{i}'} = \mathrm{d}s^{\underline{i}'}, \quad \underline{i}' = \overline{1, n}.$$

Тензорная запись

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

где g_{ij} — метрический тензор.

Векторная запись

$$\mathrm{d}s^2 = g_{i'j'}\mathrm{d}s^{i'}\mathrm{d}s^{j'}. \tag{2}$$

В случае ортогонального базиса (2) принимает вид:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{i'i'}\mathrm{d}s^{i'}\mathrm{d}s^{i'}. \tag{3}$$

Выразим векторный базис через тензорный:

$$\mathrm{d}s^{i'} = h^{i'}_{\underline{i}}\,\mathrm{d}x^{\underline{i}}, \quad \frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}} = h^{i}_{\underline{i}'}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}}.$$

где $h^{i'}_{\underline{i}}$, $h^{i}_{\underline{i}'}$, $\underline{i}$, $\underline{i}' = \overline{1,n}$, — по сути матрицы Якоби.
Для ортогонального базиса из (3) имеем

$$g_{\underline{ii}}\mathrm{d}x^{\underline{i}}\mathrm{d}x^{\underline{i}} = g_{\underline{i}'\underline{i}'}h^{i'}_{\underline{i}}h^{i'}_{\underline{i}}\mathrm{d}x^{\underline{i}}\mathrm{d}x^{\underline{i}}, \quad \underline{i},\ \underline{i}' = \overline{1,n}.$$

Для ортогональной системы координат:

$$\left(h_{\underline{i}}\right)^2 := h^{i'}_{\underline{i}}h^{i'}_{\underline{i}} = \frac{g_{\underline{ii}}}{g_{\underline{i}'\underline{i}'}}, \quad h_{\underline{i}} := h^{i'}_{\underline{i}} = \sqrt{\frac{g_{\underline{ii}}}{g_{\underline{i}'\underline{i}'}}}, \quad \underline{i},\ \underline{i}' = \overline{1,n}.$$

Величины $h_{\underline{i}}$ называются коэффициентами Ламе.

Выразим вектор $f^i \in V^\bullet$ через его компоненты $f^{\underline{i}}$ в тензорном $\delta^i_{\underline{i}}$ и векторном $\delta^i_{\underline{i}'}$ базисах соответственно:

$$f^i = f^{\underline{i}}\delta^i_{\underline{i}} = f^{\underline{i}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}},$$

$$f^i = f^{\underline{i}'}\delta^i_{\underline{i}'} = f^{\underline{i}'}\frac{\partial}{\partial s^{\underline{i}'}} = f^{\underline{i}'}\frac{1}{h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}},$$

откуда получаем, что

$$f^{\underline{i}'} = f^{\underline{i}}h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}.$$

Аналогично для ковекторов имеем:

$$f_i = f_{\underline{i}} \delta^{\underline{i}}_i = f_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}},$$
$$f_i = f_{\underline{i}'} \delta^{\underline{i}'}_i = f_{\underline{i}'} \mathrm{d}s^{\underline{i}'} = f_{\underline{i}'} h^{\underline{i}'}_{\underline{i}} \mathrm{d}x^{\underline{i}},$$

откуда получаем, что

$$f_{\underline{i}'} = f_{\underline{i}} \frac{1}{h^{\underline{i}'}_{\underline{i}}}, \quad \underline{i}, \underline{i}' = \overline{1, n}.$$

Таким образом, показана связь между тензорным и векторным формализмами.

Тензорная запись дифференциальных операторов в компонентах

Градиент:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = (\operatorname{grad}\varphi)_{\underline{i}}\delta^{\underline{i}}_i, \quad (\operatorname{grad}\varphi)_{\underline{i}} = \nabla_{\underline{i}}\varphi = \partial_{\underline{i}}\varphi, \quad \underline{i} = \overline{1, n},$$

где φ — скаляр.

Дивергенция:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla_i f^i = f^i_{,i} - \Gamma^i_{ji} f^j = f^i_{,i} - f^i \frac{(\sqrt{|g|})_{,i}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} f^i \right),$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} f^i \right), \quad g = \det\left(g_{\underline{ii}} \right), \quad \underline{i} = \overline{1, n}.$$

Ротор:

$$\left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^{i} = \left[\vec{\nabla},\vec{f}\right] = \left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^{\underline{i}}\delta^{i}_{\underline{i}}, \quad \left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)^{\underline{i}} = e^{\underline{ijk}}\nabla_{\underline{j}}f_{\underline{k}}, \ \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3},$$

где $e^{\underline{ijk}}$ — альтернирующий тензор, $\varepsilon^{\underline{ijk}}$ — символ Леви-Чевиты:

$$e_{\underline{ijk}} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\underline{ijk}}, \quad e^{\underline{ijk}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\underline{ijk}}, \quad \underline{i},\ \underline{j},\ \underline{k} = \overline{1,3}.$$

Лапласиан:

$$\Delta\varphi = \nabla_i \left(\nabla^i \varphi\right) = \nabla_i \left(g^{ij} (\operatorname{grad}\varphi)_j\right) =$$

$$= \nabla_i \left(g^{ij} \partial_j \varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \varphi\right).$$

Представления уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла в системе СГС:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho;$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j};$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряжённости электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — электрическая и магнитная индукция соответственно, $\vec{j}$ — плотность тока, ρ — плотность заряда, c — скорость света.

Ковариантная запись уравнений Максвелла через 3-векторы

Уравнения Максвелла в явно ковариантной форме:

$$
\begin{gathered}
e^{ijk}\nabla_j E_k = -\nabla_0 B^i;\\
\nabla_i D^i = 4\pi\rho;\\
e^{ijk}\nabla_j H_k = \nabla_0 D^i + \frac{4\pi}{c} j^i;\\
\nabla_i B^i = 0.
\end{gathered}
$$

Уравнения Максвелла в компонентах тензорного формализма:

$$\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\left[\partial_{\underline{j}}E_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}}E_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t B^{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\partial_{\underline{i}}\left(\sqrt{|g^{(3)}|}D^{\underline{i}}\right) = 4\pi\rho, \quad \underline{i} = \overline{1,3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\left[\partial_{\underline{j}}H_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}}H_{\underline{j}}\right] = -\frac{1}{c}\partial_t D^{\underline{i}} + \frac{4\pi}{c}j^{\underline{i}}, \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = \overline{1,3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\partial_{\underline{i}}\left(\sqrt{|g^{(3)}|}B^{\underline{i}}\right) = 0, \quad \underline{i} = \overline{1,3}.$$

Ковариантная запись уравнений Максвелла через 4-векторы

Уравнения Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta,$$
$$\nabla_\alpha G_{\beta\gamma} + \nabla_\beta G_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma G_{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

где

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -D_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -D_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение (4) можно записать в более простом виде

$$\nabla_\alpha {}^*G^{\alpha\beta} = 0,$$

где введён тензор ${}^*G^{\alpha\beta}$, дуально сопряжённый тензору $G^{\alpha\beta}$

$${}^*G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta},$$

где $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — альтернирующий тензор.

Можно поставить в соответствие $F_{\alpha\beta}$ упорядоченную пару (E_i, B^i) $(F_{\alpha\beta} \sim (E_i, B^i))$ следующим образом

$$F_{0\underline{i}} = E_i, \quad F_{\underline{ij}} = -B^{\underline{k}}, \quad \text{подстановка } P(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \text{ — чётная.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\sim (E_i, B^i), & F^{\alpha\beta} &\sim (-E^i, B_i), \\ G_{\alpha\beta} &\sim (D_i, H^i), & G^{\alpha\beta} &\sim (-D^i, H_i), \\ {}^*G_{\alpha\beta} &\sim (H_i, -D^i), & {}^*G^{\alpha\beta} &\sim (-H^i, -D_i). \end{aligned}$$

Комплексное представление уравнений Максвелла

Соответствие упорядоченной пары и комплексного 3-вектора:

$$F^i \sim (E^i, B^i), \quad F^i = E^i + \mathrm{i}B^i;$$
$$G^i \sim (D^i, H^i), \quad G^i = D^i + \mathrm{i}H^i.$$

Выразим напряжённость и индукцию через соответствующие комплексные векторы

$$E^i = \frac{F^i + \bar{F}^i}{2}, \quad B^i = \frac{F^i - \bar{F}^i}{2\mathrm{i}},$$
$$D^i = \frac{G^i + \bar{G}^i}{2}, \quad H^i = \frac{G^i - \bar{G}^i}{2\mathrm{i}}.$$

Введём два дополнительных комплексных вектора

$$K^i = \frac{G^i + F^i}{2}, \quad L^i = \frac{\bar{G}^i - \bar{F}^i}{2}. \tag{5}$$

Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$\nabla_i (K^i + L^i) = 4\pi\rho;$$
$$-\mathrm{i}\nabla_0 (K^i - L^i) + e^{ijk}\nabla_j (K_k - L_k) = \mathrm{i}\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Из соотношений $D^i = E^i$, $H^i = B^i$ и (5):

$$K^i = E^i + \mathrm{i}B^i = F^i, \quad L^i = 0.$$

Комплексное представление уравнений Максвелла в вакууме

$$\begin{gathered} \nabla_i F^i = 4\pi\rho; \\ -\mathrm{i}\nabla_0 F^i + e^{ijk}\nabla_j F_k = \mathrm{i}\frac{4\pi}{c} j^i. \end{gathered} \tag{6}$$

В однородной изотропной среде: $D^i = \varepsilon E^i$, $\mu H^i = B^i$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.
Формальная замена в (6): $c \to c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $j^\alpha \to \frac{j^\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$

Комплексное представление уравнений Максвелла в однородной изотропной среде

$$F^i = \sqrt{\varepsilon} E^i + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{\mu}} B^i,$$

$$\nabla_i F^i = \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\rho;$$

$$e^{ijk}\nabla_j F_k = \mathrm{i}\frac{4\pi\sqrt{\mu}}{c} j^i + \mathrm{i}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial F^i}{\partial t}.$$

Импульсное представление уравнений Максвелла

Разложим векторы напряжённости электрического и магнитного полей, электрической и магнитной индукций в ряд Фурье по волновым векторам k^j, j — абстрактный индекс:

$$
\begin{aligned}
E^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j E^i(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}, \\
H^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j H^i(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}, \\
B^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j B^i(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}, \\
D^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j D^i(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}, \\
\rho(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int \mathrm{d}^3 k_j \rho(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}, \\
j^i(t,x^j) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j j^i(t,k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Компоненты векторов $E^i(t, x^j)$ и $E^i(t, k_j)$, (аналогично: $H^i(t, x^j)$ и $H^i(t, k_j)$, $D^i(t, x^j)$ и $D^i(t, k_j)$, $B^i(t, x^j)$ и $B^i(t, k_j)$, $j^i(t, x^j)$ и $j^i(t, k_j)$) рассматриваются в разных базисах:

$$
\begin{aligned}
E^i(t, x^j) &= E^{\underline{i}}(t, x^j)\delta^i_{\underline{i}}, \\
E^i(t, k_j) &= E^{\hat{\underline{i}}}(t, k_j)\delta^i_{\hat{\underline{i}}},
\end{aligned}
$$

где базис $\delta^i_{\hat{\underline{i}}}$ взят относительно вектора k_i.

Для всех k_i определён свой независимый базис и поэтому при выписывании уравнений Максвелла из (7) можно работать не с интегралами, а напрямую с подынтегральными выражениями:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\varepsilon^{ijk}k_j E_k(t, k_j) &= -\frac{1}{c}\partial_t B^i(t, k_j),\\
\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{|g^{(3)}|}}\varepsilon^{ijk}k_j H_k(t, k_j) &= \frac{1}{c}\partial_t D^i(t, k_j) + \frac{4\pi}{c} j^i(t, k_j),\\
\mathrm{i}k_i D^i(t, k_j) &= 4\pi\rho(t, k_j),\\
\mathrm{i}k_i B^i(t, k_j) &= 0.
\end{aligned}
$$

Импульсное представление уравнений Максвелла:

$$F^i(t, x^j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j F^i(t, k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j},$$

$$G^i(t, x^j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j G^i(t, k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j},$$

$$\rho(t, x^j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int \mathrm{d}^3 k_j \rho(t, k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j},$$

$$j^i(t, x^j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j j^i(t, k_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j}.$$

Спинорная запись уравнений Максвелла

Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и его компоненты $F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3}$, можно рассматривать в спинорной форме:

$$F_{\alpha\beta} = F_{AA'BB'};$$

$$F_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} = F_{\underline{A}\,\underline{A}'\,\underline{B}\,\underline{B}'}\, g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'} g_{\underline{\beta}}{}^{\underline{B}\,\underline{B}'}, \quad \underline{A}, \underline{A}', \underline{B}, \underline{B}' = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3},$$

где $g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'}$, $\underline{\alpha} = \overline{0,3}$, — символы Инфельда–ван дер Вердена, определяемые в действительном спинорном базисе $\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}}$:

$$g_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{A}\,\underline{A}'} := g_{\underline{\alpha}}{}^{\alpha} \varepsilon_{A}{}^{\underline{A}} \varepsilon_{A'}{}^{\underline{A}'}, \quad g_{\underline{A}\,\underline{A}'}{}^{\underline{\alpha}} := g^{\underline{\alpha}}{}_{\alpha} \varepsilon^{A}{}_{\underline{A}} \varepsilon^{A'}{}_{\underline{A}'}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{\underline{A}\,\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A}'\,\underline{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\underline{A}}{}^{A} \varepsilon_{A}{}^{\underline{B}} = \varepsilon_{\underline{A}}{}^{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Поскольку тензор $F_{\alpha\beta}$ действителен и антисимметричен, то:

$$F_{\alpha\beta} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB}\bar{\varphi}_{A'B'}, \tag{10}$$

где φ_{AB} — спинор электромагнитного поля:

$$\varphi_{AB} := \frac{1}{2}F_{ABC'}{}^{C'} = \frac{1}{2}F_{AA'BB'}\varepsilon^{A'B'} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\varepsilon^{A'B'}.$$

Аналогично:

$$\begin{gathered} G_{\alpha\beta} = \gamma_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB}\bar{\gamma}_{A'B'}, \\ {}^{*}G^{\alpha\beta} = -\mathrm{i}\gamma^{AB}\varepsilon^{A'B'} + \mathrm{i}\varepsilon^{AB}\bar{\gamma}^{A'B'}. \end{gathered} \tag{11}$$

Заменяя в уравнении $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$ абстрактные индексы α на AA' и β на BB', запишем:

$$\nabla_{AA'} F^{AA'BB'} = \frac{4\pi}{c} j^{BB'}.$$

Используя соотношение (10), получим

$$\nabla^{AB'} \varphi_A^B + \nabla^{BA'} \varphi_{A'}^{B'} = \frac{4\pi}{c} j^{BB'}.$$

Аналогично, из уравнения $\nabla_\alpha {}^* G^{\alpha\beta} = 0$ и (11) получим

$$\nabla^{A'B} \gamma_B^A - \nabla^{AB'} \bar{\gamma}_{B'}^{A'} = 0.$$

Система уравнений Максвелла в спинорной форме:

$$\nabla^{AB'}\varphi_A^B + \nabla^{BA'}\varphi_{A'}^{B'} = \frac{4\pi}{c}j^{BB'},$$
$$\nabla^{A'B}\gamma_B^A - \nabla^{AB'}\bar{\gamma}_{B'}^{A'} = 0.$$

Система уравнений Максвелла в вакууме в спинорной форме:

$$\nabla^{AB'}\varphi_A^B = \frac{2\pi}{c}j^{BB'}.$$

Компоненты спинора электромагнитного поля имеют вид:

$$\varphi_{\underline{A}\,\underline{B}} = \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \varepsilon^{\underline{A'}\,\underline{B'}} g^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{A}\,\underline{A'}} g^{\underline{\beta}}{}_{\underline{B}\,\underline{B'}}, \quad \underline{A}, \underline{A'}, \underline{B}, \underline{B'} = \overline{0,1}, \quad \underline{\alpha}, \underline{\beta} = \overline{0,3}.$$

Используя (8), (9) и обозначив $F_i = E_i - \mathrm{i} B^i$, можно записать:

$$\varphi_{00} = \frac{1}{2}\left(F_1 - \mathrm{i} F_2\right), \quad \varphi_{01} = \varphi_{10} = -\frac{1}{2} F_3, \quad \varphi_{11} = -\frac{1}{2}\left(F_1 + \mathrm{i} F_2\right).$$

Гамильтониан электромагнитного поля

Гамильтониан в непрерывном случае

Обозначим через q^n обобщённые координаты, через p^n — обобщённые импульсы.
Уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}^n = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n}.$$

Здесь $\mathcal{H}$ — гамильтонова плотность, $\delta \mathcal{H} / \delta q^n$ — вариационная производная:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} := \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^n_{;i}}.$$

Лагранжева плотность электромагнитного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{c} j_a A^a.$$

где F_{ab} — тензор электромагнитного поля, A^a — потенциал электромагнитного поля.

Гамильтониан из лагранжиана

Гамильтонова плотность строится через лагранжеву плотность и плотность импульса:

$$\mathcal{H} := p_a \dot{A}^a - \mathcal{L}, \quad p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^a}.$$

Гессиан

При этом требуется, чтобы детерминант матрицы Гессе (гессиан) был отличен от нуля:

$$\det \mathbf{H}(\mathcal{L}) \neq 0,$$

где матрица Гессе:

$$\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{\underline{ab}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{\underline{a}} \partial \dot{A}^{\underline{b}}}, \quad \underline{a}, \underline{b} = \overline{0, 3}.$$

Тогда можно построить симплектическую гамильтонову систему.
Но $F_{00} = 0$ и $\{\mathbf{H}(\mathcal{L})\}_{00} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}^0)^2} = 0$. Следовательно, $\det \mathbf{H}(\mathcal{L}) = 0$.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в среде:

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\dfrac{1}{c}\partial_t \vec{B}, \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \dfrac{1}{c}\partial_t \vec{D} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ (\vec{\nabla}, \vec{H}) = 4\pi\rho, \\ (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать уравнения Максвелла без источников

$$j^a = 0.$$

Метод удвоения переменных 1/2

Рассмотрим систему s уравнений:

$$\dot{q}^{\underline{n}} = f^{\underline{n}}(q^n, q^n_{,i}, x^i, t), \quad \underline{n} = \overline{0, s}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, N}. \qquad (12)$$

Введём пространство $\mathbb{R}^{2s}$ со скобкой Пуассона и гамильтоновой плотностью

$$\mathcal{H}(q^n, p_n, x^i, t) = p_n f^n(q, q_{,i}, x^i, t).$$

Метод удвоения переменных 2/2

Группа уравнений

$$\dot{q}^{\underline{n}} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_{\underline{n}}}, \quad \underline{n} = \overline{0, s}.$$

совпадает с системой (12), а группа уравнений

$$\dot{p}_{\underline{n}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^{\underline{n}}} = -p_{\underline{m}} \frac{\delta f^{\underline{m}}}{\delta q^{\underline{n}}}, \quad \underline{n}, \underline{m} = \overline{0, s}.$$

является ассоциированной системой.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла, соответствующие виду (12):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[E_{3,2}-E_{2,3}\right]=-\frac{1}{c}\partial_t B^1; \quad \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[E_{1,3}-E_{3,1}\right]=-\frac{1}{c}\partial_t B^2;\\
&\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[E_{2,1}-E_{1,2}\right]=-\frac{1}{c}\partial_t B^3; \quad \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[H_{3,2}-H_{2,3}\right]=\frac{1}{c}\partial_t D^1;\\
&\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[H_{1,3}-H_{3,1}\right]=\frac{1}{c}\partial_t D^2; \quad \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\left[H_{2,1}-H_{1,2}\right]=\frac{1}{c}\partial_t D^3.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Уравнения Максвелла, не соответствующие виду (12):

$$
\frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\partial_i\left(\sqrt{g^{(3)}}D^i\right)=0, \quad \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\partial_i\left(\sqrt{g^{(3)}}B^i\right)=0.
$$

Однако они зависимы от (13) (легко это проверить, продифференцировав уравнения (13) и сложив).

Обобщённые переменные

Для простоты рассмотрим случай однородной и изотропной среды.

$$q^{\underline{n}} = \left(E^1, E^2, E^3, H^1, H^2, H^3\right), \quad \underline{n} = \overline{1,6}$$

$$\dot{q}^n = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_n} = \frac{\delta \left(p_m f^m\right)}{\delta p^n} = f^n$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q^n} = -\frac{\delta \left(p_m f^m\right)}{\delta q^n} = -\frac{\partial \left(p_m f^m\right)}{\partial q_n} + \partial_i \frac{\partial \left(p_m f^m\right)}{\partial q^n_{,i}},$$

$$\dot{p}_n = p_m \partial_i \frac{\partial f^m}{\partial q^n_{,i}},$$

$$D^i = \varepsilon E^i, \quad B^i = \mu H^i.$$

$$\partial_t E^i = \frac{c}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}} \varepsilon^{ijk} H_{k,j}, \quad \partial_t H^i = -\frac{c}{\mu} \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}} \varepsilon^{ijk} E_{k,j}.$$

Гамильтониан

$$\mathcal{H} \propto \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{c}{\sqrt{g^{(3)}}\varepsilon} \varepsilon^{ijk} H_{k,j} - \sum_{i=1}^{3} p_{i+3} \frac{c}{\sqrt{g^{(3)}}\mu} \varepsilon^{ijk} E_{k,j}.$$

Комплексное представление уравнений Максвелла 1/2

Также будем рассматривать случай однородной изотропной среды.
Введём комплексную функцию:

$$F^i = \sqrt{\varepsilon} E^i + \mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{\mu}} B^i.$$

Комплексное представление уравнений Максвелла 2/2

Уравнения Максвелла приобретают вид (с учётом $j^a = 0$):

$$\begin{cases} \nabla_i F^i = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\rho = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}\,c} j^0 = 0, \\ [\nabla, F]^i - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\partial_t F^i = \mathrm{i}\dfrac{4\pi\sqrt{\mu}}{c} j^i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\partial_i \left(\sqrt{g^{(3)}}\, F^i\right) = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\rho = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}\,c} j^0 = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{g^{(3)}}}\varepsilon^{ijk}\partial_j F_k - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\partial_t F^i = \mathrm{i}\dfrac{4\pi\sqrt{\mu}}{c} j^i = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Импульсное представление

Разложим F^i по интегралам Фурье:

$$F^i(t, x^i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j} \hat{F}^i(t, k_j). \tag{15}$$

Зададим системы координат для векторов k_i таким образом, чтобы в каждой системе соответствующий вектор k_i имел координаты $k_{\underline{i}} = (0, 0, k)$, $\underline{i} = \overline{0, 3}$, где $k = |k_i|$.

Подставив (15) в первое уравнение (14) имеем:

$$\partial_i \left(\sqrt{g^{(3)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3 k_j \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_j x^j} \hat{F}^i(t, k_j) \right) = 0,$$

откуда $\mathrm{i} k_j \hat{F}^j(t, k_j) = 0$. Так как $k_{\underline{j}} = (0, 0, k)$, то $\hat{F}^3(t, k_j) = 0$.

Из второго уравнения (14) получаем:

$$e^{ijk}\partial_j F_k - \mathrm{i}\frac{1}{c}\partial_t F^i = 0.$$

При $i = 1$:

$$e^{1\underline{j}\underline{k}}\partial_{\underline{j}} F_{\underline{k}} - \mathrm{i}\frac{1}{c}\partial_t F^1 = 0,$$

$$\sqrt{g^{(3)}}\,(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) - \mathrm{i}\frac{1}{c}\partial_t F^1 = 0.$$

Подставив (15), получаем:

$$\sqrt{g^{(3)}}\left(\mathrm{i}k_2\hat{F}_3 - \mathrm{i}k_3\hat{F}_2\right)e^{\mathrm{i}k_jx^j} - \mathrm{i}\frac{1}{c}e^{\mathrm{i}k_jx^j}\partial_t\hat{F}^1 = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Так как $\vec{k} = (0,0,k)$, т.е. $k_2 = 0$, то $\dot{\hat{F}}^1 = -c\sqrt{g^{(3)}}k_3\hat{F}_2$. При $i = 2$ по аналогии имеем:

$$e^{2jk}\partial_j F_k - \mathrm{i}\frac{1}{c}\partial_t F^2 = 0, \quad j,k = \overline{1,3}$$

$$\sqrt{g^{(3)}}\left(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3\right) - \mathrm{i}\frac{1}{c}\partial_t F^2 = 0.$$

Подставив (15), получаем:

$$\sqrt{g^{(3)}}\left(\mathrm{i}k_3\hat{F}_1 - \mathrm{i}k_1\hat{F}_3\right)e^{\mathrm{i}k_jx^j} - \mathrm{i}\frac{1}{c}e^{\mathrm{i}k_jx^j}\partial_t\hat{F}^2 = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Так как $k_{\underline{j}} = (0, 0, k)$, т.е. $k_1 = 0$, то $\dot{\hat{F}}^2 = c\sqrt{g^{(3)}}k_3\hat{F}_1$. При $i = 3$ получаем, что $\dot{\hat{F}}^3 = 0$.

Гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} \propto \hat{F}^{*}_{1} \hat{F}^{1} + \hat{F}^{*}_{2} \hat{F}^{2}.$$

Основные результаты и выводы:

1. Применение для уравнений Максвелла голономных координат позволяет упростить математические выкладки.
2. Показана связь между тензорным и векторным формализмами.
3. Выписано ковариантное координатное представление дифференциальных операторов для голономных систем координат.
4. Продемонстрировано применение тензорного формализма для разных форм записи уравнений Максвелла.
5. Предложена методика получения гамильтониана электромагнитного поля в произвольной криволинейной системе координат:
    - в результате удвоения переменных;
    - путём преобразований Фурье.