НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА»
ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ И ВЦ РАН
под руководством профессора С.А.Абрамова
25 октября 2023 года

Нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий неголономных систем

Кулешов А.С., Видов Н.М.

Кафедра теоретической механики и мехатроники,

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

Пример 1. Движение точки, подчинённой неголономной связи, под действием упругой силы - I

Рассматривается движение точки массы m в трехмерном пространстве под действием упругой силы с потенциалом

$$V = \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Движение точки стеснено неголономной связью вида:

$$g(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{z} - \dot{y}x + \dot{x}y = 0.$$

Функция Лагранжа системы имеет вид:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Уравнения, определяющие многообразие равновесий, записываются следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{z}},$$

или, в явном виде:

$$cx = \lambda y, \quad cy = -\lambda x, \quad 0 = \lambda.$$

Многообразие равновесий – прямая

$$E = \left\{x = 0, y = 0\right\}$$

Пример 1. Движение точки, подчинённой неголономной связи, под действием упругой силы - II

При малых $x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}$ имеем $z = \mathrm{const}$. Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \tag{7}$$

то есть по x и y получаются гармонические колебания.

При учете членов второго порядка в уравнении связи, то есть при полном учёте связи

$$g(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{z} - \dot{y}x + \dot{x}y = 0,$$

уравнения движения точки всё равно имеют вид (7). Однако в этом случае z растёт линейно со временем (трансгрессия).

Предварительные соображения. Нормализация в окрестности многообразия равновесий

Пусть на многообразии (фазовом пространстве) Φ имеется векторное поле Z, обращающееся в нуль на подмногообразии E. Пусть в подходящих координатах X_k, ξ_k (локально) подмногообразие E определяется уравнениями $\xi_k = 0$ Для каждой функции $f(X, \xi)$ положим:

$$f(X,\xi) = \sum_{M=0}^{\infty} f^{(M)}(X,\xi) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{|j|=M} f^{(j)}(X)\xi^j,$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{M=0}^{\infty} f^{[M]}(X,\xi) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{|j|=M} f^{[j]}(X)\xi^j, \quad \xi^j = \xi_1^{j_1} \cdot \xi_2^{j_2} \cdot \ldots, \quad |j| = j_1 + j_2 + \ldots$$

Поскольку $Z = 0$ на E, то

$$\xi_k^{[0]} = X_k^{[0]} = 0.$$

Легко понять, как выглядит *N*-е приближение в переменных X_k, ξ_k. Исходим из системы вида

$$\dot{X}_k = \sum_{|j|\ge 1} X_k^{[j]}(X)\xi^j, \quad \dot{\xi}_k = \lambda_k(X)\xi_k + \sum_{|j|\ge 2} \xi_k^{[j]}(X)\xi^j \qquad (3)$$

и отбрасываем в правых частях все одночлены, начиная со степени *N* для X_k и степени *N*+1 для ξ_k. Затем можно будет пользоваться процедурой типа приведения к нормальной форме, то есть строить замены переменных, в которых очередное приближение принимает сравнительно простой вид.

Нормализация в окрестности многообразия равновесий

Зависимость коэффициентов системы (3) от X вносит определенные усложнения по сравнению с нормализацией обычных квазилинейных систем. Начнем с замены переменных

$$Y = X + Y^{(N-1)}\left(X,\xi\right), \quad \eta = \xi + \eta^{(N)}\left(X,\xi\right), \quad N \geq 2 \tag{4}$$

Обратные выражения будут:

$$X = Y - Y^{(N-1)}\left(Y,\eta\right) + \cdots, \quad \xi = \eta - \eta^{(N)}\left(Y,\eta\right) + \cdots, \quad N \geq 2 \tag{5}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые высших степеней (только в них сказывается зависимость коэффициентов многочленов (4) от X).

Продифференцируем соотношения (4). В силу системы (3) в производную одночлена $F\left(X\right)\xi^{j}$ степени $M \geq 1$ войдет одночлен $\left(\lambda\left(X\right)\cdot j\right)F\left(X\right)\xi^{j}$ той же степени плюс слагаемые более высоких степеней, в том числе за счет дифференцирования F по X.

Поэтому в переменных X,ξ имеем:

$$\dot{Y}_k = X_k^{[1]} + \cdots + X_k^{[N-2]} + \sum_{|j|=N-1}\left(X_k^{[j]} + \left(\lambda\cdot j\right)Y_k^{(j)}\right)\xi^{j} + \cdots$$

$$\dot{\eta}_k = \lambda_k\xi_k + \xi_k^{[2]} + \cdots + \xi_k^{[N-1]} + \sum_{|j|=N}\left(\xi_k^{[j]} + \left(\lambda\cdot j\right)\eta_k^{(j)}\right)\xi^{j} + \cdots$$

В правых частях этих уравнений перейдем к переменным Y,η по формулам (5). После этого всякий одночлен преобразуется:

$$F\left(X\right)\xi^{j} = F\left(Y - Y^{(N-1)}\left(Y,\eta\right) + \cdots\right)\left(\eta - \eta^{(N)}\left(Y,\eta\right) + \cdots\right)^{j}$$

Нормализация в окрестности многообразия равновесий.

Это дает слагаемое $F\left(Y\right)\eta^{j}$ степени M, затем слагаемые степени $M + N - 1$ (за счет зависимости F от X) и, наконец, слагаемые степени, большей N. Равенство $N = M + N - 1$ достигается только при $M = 1$, так что коэффициенты степени N для η_k изменяются лишь в результате преобразования одночлена:

$$\lambda_k\left(X\right)\xi_k = \lambda_k\left(Y\right)\eta_k - \sum_i \frac{\partial\lambda_k}{\partial Y_i} Y_i^{(N-1)}\eta_k - \lambda_k\left(Y\right)\eta^{(N)} + \cdots$$

Следовательно, в переменных Y,η имеем:

$$Y_k^{[j]} = X_k^{[j]} + \left(\lambda\cdot j\right)Y_k^{(j)}, \quad \left|j\right| = N-1$$

$$\eta_k^{[j]} = \xi_k^{[j]} - \sum_i \frac{\partial\lambda_k}{\partial Y_i} Y_i^{(j-e_i)} + \left(\lambda, j-e_k\right)\eta_k^{(j)}, \quad \left|j\right| = N,$$

$$j_k \neq 0, \quad e_k = \left(0,0,\ldots 0,1,0,\ldots 0\right);$$

$$\eta_k^{[j]} = \xi_k^{[j]} + \left(\left(\lambda\cdot j\right) - \lambda_k\right)\eta_k^{(j)}, \quad \left|j\right| = N, \quad j_k = 0.$$

Если $\left(\lambda\cdot j\right)\neq 0,\ \left|j\right| = N-1,$ то подходящим выбором $Y_k^{(j)}$ можно уничтожить $Y_k^{[j]}$, после чего выбором $\eta_k^{(j)},\ \left|j\right| = N,\ j_k \neq 0$ уничтожаются соответствующие $\eta_k^{[j]}$. Отдельно могут быть уничтожены $\eta_k^{(j)},\ \left|j\right| = N,\ j_k = 0$, если

$$\lambda_k \neq \lambda_1 j_1 + \cdots + \lambda_{k-1} j_{k-1} + \lambda_{k+1} j_{k+1} + \cdots$$

Окрестность многообразия равновесий в классической динамике со связями

Будем исходить из того, что наряду с линейными связями

$$g_s(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_{si}(x)\dot{x}_i = 0, \quad s = m+1,\ldots,n$$

задана также функция Лагранжа

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j - V(x).$$

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_s \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{x}}$$

Многообразие равновесий определяется условиями

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_s \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{x}} \qquad (6)$$

В теории принято рассматривать случай $\dim E = n - m$ (размерность E равна числу связей), поскольку это случай общего положения. Однако в конкретных задачах размерность E оказывается больше. Здесь возникают тонкости, которые стоит исследовать.

Будем считать x_i локальными координатами на многообразии положений M. В силу уравнений связей в каждом его касательном пространстве T_xM выделено подпространство Π_x размерности m (плоскость связи). Будем говорить, что подмногообразие E размерности $n-l \geq n-m$ правильно расположено относительно связи, если

1. T_xE трансверсально Π_x во всех точках $x \in E$;
2. распределение $T_xE \bigcap \Pi_x$ на E вполне интегрируемо.

Это распределение имеет размерность $m+(n-l)-n=m-l$, так что второе требование существенно лишь при $l \leq m-2$.

Не уменьшая общности, можно считать

$$E=\left\{x_\alpha=0,\ \alpha=1,\ldots,l\right\},$$

уравнения связей вблизи E представлены в разрешенном виде

$$\dot{x}_s = f_s\left(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_m\right)=\sum_{\lambda=1}^{m} c_{s\lambda}\left(x\right)\dot{x}_\lambda$$

причем на E эти коэффициенты уничтожаются:

$$c_{s\lambda}\left(0,\ldots,0,x_{l+1},\ldots,x_n\right)=0.$$

Предположим, что условия (6) задают правильно расположенное многообразие равновесий. Заменив уравнения Лагранжа с множителями на уравнения Воронца, получим:

$$\sum G_{\lambda\mu}\left(x\right)\dot{v}_\mu+\sum \Gamma_{\lambda\mu\nu}\left(x\right)v_\mu v_\nu+\Phi_\lambda\left(x\right)=0,\ \ \dot{x}_\lambda=v_\lambda$$

Тогда равновесия оказываются решениями системы

$$\Phi_{\lambda}(x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x_{\lambda}} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} c_{s\lambda} = 0.$$

Поскольку все $\Phi_{\lambda} = 0$, когда $x_{\alpha} = 0$, то имеем:

$$\Phi_{\lambda} = \sum \Phi_{\lambda\beta}(x) x_{\beta}, \quad \beta = 1, 2, \ldots, l$$

причем на подмногообразии *E*

$$\Phi_{\lambda\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_{\lambda} \partial x_{\beta}} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} c_{s\lambda}^{\beta}$$

Будем считать, что вдоль *E*

$$\det \left\| \Phi_{\alpha\beta} \right\| \neq 0$$

Тогда в окрестности *E* других равновесий заведомо нет.

С точки зрения изложенного выше роль ξ_k играют $x_{\alpha}, v_{\alpha}, v_a$, а роль X_k остаётся x_a, x_s.
Уравнения первого приближения имеют вид:

$$\sum G_{\lambda\mu}(0, x_a, x_s) \dot{v}_{\mu} + \sum \Phi_{\lambda\alpha}(0, x_a, x_s) x_{\alpha} = 0, \;\; \dot{x}_{\alpha} = v_{\alpha}, \;\; \dot{x}_a = \dot{x}_s = 0 \qquad (7)$$

Введем (вообще говоря, прямоугольную) матрицу

$$\left\|F_{\lambda\beta}\right\| = \left\|G_{\lambda\mu}\right\|^{-1}\left\|\Phi_{\lambda\alpha}\right\|$$

и предположим, что собственные значения её квадратной части $\left\|F_{\alpha\beta}\right\|$ положительны и различны (а если совпадают, то имеют простые жордановы клетки). Обозначим их

$$\omega_1^2,\ldots,\omega_l^2$$

Тогда без уменьшения общности можно считать, что в уравнениях (7)

$$\left\|G_{\lambda\mu}\right\| = E^m, \quad \left\|\Phi_{\alpha\beta}\right\| = \mathrm{diag}\left(\omega_1^2,\ldots,\omega_l^2\right), \quad \left\|\Phi_{a\beta}\right\| = 0,$$

так что в переменных

$$X = \left(x_a, x_s\right),\ \ \xi = \left(p_{-\alpha}, p_{+\alpha}, v_a\right),$$

$$p_{-\alpha} = x_\alpha - \frac{iv_\alpha}{\omega_\alpha\left(X\right)}, \quad p_{+\alpha} = x_\alpha + \frac{iv_\alpha}{\omega_\alpha\left(X\right)} = \overline{p}_{-\alpha}$$

уравнения уже второго приближения таковы:

$$\dot{p}_{-\alpha} = i\omega_\alpha\left(X\right)p_{-\alpha} + p_{-\alpha}^{[2]}\left(X,\xi\right),$$

$$\dot{p}_{+\alpha} = -i\omega_\alpha\left(X\right)p_{+\alpha} + p_{+\alpha}^{[2]}\left(X,\xi\right),$$

$$\dot{v}_a = v_a^{[2]}\left(X,\xi\right),\ \ \dot{x}_a = v_a,\ \ \dot{x}_s = 0$$

Трансгрессия – изменение медленных переменных $X = \left(x_a, x_s\right)$.

Пример 2. Движение стержня по цилиндру. Элементы теории поверхностей.

Полагаем, что координатная сеть на поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2) \tag{8}$$

составлена из линий кривизны, имеющих в каждой точке направления, указываемые единичными векторами

$$\text{э}_1(q_1,q_2) = \frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \text{э}_2(q_1,q_2) = \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \qquad (\text{э}_i \cdot \text{э}_j) = \delta_{ij} \tag{9}$$

Здесь $h_1(q_1,q_2), h_2(q_1,q_2)$ - параметры Ламе:

$$h_i(q_1,q_2) = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right|, \quad i = 1,2.$$

Вектор $\mathbf{e} = [\text{э}_1 \times \text{э}_2]$ нормален к поверхности (8) в точке (q_1, q_2).

Обозначая через $k_i(q_1,q_2)$, $(i = 1,2)$ главные кривизны поверхности (8), имеем по теореме Родрига:

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \text{э}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \text{э}_2.$$

Кинематические соотношения - I .

Для описания движения стержня введём систему координат $P\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}$ с началом в точке P соприкосновения стержня и поверхности. Единичный вектор $\mathbf{e}_1$ выбирается таким образом, что радиус-вектор центра масс стержня имеет вид: $\overrightarrow{PG} = s\mathbf{e}_1$. Будем считать, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ связаны с единичными векторами $\mathbf{э}_1$ и $\mathbf{э}_2$ координатных линий формулами:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{э}_1 \cos\varphi + \mathbf{э}_2 \sin\varphi.$$

$$\mathbf{e}_2 = -\mathbf{э}_1 \sin\varphi + \mathbf{э}_2 \cos\varphi$$

Поскольку движение стержня по поверхности происходит без скольжения, скорость точки P стержня равна нулю. Это условие приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи:

$$h_1\dot{q}_1 + \dot{s}\cos\varphi = 0, \quad h_2\dot{q}_2 + \dot{s}\sin\varphi = 0.$$

Если обозначить $\dot{s} = u$, то эти неголономные связи можно переписать в виде:

$$\dot{q}_1 = -\frac{u}{h_1}\cos\varphi, \quad \dot{q}_2 = -\frac{u}{h_2}\sin\varphi,$$

Кинематические соотношения - II.

Производная единичного вектора $\mathbf{e}_1$ равна

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \left[\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos\varphi - \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin\varphi \right) \frac{u}{h_1 h_2} \right] \mathbf{e}_2 - \left(k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi \right) u \mathbf{e},$$

а производная единичного вектора нормали равна

$$\dot{\mathbf{e}} = \left(k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi \right) u \mathbf{e}_1 + \left(k_2 - k_1 \right) u \sin\varphi \cos\varphi \mathbf{e}_2$$

Вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega \mathbf{e},$$

определим так, чтобы

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 \right], \quad \dot{\mathbf{e}} = \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \right]$$

Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет компоненты:

$$\omega_1 = \left(k_1 - k_2 \right) u \sin\varphi \cos\varphi, \quad \omega_2 = \left(k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi \right) u,$$

$$\omega = \dot{\varphi} - \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin\varphi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos\varphi \right) \frac{u}{h_1 h_2}.$$

Динамические уравнения - I

Уравнения движения стержня по поверхности представим в форме уравнений Аппеля. Сначала получим выражение для энергии ускорений системы. В качестве псевдоскоростей выберем введенные ранее переменные u и ω. Энергию ускорений вычислим по формуле:

$$S = \frac{m}{2}\mathbf{a}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\Theta}_G\boldsymbol{\varepsilon}\right) + \left(\left[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Theta}_G\boldsymbol{\omega}\right]\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

Здесь m **–** масса стержня, $\boldsymbol{\Theta}_G$ – тензор инерции стержня, $\boldsymbol{\varepsilon}$ **-** угловое ускорение стержня. Будем считать, что $\boldsymbol{\Theta}_G$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\Theta}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

Динамические уравнения - II

Энергия ускорений системы в явном виде записывается следующим образом:

$$S=\frac{\left(J+ms^2\right)}{2}\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)^2\dot{u}^2+\frac{\left(J+ms^2\right)}{2}\dot{\omega}^2+msu\omega\dot{\omega}-$$

$$-3\left(J+ms^2\right)\left(k_1-k_2\right)\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)u\omega\dot{u}\sin\varphi\cos\varphi+$$

$$+\left(J+ms^2\right)\left(k_1-k_2\right)\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)u^2\dot{\omega}\sin\varphi\cos\varphi-$$

$$-\left(J+ms^2\right)\left(\frac{\partial k_1}{\partial q_1}\cos^2\varphi+\frac{\partial k_2}{\partial q_1}\sin^2\varphi\right)\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)\frac{\cos\varphi}{h_1}u^2\dot{u}-$$

$$-\left(J+ms^2\right)\left(\frac{\partial k_1}{\partial q_2}\cos^2\varphi+\frac{\partial k_2}{\partial q_2}\sin^2\varphi\right)\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)\frac{\sin\varphi}{h_2}u^2\dot{u}-$$

$$-2\left(J+ms^2\right)\left(k_1-k_2\right)\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\sin\varphi-\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\cos\varphi\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{h_1h_2}u^2\dot{u}+$$

$$+m\left(k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\right)^2su^2\dot{u}$$

Динамические уравнения - III

Если стержень движется по поверхности в силовом поле с потенциалом $V\left(q_1, q_2, s, \varphi\right)$, то уравнения движения стержня, записанные в форме уравнений Аппеля, имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{u}} = -\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\cos\varphi}{h_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\sin\varphi}{h_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial q_2} - \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\sin\varphi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2}\cos\varphi\right)\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Для получения полной системы уравнений движения необходимо присоединить к данным уравнениям уравнения связи

$$\dot{q}_1 = -\frac{u}{h_1}\cos\varphi, \quad \dot{q}_2 = -\frac{u}{h_2}\sin\varphi,$$

а также формулы

$$\dot{s} = u,$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\sin\varphi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2}\cos\varphi\right)\frac{u}{h_1 h_2},$$

выражающие производные обобщенных координат через псевдоскорости.

Движение стержня по поверхности вращения - I

Предположим, что стержень движется по поверхности вращение, уравнение которой относительно некоторой неподвижной системы координат имеет вид:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho(q_1)\cos q_2 \\ \rho(q_1)\sin q_2 \\ \zeta(q_1) \end{pmatrix}$$

Коэффициенты Ламе определяются формулами:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = \rho(q_1),$$

а главные кривизны поверхности – формулами:

$$k_1 = \frac{\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d\zeta}{dq_1}\dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}.$$

Движение стержня по поверхности вращения - II

Будем считать, что движение стержня по поверхности происходит в однородном поле силы тяжести, причем линия действия силы тяжести образует с осью симметрии поверхности постоянный угол, равный $\pi/2-\alpha$. В этом случае потенциальная энергия стержня имеет вид:

$$V = mg\left[\left(\rho\cos q_2 + \frac{s\dfrac{d\rho}{dq_1}\cos q_2\cos\varphi}{\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}} - s\sin\varphi\sin q_2\right)\cos\alpha + \left(\zeta + \frac{s\dfrac{d\zeta}{dq_1}\cos\varphi}{\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}\right)\sin\alpha\right]$$

Уравнения движения стержня, разрешённые относительно производных, записываются следующим образом

$$\dot{u}=-\frac{msu^{2}}{\left(J+ms^{2}\right)}+\frac{3\left(k_{1}-k_{2}\right)u\omega\sin\varphi\cos\varphi}{k_{1}\cos^{2}\varphi+k_{2}\sin^{2}\varphi}+\frac{\left(\frac{dk_{1}}{dq_{1}}\cos^{2}\varphi+\frac{dk_{2}}{dq_{1}}\sin^{2}\varphi\right)u^{2}\cos\varphi}{\left(k_{1}\cos^{2}\varphi+k_{2}\sin^{2}\varphi\right)\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}}+$$

$$+\frac{2\left(k_{1}-k_{2}\right)\frac{d\rho}{dq_{1}}u^{2}\sin^{2}\varphi\cos\varphi}{\left(k_{1}\cos^{2}\varphi+k_{2}\sin^{2}\varphi\right)\rho\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}}+\frac{mgs\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\sin\alpha-\frac{d\zeta}{dq_{1}}\cos q_{2}\cos\alpha\right)}{\left(J+ms^{2}\right)\left(k_{1}\cos^{2}\varphi+k_{2}\sin^{2}\varphi\right)\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}},$$

$$\dot{\omega}=-\frac{msu\omega}{\left(J+ms^{2}\right)}-\left(k_{1}-k_{2}\right)\left(k_{1}\cos^{2}\varphi+k_{2}\sin^{2}\varphi\right)u^{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{mgs\cos\varphi\sin q_{2}\cos\alpha}{\left(J+ms^{2}\right)}+$$

$$+\frac{mgs\frac{d\rho}{dq_{1}}\sin\varphi\cos q_{2}\cos\alpha}{\left(J+ms^{2}\right)\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}}+\frac{mgs\frac{d\zeta}{dq_{1}}\sin\varphi\sin\alpha}{\left(J+ms^{2}\right)\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}},\quad \dot{\varphi}=\omega+\frac{\frac{d\rho}{dq_{1}}u\sin\varphi}{\rho\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}},$$

$$\dot{s}=u,\quad \dot{q}_{1}=-\frac{u\cos\varphi}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_{1}}\right)^{2}+\left(\frac{d\zeta}{dq_{1}}\right)^{2}}},\quad \dot{q}_{2}=-\frac{u\sin\varphi}{\rho}.$$

Положения равновесия стержня на поверхности вращения - I

Положения равновесия стержня на поверхности вращения определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial V}{\partial q_2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

Если представить потенциальную энергию в виде:

$$V\left(q_1, q_2, s, \varphi\right) = \left(m\mathbf{g} \cdot \left(\mathbf{r}\left(q_1, q_2\right) + s\mathbf{e}_1\left(q_1, q_2, \varphi\right)\right)\right),$$

то положения равновесия стержня на поверхности определяются из условий

$$\begin{cases} s\left(m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2\right) = 0, \\ s\left(k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi\right)\left(m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}\right) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, можно определить три типа положений равновесия.

Положения равновесия стержня на поверхности вращения - II

I. s=0. В этом случае стержень находится в равновесии в произвольной точке поверхности вращения, опираясь о неё своим центром масс. Положения равновесия данного типа образуют многообразие равновесий и не являются изолированными. При движении стержня в окрестности положения равновесия может возникнуть эффект «трансгрессии».

II. $s \neq 0, \quad (m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2) = 0, \quad (m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) = 0.$ В данном случае линия действия силы тяжести направлена вдоль стержня; центр масс находится выше (неустойчивое положение) или ниже (устойчивое положение) точки соприкосновения стержня с поверхностью.

III. $s \neq 0, \quad k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = 0.$ Кривизна нормального сечения поверхности в направлении стержня равна нулю. Иными словами, поверхность имеет прямолинейную образующую и стержень в положении равновесия целиком лежит на этой образующей (далее не рассматриваем, так как не одноточечный контакт).

Трансгрессия в задаче о движении стержня по цилиндру - I

Рассмотрим далее частный случай, когда стержень движется по поверхности цилиндра:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}\cos\varphi \\ \mathrm{R}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Положение стержня на цилиндре определяется координатой s такой, что $\overrightarrow{PG} = s\mathbf{e}_1$ и углом θ таким, что

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{э}_1 \sin\theta + \mathbf{э}_2 \cos\theta, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{э}_1 \cos\theta + \mathbf{э}_2 \sin\theta.$$

Уравнения неголономных связей имеют вид:

$$\dot{z} = -u\sin\theta, \quad \dot{\varphi} = -\frac{u}{R}\cos\theta, \quad \dot{s} = u.$$

Потенциальная энергия имеет вид:

$$V = mg\left[\left(z + s\sin\theta\right)\sin\alpha + \left(R\cos\varphi - s\cos\theta\sin\varphi\right)\cos\alpha\right].$$

Энергия ускорений в явном виде записывается следующим образом:

$$S = \frac{J_P}{2}\dot{\omega}^2 + \frac{J_p}{2R^2}\dot{u}^2\cos^4\theta + \frac{Msu^2}{R^2}\dot{u}\cos^4\theta + Msu\omega\dot{\omega} +$$

$$+\frac{J_p}{R^2}\left(u\dot{\omega} - 3\omega\dot{u}\right)u\sin\theta\cos^3\theta,$$

Здесь $\omega = \dot{\theta}, \quad J_p = J + Ms^2.$

Уравнения движения стержня по цилиндру имеют вид:

$$\dot{s} = u, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{z} = -u \sin\theta, \quad R\dot{\varphi} = -u\cos\theta,$$

$$J_p \dot{u} \cos^2\theta + Msu^2 \cos^2\theta - 3J_p \omega u \sin\theta\cos\theta + MgRs\cos\varphi\cos\alpha = 0, \tag{10}$$

$$J_p \dot{\omega} + Msu\omega + \frac{J_p}{R^2} u^2 \sin\theta\cos^3\theta + Mgs\cos\theta\sin\alpha + Mgs\sin\theta\sin\varphi\cos\alpha = 0.$$

В уравнениях (19) сделаем замену независимой переменной по формуле

$$dt = \sqrt{J_p}\cos\theta d\tau,$$

а также положим: M=g=R=1. В результате уравнения примут вид:

$$s' = u, \quad \theta' = \omega, \quad z' = -u\sin\theta, \quad \varphi' = -u\cos\theta,$$

$$u' - \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}\omega u + s\cos\varphi\cos\alpha = 0, \tag{11}$$

$$\omega' + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\omega^2 + u^2\sin\theta\cos^3\theta + s\cos^3\theta\sin\alpha + s\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi\cos\alpha = 0.$$

В уравнениях (20) вместо θ введем переменную χ по формуле: $\chi' = \dfrac{\omega}{\cos\theta}$

Тогда $\cos\theta = \dfrac{1}{\cosh\chi}$, $\sin\theta = \dfrac{\sinh\chi}{\cosh\chi}$.

Уравнения (11) примут вид:

$$s' = u, \quad \chi' = v, \quad z' = -\frac{u \sinh \chi}{\cosh \chi}, \quad \varphi' = -\frac{u}{\cosh \chi},$$
$$u' - \frac{2 \sinh \chi}{\cosh \chi} uv + s \cos \varphi \cos \alpha = 0, \tag{12}$$
$$v' + \frac{\sinh \chi}{\cosh^3 \chi} u^2 + \frac{s \sin \alpha}{\cosh^2 \chi} + \frac{s \sinh \chi \sin \varphi \cos \alpha}{\cosh^2 \chi} = 0.$$

Система уравнений (12) имеет многообразие равновесий

$$E = \{s = 0\}$$

Сделаем в уравнениях (12) последнее преобразование. Введем новые переменные по формулам:

$$\Phi = \varphi + \frac{s}{\cosh \chi}, \quad Q = z + \frac{s \sinh \chi}{\cosh \chi}.$$

В результате в новых переменных система уравнений (12) примет вид системы, к которой следует применять процедуру нормализации, кратко описанную выше.

В окончательной форме система уравнений движения примет вид:

$$s' = u, \quad \chi' = v, \quad Q' = \frac{sv}{\cosh^2 \chi}, \quad \Phi' = -sv\frac{\sinh \chi}{\cosh^2 \chi},$$

$$u' = \frac{2\sinh \chi}{\cosh \chi}uv - s\cos\left(\Phi - \frac{s}{\cosh \chi}\right)\cos\alpha,$$

$$v' = -\frac{\sinh \chi}{\cosh^3 \chi}u^2 - \frac{s\sin\alpha}{\cosh^2 \chi} - \frac{s\sinh \chi \sin\left(\Phi - \frac{s}{\cosh \chi}\right)\cos\alpha}{\cosh^2 \chi}$$

С точки зрения изложенного выше, роль быстрых переменных ξ играют s, u и v, а роль медленных переменных X остаётся χ, Φ и Q. Путём нормализации системы можно сделать следующие выводы о характере её движения.

Процесс движения качественно можно представить как колебания по s, θ, z, с амплитудой порядка ε около положения равновесия с координатами Φ, Q, сочетающиеся с медленным поворотом стержня. За время порядка $1/\varepsilon$ угол θ изменится на конечную величину, а равновесие, около которого происходят колебания, сместится на величину порядка ε^2 (трансгрессия). Смещение будет происходить по кривой:

$$Q = Q_0 - \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\cos\Phi - \cos\Phi_0\right).$$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - I.

Шар катается без проскальзывания по неподвижной поверхности под действием силы тяжести в окрестности нижней точки данной поверхности, причем эта точка является точкой эллиптического типа. Будем считать, что центр масс шара S принадлежит поверхности $S \in \{z = f(x, y)\}$, причем без ограничения общности $K_1 \neq K_2, \quad K_i > 0, \quad i = 1, 2.$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(K_1 x^2 + K_2 y^2\right) + \frac{1}{6}\left(L_{11}x^3 + L_{22}y^3 + 3\left(L_{12}x + L_{21}y\right)xy\right) + \\ + \frac{1}{24}\left(M_1 x^4 + M_2 y^4 + 6M_3 x^2 y^2 + 4\left(M_{12}x^2 + M_{21}y^2\right)xy\right). \qquad (1)$$

Пусть M – масса шара, r – его радиус, $\lambda M r^2$ - момент инерции шара относительно произвольной оси, проходящей через центр масс; g – ускорение свободного падения.

Обозначим через $\mathbf{v}_S$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость центра масс шара и его угловую скорость. Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат, в которой задана поверхность (1), единичные базисные векторы данной системы обозначим $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, причем вектор $\mathbf{e}_z$ направлен противоположно направлению силы тяжести.

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - II.

Движение шара происходит без проскальзывания, поэтому

$$\mathbf{v}_S = [\boldsymbol{\omega} \times r\mathbf{n}] = r[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}],$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}\mathbf{e}_x - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}\mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}\mathbf{e}_z. \qquad (2)$$

Для нахождения закона движения шара запишем закон изменения импульса и закон изменения кинетического момента относительно центра масс соответственно:

$$M\frac{d\mathbf{v}_S}{dt} = -Mg\mathbf{e}_z + \mathbf{R}, \quad \lambda M r^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = r[\mathbf{R} \times \mathbf{n}].$$

Радиус-вектор центра масс шара имеет вид:

$$\mathbf{r}_S = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + f(x, y)\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{v}_S = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right)\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{a}_S = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}\right)\mathbf{e}_z.$$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - III.

Введем также

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \Omega \mathbf{e}_z.$$

Уравнения связей (2) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ запишутся в следующем виде:

$$\dot{x} = \frac{r\omega_y}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{r\Omega \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\dot{y} = -\frac{r\omega_x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} - \frac{r\Omega \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Закон изменения кинетического момента можно переписать в виде:

$$\lambda r \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left[\left(g\mathbf{e}_z + \frac{d\mathbf{v}_S}{dt}\right)\times \mathbf{n}\right].$$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - IV.

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ данное уравнение запишется следующим образом:

$$\lambda r\dot{\omega}_x = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dot{x}\dot{y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2+\frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}+g\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\lambda r\dot{\omega}_y = -\frac{\ddot{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dot{x}\dot{y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2+\frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}+g\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\lambda r\dot{\Omega} = \frac{\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial x}-\ddot{x}\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Выражая из уравнений связей компоненты ω_x, ω_y , получим замкнутую систему уравнений относительно x, y, Ω . Будем раскладывать правые части уравнений в ряд по x и y, $\dot{x}, \dot{y}$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - V.

В первом приближении получается следующая система

$$(\lambda+1)\ddot{x} = -K_1 g x + \lambda r \Omega K_2 \dot{y},$$
$$(\lambda+1)\ddot{y} = -K_2 g y - \lambda r \Omega K_1 \dot{x},$$
$$\dot{\Omega} = 0.$$

В первом приближении компонента угловой скорости Ω постоянная. Будем считать её малой величиной. Тогда система уравнений первого приближения слегка перепишется и примет вид:

$$(\lambda+1)\ddot{x} = -K_1 g x, \quad (\lambda+1)\ddot{y} = -K_2 g y, \quad \dot{\Omega} = 0.$$

Шар будет совершать колебания в плоскости, перпендикулярной вертикальной оси, проходящей через точку $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ - наинизшую точку углубления. Шар будет совершать колебания с различными частотами в направлении неподвижных осей x и y.

Во втором приближении система будет иметь вид:

$$(\lambda+1)\ddot{x} = -K_1 g x - \frac{g}{2}\left(L_{11}x^2 + 2L_{12}xy + L_{21}y^2\right) + \lambda r \Omega K_2 \dot{y},$$
$$(\lambda+1)\ddot{y} = -K_2 g y - \frac{g}{2}\left(L_{11}x^2 + 2L_{12}xy + L_{21}y^2\right) - \lambda r \Omega K_1 \dot{x},$$
$$\dot{\Omega} = 0.$$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - VI.

Для начала приведем данную систему второго порядка к системе уравнений первого порядка, первое приближение которой имеет диагональный вид. Введем следующие обозначения:

$$K_1 = \frac{(\lambda+1)\omega_1^2}{g}, \quad K_2 = \frac{(\lambda+1)\omega_2^2}{g}, \quad u = \frac{\lambda r \Omega}{g}.$$

Теперь введем новые переменные z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 по формулам:

$$x = \frac{z_1 - z_2}{2i\omega_1^2}, \quad \dot{x} = \frac{z_1 + z_2}{2\omega_1}, \quad y = \frac{z_3 - z_4}{2i\omega_2^2}, \quad \dot{y} = \frac{z_3 + z_4}{2\omega_2}, \quad u = z_5$$

В переменных z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 система уравнений движения шара записывается в виде:

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - VII.

В переменных z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 система уравнений движения шара записывается в виде:

$$\dot{z}_1 = i\omega_1 z_1 + \frac{gL_{11}}{8(\lambda+1)\omega_1^3}(z_1 - z_2)^2 + \frac{gL_{12}}{4(\lambda+1)\omega_1\omega_2^2}(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) +$$

$$+\frac{gL_{21}\omega_1}{8(\lambda+1)\omega_2^4}(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}(z_3 + z_4)z_5,$$

$$\dot{z}_2 = -i\omega_1 z_2 + \frac{gL_{11}}{8(\lambda+1)\omega_1^3}(z_1 - z_2)^2 + \frac{gL_{12}}{4(\lambda+1)\omega_1\omega_2^2}(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) +$$

$$+\frac{gL_{21}\omega_1}{8(\lambda+1)\omega_2^4}(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}(z_3 + z_4)z_5,$$

$$\dot{z}_3 = i\omega_2 z_3 + \frac{gL_{12}\omega_2}{8(\lambda+1)\omega_1^4}(z_1 - z_2)^2 + \frac{gL_{21}}{4(\lambda+1)\omega_1^2\omega_2}(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) +$$

$$+\frac{gL_{22}}{8(\lambda+1)\omega_2^3}(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}(z_3 + z_4)z_5,$$

$$\dot{z}_4 = -i\omega_2 z_4 + \frac{gL_{12}\omega_2}{8(\lambda+1)\omega_1^4}(z_1 - z_2)^2 + \frac{gL_{21}}{4(\lambda+1)\omega_1^2\omega_2}(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) +$$

$$+\frac{gL_{22}}{8(\lambda+1)\omega_2^3}(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}(z_3 + z_4)z_5,$$

$$\dot{z}_5 = 0.$$

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - VIII.

Заметим, что линейная часть системы уравнений движения шара, записанной в переменных z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 , имеет диагональную форму и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов в правых частях системы. После нормализации квадратичных слагаемых система уравнений движения шара примет вид:

$$\dot{z}_1 = i\omega_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = -i\omega_1 z_2, \quad \dot{z}_3 = i\omega_2 z_3, \quad \dot{z}_4 = -i\omega_2 z_4, \quad \dot{z}_5 = 0.$$

Таким образом, в нормальной форме все члены второго порядка отсутствуют, а последнее уравнение дает $z_5 = \mathrm{const}$, то есть $\Omega = \mathrm{const}$.

Нормализация членов третьего порядка малости приводит к тому, что в правых частях уравнений для z_1, z_2, z_3, z_4 появляются резонансные члены, но последнее уравнение своей формы не меняет: по-прежнему $z_5 = \mathrm{const}$, то есть $\Omega = \mathrm{const}$.

Резонансные члены в уравнении для z_5 получаются только в шестом порядке.

Пример 2. Задача о качении шара в углублении - IX.

Дифференциальное уравнение для z_5 имеет вид:

$$\dot{z}_5 = R_1 z_1^2 z_2^2 \left(\frac{3z_3 z_4}{\omega_2^2} - \frac{z_1 z_2}{\omega_1^2} \right) + R_2 z_3^2 z_4^2 \left(\frac{z_3 z_4}{\omega_2^2} - \frac{3z_1 z_2}{\omega_1^2} \right),$$

$$R_1 = \frac{\left((\lambda+1)\left(4\omega_1^2 - \omega_2^2\right) M_{12}\omega_1^2 + \left(4\omega_1^2 - \omega_2^2\right) g L_{11} L_{12} + 3g L_{12} L_{21} \omega_1^2 \right) \lambda}{16\left(9\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\left(4\omega_1^2 - \omega_2^2\right) g^3 \omega_1^4},$$

$$R_2 = \frac{\left((\lambda+1)\left(4\omega_2^2 - \omega_1^2\right) M_{21}\omega_2^2 + \left(4\omega_2^2 - \omega_1^2\right) g L_{21} L_{22} + 3g L_{12} L_{21} \omega_2^2 \right) \lambda}{16\left(9\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\left(4\omega_2^2 - \omega_1^2\right) g^3 \omega_2^4}$$

Таким образом, в системе будет наблюдаться равномерное изменение компоненты угловой скорости Ω с постоянной скоростью, имеющей шестой порядок малости. На временах порядка 1/ε переменная Ω изменяется на величину пятого порядка малости. Следовательно, в рассматриваемой системе наблюдается эволюция медленной переменной (трансгрессия), причем порядок трансгрессии – пятый.

Выводы

1. На основе теории, описанной в работах Я.В. Татаринова, рассмотрен ряд задач, в которых обнаружен эффект трансгрессии. Данный эффект изучен с помощью специально разработанных методов.
2. Исследована задача о движении абсолютно твердого стержня по поверхности цилиндра. Обнаружен и описан эффект трансгрессии в данной задаче.
3. Описан эффект трансгрессии с задаче о качении тяжелого однородного шара по неподвижной поверхности в окрестности её наинизшей точки эллиптического типа.

Спасибо за внимание!