НАУЧНЫЙ СЕМИНАР «КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА»
ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ И ВЦ РАН
под руководством профессора С.А.Абрамова
20 января 2021 года

Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса

Бардин Б.С.
Кафедра мехатроники и теоретической механики,
Московский авиационный институт (технический университет)
Москва, Россия

Кулешов А.С.
Кафедра теоретической механики и мехатроники,
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

E-mail: bsbardin@yandex.ru
kuleshov@mech.math.msu.su

Уравнения Эйлера – Пуассона и их первые интегралы.

$$A_1\dot{\omega}_1 + \left(A_3 - A_2\right)\omega_2\omega_3 = Mg\left(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3\right),$$
$$A_2\dot{\omega}_2 + \left(A_1 - A_3\right)\omega_1\omega_3 = Mg\left(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1\right),$$
$$A_3\dot{\omega}_3 + \left(A_2 - A_1\right)\omega_1\omega_2 = Mg\left(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2\right);$$
$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\ \ \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\ \ \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

При любых значениях параметров $A_1, A_2, A_3, x_1, x_2, x_3$ система уравнений Эйлера – Пуассона обладает тремя первыми интегралами.

Интеграл энергии:

$$H = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2\right) + Mg\left(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3\right) = E = \text{const}$$

Интеграл площадей:

$$K = A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = k = \text{const}$$

Геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Для решения системы уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти ещё один дополнительный первый интеграл. В общем случае найти его невозможно, однако он может существовать при некоторых значениях параметров.

Интегрируемые случаи уравнений Эйлера – Пуассона

1. Случай Эйлера: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ Дополнительный первый интеграл:

$$L^2 = A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 = l^2 = \mathrm{const}$$

2. Случай Лагранжа: $x_1 = x_2 = 0,\ A_1 = A_2.$ Дополнительный первый интеграл:

$$\omega_3 = \omega = \mathrm{const}$$

3. Случай Ковалевской: $A_1 = A_2 = 2A_3,\ x_2 = x_3 = 0.$ Дополнительный первый интеграл:

$$\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \frac{Mgx_1}{A_3}\gamma_1\right)^2 + \left(2\omega_1\omega_2 - \frac{Mgx_1}{A_3}\gamma_2\right)^2 = c^2 = \mathrm{const}$$

Кроме трех общих случаев интегрируемости существует ещё значительное число частных случаев интегрируемости, когда дополнительный первый интеграл существует не только при ограничениях на параметры, но и при дополнительных ограничениях на начальные условия.

В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс показал, что при выполнении условий:

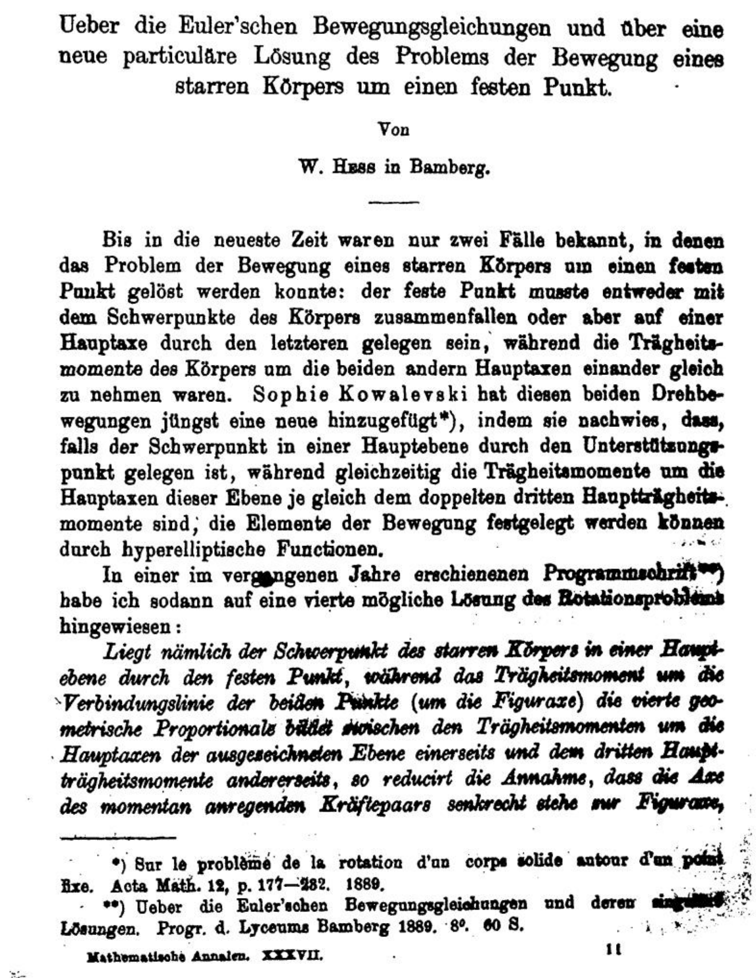
$$x_3 = 0,\quad A_2\left(A_3 - A_1\right)x_2^2 = A_1\left(A_2 - A_3\right)x_1^2,\quad A_2 \geq A_3 \geq A_1$$

уравнения Эйлера – Пуассона допускают четвертый частный интеграл вида

$$A_1\omega_1 x_1 + A_2\omega_2 x_2 = 0.$$

Чтобы доказать существование данного интеграла, запишем уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова.

Оригинальная работа Гесса (1890 г.)


Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Von

W. Hess in Bamberg.

Bis in die neueste Zeit waren nur zwei Fälle bekannt, in denen das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt gelöst werden konnte: der feste Punkt musste entweder mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfallen oder aber auf einer Hauptaxe durch den letzteren gelegen sein, während die Trägheitsmomente des Körpers um die beiden andern Hauptaxen einander gleich zu nehmen waren. Sophie Kowalevski hat diesen beiden Drehbewegungen jüngst eine neue hinzugefügt*), indem sie nachwies, dass, falls der Schwerpunkt in einer Hauptebene durch den Unterstützungspunkt gelegen ist, während gleichzeitig die Trägheitsmomente um die Hauptaxen dieser Ebene je gleich dem doppelten dritten Hauptträgheitsmomente sind, die Elemente der Bewegung festgelegt werden können durch hyperelliptische Functionen.

In einer im vergangenen Jahre erschienenen Programmschrift**) habe ich sodann auf eine vierte mögliche Lösung des Rotationsproblems hingewiesen:

Liegt nämlich der Schwerpunkt des starren Körpers in einer Hauptebene durch den festen Punkt, während das Trägheitsmoment um die Verbindungslinie der beiden Punkte (um die Figuraxe) die vierte geometrische Proportionale bildet zwischen den Trägheitsmomenten um die Hauptaxen der ausgezeichneten Ebene einerseits und dem dritten Hauptträgheitsmomente andererseits, so reducirt die Annahme, dass die Axe des momentan anregenden Kräftepaars senkrecht stehe zur Figuraxe,

---

*) Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math. 12, p. 177—232. 1889.

**) Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und deren singuläre Lösungen. Progr. d. Lyceums Bamberg 1889. 8°. 60 S.

Работа Г.Г. Аппельрота (1892 г.)

ПО ПОВОДУ § 1 МЕМУАРА С. В. КОВАЛЕВСКОЙ „SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.“ (ACTA MATHEMATICA. 12. 2).

Г. Г. Аппельрота.

(Читано въ засѣданіи Математическаго Общества 21 апрѣля 1892 года).

Въ § 1 указаннаго выше мемуара, равно какъ и въ дополненіи къ нему, появившемся въ 14 томѣ Acta Mathematica подъ заглавіемъ: ‹Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.› наша талантливая соотечественница доказала, что дифференціальныя уравненія, къ которымъ сводится задача о движеніи тяжелаго тѣла, укрѣпленнаго въ одной точкѣ, не допускаютъ вообще системы однозначныхъ интеграловъ съ 5 произвольными постоянными вида

$$p=t^{-n_1}\sum_0^\infty a_n t^n,\quad \gamma=t^{-m_1}\sum_0^\infty \alpha_n t^n,$$

$$q=t^{-n_2}\sum_0^\infty b_n t^n,\quad \gamma'=t^{-m_2}\sum_0^\infty \beta_n t^n, \qquad \text{(A)}$$

$$r=t^{-n_3}\sum_0^\infty c_n t^n,\quad \gamma''=t^{-m_3}\sum_0^\infty \gamma_n t^n,$$

гдѣ n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 означаютъ цѣлыя числа, изъ которыхъ хоть одно положительно, но что ряды подобнаго типа удовлетворяютъ уравненіямъ задачи, кромѣ уже раньше изслѣдованныхъ случаевъ (Эйлера и Лагранжа), еще только въ случаѣ, указанномъ впервые ею:

$$A=B=2C,\ z_0=0.$$

Доказательство приведенной выше теоремы отличается большой сжатостью и лаконизмомъ, такъ что, вообще говоря, возможны нѣкоторыя недоразумѣнія и сомнѣнія относительно общности и достаточности его *). *Пополнить это доказательство и указать на существованіе еще одного новаго случая* **),

$$y_0=0,\ x_0\sqrt{\frac{B-C}{C}}=z_0\sqrt{\frac{A-B}{A}}\ ^{***)},\ A>B>C,$$

когда задача допускаетъ интегралы разсмотрѣннаго выше вида съ 5 произвольными постоянными, и будетъ цѣлью настоящей статьи.

Прежде всего я остановлюсь на выясненіи того, какія значенія могутъ имѣть показатели n_1, n_2, n_3, m_1, m_2 и m_3, и докажу, что *не существуетъ не только общихъ, но и*

*) Таковы замѣчанія академика А. А. Маркова, сдѣланныя имъ въ письмѣ, доложенномъ Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 17 марта 1892 года.

**) Первоначально вслѣдствіе незначительной ошибки въ вычисленіи я полагалъ, что С. В. Ковалевской пропущенъ рядъ частныхъ интеграловъ съ 4 произвольными постоянными и съ полюсами перваго порядка, и замѣтилъ свою ошибку, благодаря любезному указанію проф. П. А. Некрасова, который, прочитывая мою статью еще въ корректурѣ первый обнаружилъ, что при

$$y_0=0,\ x_0\sqrt{(B-C)A}=z_0\sqrt{(A-B)C} \text{ и } A>B>C$$

общіе интегралы допускаютъ полюсы перваго порядка, за что и пользуюсь случаемъ принести ему глубокую благодарность.

***) Квадратный корень принимается вездѣ за двузначную функцію.

Работа П.А. Некрасова (1892 г.)

КЪ ЗАДАЧѢ О ДВИЖЕНІИ ТЯЖЕЛАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

П. А. Некрасова.

При соблюденіи условій

$$y_0 = 0,\ A(B-C)x_0^{\,2} = C(A-B)z_0^{\,2},\ A > B > C, \tag{1}$$

уравненіямъ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки, которыя приводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma', \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

удовлетворяютъ ряды:

$$\left.\begin{aligned} p &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, & \gamma &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n,\\ q &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n, & \gamma' &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n,\\ r &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Согласно обозначеніямъ, принятымъ въ книгѣ *Halphen*'а «*Traité des fonctions elliptiques*», будемъ полагать:

$$y = \wp\tau,\ R = -\wp'\tau.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, выбравъ τ_0 подъ условіями

$$\wp\tau_0 = \frac{l_2 B\lambda^2}{6},\ \wp'\tau_0 = -l_1 i,$$

будемъ имѣть:

$$\eta = -\lambda\left(\wp\tau + \frac{\wp\tau_0}{2}\right),\quad l_2 + 2\rho\eta = \frac{-4}{B\lambda^2}(\wp\tau - \wp\tau_0),$$

$$l_0 - \eta^2 = \frac{-\lambda^2(\wp'\tau^2 - \wp'\tau_0^{\,2})}{4(\wp\tau - \wp\tau_0)},$$

и уравненіе (13) представится такъ:

$$\frac{dv}{d\tau} + \frac{2(\wp\tau - \wp\tau_0)}{\lambda(\wp'\tau - \wp'\tau_0)}\left\{aiv - \lambda(2\wp\tau + \wp\tau_0)\right\}v - \frac{\lambda ai}{2}(\wp'\tau - \wp'\tau_0) = 0. \tag{14}$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$v = \frac{\lambda(\wp'\tau - \wp'\tau_0)}{2ai(\wp\tau - \wp\tau_0)}\frac{dlgw}{d\tau}, \tag{15}$$

получимъ линейное уравненіе

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'\tau - \wp'\tau_0}{\wp\tau - \wp\tau_0}\right)\frac{dw}{d\tau} + a^2(\wp\tau - \wp\tau_0)w = 0, \tag{16}$$

коэффиціенты котораго суть двояко-періодическія функціи.

Изслѣдуя особыя точки интеграловъ уравненія (16), замѣчаемъ, что коэффиціенты его обращаются въ безконечность въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) когда $\tau \equiv -\tau_0$ и 2) когда $\tau \equiv 0$. Но при ближайшемъ разсмотрѣніи оказывается, что особыя точки интеграловъ уравненія (16) соотвѣтствуютъ только точкамъ $\tau \equiv 0$; въ области же каждой изъ точекъ $\tau \equiv -\tau_0$ интегралы остаются конечными, непрерывными и однозначными (каждая изъ этихъ точекъ есть особая только *по виду*).

Статья А.В. Беляева (2015 г.)

2015 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Том 206, № 5

УДК 517.927.75

А. В. Беляев

Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса

Решение уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса представлено набором особых точек решения вместе с асимптотикой решения в этих точках. Указан полный список однозначных и конечнозначных решений случая Гесса. Получено представление для предельных периодических решений и найдено точное условие, при котором такие решения существуют.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: первый интеграл, случай Гесса уравнений Эйлера–Пуассона, асимптотика решений, особые точки решений, аналитические функции.

DOI: 10.4213/sm8335

§ 1. Введение

Случай Гесса (см. [1]) задачи о движении тяжелого твердого тела интересен тем, что, несмотря на наличие четвертого интеграла для классических уравнений Эйлера–Пуассона, его решения в квадратурах не удалось получить никому. Тем не менее и без явного решения их свойства исследованы достаточно полно. Геометрическое истолкование искомого движения было дано Е. Н. Жуковским в [2], а П. А. Некрасов и Б. К. Млодзеевский в [3], [4] доказали, что при некоторых ограничениях решения могут быть асимптотическими. Представляет интерес также тот факт, что случай Гесса был переоткрыт Г. Г. Аппельротом (см. [5]), использовавшим идею С. В. Ковалевской (см. [6]) исследования на однозначность особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона. Отметим также, что П. А. Некрасовым в [7] показано, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными.

В настоящее время классическая задача о движении тяжелого твердого тела в первую очередь представляет интерес в связи тематикой интегрирования гамильтоновых систем методом LA-пары с параметром (см. монографию [8]). Для гамильтоновых систем на алгебрах Ли этот метод был представлен в работах [9]–[12].

К случаю Гесса метод LA-пары с параметром был применен в работе В. Драговича и Б. Гаджича [13]. Естественно, что этот метод не мог дать общего решения, так как оно не выражается в θ-функциях. Но все же были получены частные периодические решения и вдобавок сам факт существования LA-пары с параметром для, вообще говоря, неинтегрируемой задачи является весьма интересным.

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова - I

Выберем вместо главных осей инерции в неподвижной точке O произвольную правую систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, жестко связанную с телом. В этой системе координат кинетический момент тела и вектор угловой скорости имеют вид:

$$\mathbf{K}_O = K_1\mathbf{e}_{\mathrm{I}} + K_2\mathbf{e}_{\mathrm{II}} + K_3\mathbf{e}_{\mathrm{III}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \Omega_1\mathbf{e}_{\mathrm{I}} + \Omega_2\mathbf{e}_{\mathrm{II}} + \Omega_3\mathbf{e}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} & -L_{23} \\ -L_{13} & -L_{23} & L_{33} \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_1 &= L_{11}\Omega_1 - L_{12}\Omega_2 - L_{13}\Omega_3, \\ K_2 &= -L_{12}\Omega_1 + L_{22}\Omega_2 - L_{23}\Omega_3, \\ K_3 &= -L_{13}\Omega_1 - L_{23}\Omega_2 + L_{33}\Omega_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

При этом кинетическая энергия тела записывается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\left(L_{11}\Omega_1^2 + L_{22}\Omega_2^2 + L_{33}\Omega_3^2\right) - L_{23}\Omega_2\Omega_3 - L_{13}\Omega_1\Omega_3 - L_{12}\Omega_1\Omega_2$$

Если разрешить систему уравнений (2) относительно компонент угловой скорости, то получим:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= l_{11}K_1 + l_{12}K_2 + l_{13}K_3, \\ \Omega_2 &= l_{12}K_1 + l_{22}K_2 + l_{23}K_3, \\ \Omega_3 &= l_{13}K_1 + l_{23}K_2 + l_{33}K_3. \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова - II

Здесь обозначено:

$$l_{11} = \frac{L_{22}L_{33} - L_{23}^2}{\Delta}, \quad l_{22} = \frac{L_{11}L_{33} - L_{13}^2}{\Delta}, \quad l_{33} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{\Delta},$$

$$l_{13} = \frac{L_{12}L_{23} + L_{13}L_{22}}{\Delta}, \quad l_{23} = \frac{L_{11}L_{23} + L_{12}L_{13}}{\Delta}, \quad l_{12} = \frac{L_{12}L_{33} + L_{13}L_{23}}{\Delta},$$

$$\Delta = \det\left(L_{ij}\right) = L_{11}L_{22}L_{33} - L_{11}L_{23}^2 - L_{33}L_{12}^2 - L_{22}L_{13}^2 - 2L_{12}L_{13}L_{23}$$

Кинетическая энергия принимает вид:

$$T = \frac{1}{2}\left(l_{11}K_1^2 + l_{22}K_2^2 + l_{33}K_3^2\right) + l_{23}K_2K_3 + l_{13}K_1K_3 + l_{12}K_1K_2.$$

Повернем теперь оси системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ вокруг первой оси $O\xi_1$ на угол α. Тогда

$$K_1 = K_1^*, \quad K_2 = K_2^*\cos\alpha - K_3^*\sin\alpha, \quad K_3 = K_2^*\sin\alpha + K_3^*\cos\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}\left(l_{11}^*K_1^{*2} + l_{22}^*K_2^{*2} + l_{33}^*K_3^{*2}\right) + l_{23}^*K_2^*K_3^* + l_{13}^*K_1^*K_3^* + l_{12}^*K_1^*K_2^*.$$

$$l_{11}^* = l_{11}, \quad l_{22}^* = l_{22}\cos^2\alpha + l_{33}\sin^2\alpha + l_{23}\sin 2\alpha, \quad l_{33}^* = l_{22}\sin^2\alpha + l_{33}\cos^2\alpha - l_{23}\sin 2\alpha,$$

$$l_{12}^* = l_{13}\sin\alpha + l_{12}\cos\alpha, \quad l_{13}^* = l_{13}\cos\alpha - l_{12}\sin\alpha, \quad l_{23}^* = l_{23}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\left(l_{22} - l_{33}\right)\sin 2\alpha.$$

Положим теперь

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{2l_{23}}{l_{22} - l_{33}}$$

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова - III

Тогда кинетическая энергия принимает вид:

$$T = \frac{1}{2}\left(l_{11}^{*} K_1^{*2} + l_{22}^{*} K_2^{*2} + l_{33}^{*} K_3^{*2}\right) + \left(l_{13}^{*} K_3^{*} + l_{12}^{*} K_2^{*}\right) K_1^{*}.$$

Определение. Система координат $O\eta_1\eta_2\eta_3$ называется специальными осями П.В.Харламова, если ось $O\eta_1$ этой системы направлена вдоль радиуса – вектора центра масс твердого тела, а кинетическая энергия имеет вид, указанный выше, то есть

$$T = \frac{1}{2}\left(aL_1^2 + a_1 L_2^2 + a_2 L_3^2\right) + \left(b_1 L_2 + b_2 L_3\right) L_1.$$

В специальных осях П.В. Харламова уравнения Эйлера – Пуассона принимают вид:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 &= \left(a_2 - a_1\right) L_2 L_3 + \left(b_2 L_2 - b_1 L_3\right) L_1, \\
\dot{L}_2 &= \left(a - a_2\right) L_1 L_3 + \left(b_1 L_2 + b_2 L_3\right) L_3 - b_2 L_1^2 + \Gamma \nu_3, \\
\dot{L}_3 &= -\left(a - a_1\right) L_1 L_2 - \left(b_1 L_2 + b_2 L_3\right) L_2 + b_1 L_1^2 - \Gamma \nu_2, \\
\dot{\nu}_1 &= \left(a_2 L_3 + b_2 L_1\right) \nu_2 - \left(a_1 L_2 + b_1 L_1\right) \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= \left(aL_1 + b_1 L_2 + b_2 L_3\right) \nu_3 - \left(a_2 L_3 + b_2 L_1\right) \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= -\left(aL_1 + b_1 L_2 + b_2 L_3\right) \nu_2 + \left(a_1 L_2 + b_1 L_1\right) \nu_1.
\end{aligned}$$

Здесь ν_1, ν_2, ν_3 – проекции вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на оси специальной системы координат, а

$$\Gamma = Mg\rho = Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Воспользуемся специальными осями П.В. Харламова для изучения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса.

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова для случая Гесса - I

В случае Гесса переход от главных осей инерции тела в неподвижной точке к специальным осям П.В. Харламова определяется формулами:

$$\mathbf{e}_{\mathrm{I}} = \mathbf{e}_1 \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \sin\alpha, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{II}} = -\mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cos\alpha, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{III}} = \mathbf{e}_3,$$

то есть

$$L_1 = A_1\omega_1 \cos\alpha + A_2\omega_2 \sin\alpha, \quad L_2 = A_2\omega_2 \cos\alpha - A_1\omega_1 \sin\alpha, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1 \cos\alpha + \gamma_2 \sin\alpha, \quad \nu_2 = \gamma_2 \cos\alpha - \gamma_1 \sin\alpha, \quad \nu_3 = \gamma_3,$$

где введены обозначения

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 &= -bL_1L_3, \\
\dot{L}_2 &= (a-c)L_1L_2 + bL_2L_3 + \Gamma\nu_3, \\
\dot{L}_3 &= -(a-c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 - \Gamma\nu_2, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= (aL_1 + bL_2)\nu_3 - cL_3\nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= (bL_1 + cL_2)\nu_1 - (aL_1 + bL_2)\nu_2,
\end{aligned}$$

$$a = \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, \quad b = \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, \quad c = \frac{1}{A_3}$$

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова для случая Гесса - II

Интеграл Гесса принимает вид:

$$L_1 = 0.$$

С учетом этого интеграла уравнения Эйлера – Пуассона записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{L}_2 = bL_2L_3 + \Gamma\nu_3, \quad \dot{L}_3 = -bL_2^2 - \Gamma\nu_2, \\ &\dot{\nu}_1 = c\left(L_3\nu_2 - L_2\nu_3\right), \quad \dot{\nu}_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \left(c\nu_1 - b\nu_2\right)L_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений (3) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}\left(L_2^2 + L_3^2\right) + \Gamma\nu_1 = E; \quad L_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Заметим, что случай b=0 соответствует случаю Лагранжа движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Введем безразмерные компоненты момента, безразмерное время и безразмерные постоянные первых интегралов:

$$L_2 = y\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}, \quad L_3 = z\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad h = \frac{E}{\Gamma}, \quad k_1 = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad d_1 = \frac{b}{c}$$

Тогда в безразмерных переменных система уравнений (3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{d\tau} = d_1yz + \nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau} = -d_1y^2 - \nu_2, \\ &\frac{d\nu_1}{d\tau} = z\nu_2 - y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1y\nu_3 - z\nu_1, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau} = y\nu_1 - d_1y\nu_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях П.В. Харламова для случая Гесса - III

Еще раз запишем систему уравнений (4):

$$\frac{dy}{d\tau} = d_1 yz + \nu_3, \quad \frac{dz}{d\tau} = -d_1 y^2 - \nu_2,$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = z\nu_2 - y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1 y\nu_3 - z\nu_1, \quad \frac{d\nu_3}{d\tau} = y\nu_1 - d_1 y\nu_2.$$

Эта система допускает первые интегралы:

$$\frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 = h, \quad y\nu_2 + z\nu_3 = k_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Параметры h, k_1, d_1 изменяются в пределах:

$$k_1 \in (-\infty, +\infty), \quad h \in [-1, +\infty), \quad d_1 \in (-1, 0].$$

Получение линейного дифференциального уравнения второго порядка

Покажем, как интегрирование системы (4) приводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка. Введем полярные координаты по формулам:

$$y = x\cos\varphi, \quad z = x\sin\varphi.$$

Тогда для определения величин σ и φ мы получим следующую систему уравнений:

$$x\frac{dx}{d\tau} = -\sqrt{x^2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)-k_1^2},$$

$$x^2\frac{d\varphi}{d\tau} = -d_1x^3\cos\varphi - k_1.$$

Из этой системы найдем зависимость $\varphi=\varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1x^3\cos\varphi + k_1}{x\sqrt{x^2\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-h\right)^2\right)-k_1^2}} \tag{5}$$

Теперь при помощи замены

$$w = \tan\frac{\varphi}{2}$$

уравнение (5) приводится к уравнению Риккати.

Получение линейного дифференциального уравнения второго порядка

Уравнение Риккати для функции $w=w(x)$ имеет вид:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{\left(d_1 x^3 - k_1\right)}{x\sqrt{4hx^4 - x^6 + 4\left(1-h^2\right)x^2 - 4k_1^2}}\, w^2 + \frac{\left(d_1 x^3 + k_1\right)}{x\sqrt{4hx^4 - x^6 + 4\left(1-h^2\right)x^2 - 4k_1^2}}$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно, что если уравнение Риккати имеет вид:

$$\frac{dw}{dx} = f_2(x)w^2 + f_1(x)w + f_0(x),$$

то замена переменных вида:

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x)w(x)dx\right)$$

приводит уравнение Риккати к линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left[\frac{1}{f_2}\frac{df_2}{dx} + f_1\right]\frac{du}{dx} + f_0 f_2 u = 0.$$

В нашем случае

$$f_2 = -\frac{\left(d_1 x^3 - k_1\right)}{x\sqrt{4hx^4 - x^6 + 4\left(1-h^2\right)x^2 - 4k_1^2}}, \quad f_1 = 0, \quad f_0 = \frac{\left(d_1 x^3 + k_1\right)}{x\sqrt{4hx^4 - x^6 + 4\left(1-h^2\right)x^2 - 4k_1^2}}.$$

Получение линейного дифференциального уравнения второго порядка

Окончательно, линейное дифференциальное уравнение второго порядка принимает вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+a(x)\frac{du}{dx}+b(x)u=0,$$

$$a(x)=\frac{d_1x^9-4k_1x^6+4d_1\left(1-h^2\right)x^5+12k_1hx^4-8k_1^2d_1x^3+8k_1\left(1-h^2\right)x^2-4k_1^3}{x\left(x^6-4hx^4-4\left(1-h^2\right)x^2+4k_1^2\right)\left(d_1x^3-k_1\right)},$$

$$b(x)=\frac{\left(d_1x^3+k_1\right)\left(d_1x^3-k_1\right)}{x^2\left(x^6-4hx^4-4\left(1-h^2\right)x^2+4k_1^2\right)}.$$

Таким образом, решение задачи о движении тяжелого тела с неподвижной точкой в случае Гесса сводится к исследованию линейного дифференциального уравнения второго порядка, записанного выше. Коэффициенты этого уравнения имеют вид рациональных функций. Следовательно, можно поставить задачу о существовании лиувиллевых решений у данного дифференциального уравнения. Для того, чтобы решить эту задачу, можно воспользоваться так называемым алгоритмом Ковачича.

Алгоритм Ковачича

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \qquad (1)$$

Если коэффициенты данного уравнения $a(x)$ и $b(x)$ являются рациональными функциями, зависящими от одной (в общем случае, комплексной) независимой переменной x, то можно найти решение данного уравнения, выражающееся через так называемые лиувиллевы функции, или доказать, что такого решения не существует. Процесс поиска решения происходит в соответствии с алгоритмом, предложенным в 1986 году американским математиком Дж. Ковачичем. Если на некотором шаге алгоритма мы приходим к противоречию, то у уравнения (1) нет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. Если нам удаётся осуществить все шаги алгоритма, то в результате мы получаем решение уравнения (1) в явном виде.

Лиувиллевы функции - I

Пусть **C(**x**)** – дифференциальное поле рациональных функций, зависящих от одной комплексной переменной x.

<u>Определение 1.</u> Функция η(x) называется алгебраической над **C(**x**)**, если она является решением полиномиального уравнения любой конечной степени, коэффициенты которого являются функциями, принадлежащими **C(**x**).**

<u>Определение 2.</u> Функция η(x) называется примитивной над **C(**x**)**, если её производная $\eta' \in \mathbf{C}(x)$, то есть $\eta = \int f dx$, для некоторой функции $f \in \mathbf{C}(x)$.

<u>Определение 3.</u> Функция η(x) называется экспоненциальной над **C(**x**)**, если $\eta'/\eta \in \mathbf{C}(x)$, то есть $\eta = \exp\left(\int f dx\right)$, для некоторой функции $f \in \mathbf{C}(x)$.

Лиувиллевы функции - II

Определение 4. Про функция $\eta(x)$ говорят, что она является лиувиллевой функцией, если $\eta(x)$ принадлежит множеству $G = G_m$, определяемому формулой

$$\mathbf{C}(x) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_m = G,$$

для любого конечного i=1,...,m и $G_i = G_{i-1}\left(\eta_i\right)$, где η_i - алгебраическая, примитивная или экспоненциальная функция над G_{i-1}

Таким образом, лиувиллевы функции – это такие функции, которые могут быть получены при помощи конечного числа следующих действий над рациональными функциями: выполнение алгебраических операций, вычисление неопределённого интеграла и нахождение экспоненты от неопределенного интеграла.

Приведение уравнения к заданной форме

При помощи замены переменных

$$z = \exp\left(\frac{1}{2}\int a dx\right) y$$

исходное уравнение (1)

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

приводится к виду

$$z'' = \left(\frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b\right) z, \quad \text{то есть}$$

$$z'' = r(x) z, \quad r(x) \in \mathbf{C}(x), \quad r(x) \notin \mathbf{C}. \qquad (2)$$

Группа Галуа данного дифференциального уравнения всегда является подгруппой $SL_{\mathbf{C}}(2)$. Однако, все нормальные подгруппы конечного индекса группы $SL_{\mathbf{C}}(2)$ были описаны в классических работах Ф. Клейна, К.Жордана и Л. Фукса. В зависимости от того, с какой из подгрупп группы $SL_{\mathbf{C}}(2)$ совпадает группа Галуа дифференциального уравнения (2), можно выделить 4 случая.

Описание решений

Теорема. Пусть $y'' = r(x)\,y, \quad r(x) \in \mathbf{C}(x), \quad r(x) \notin \mathbf{C}$ - заданное дифференциальное уравнение. Тогда имеет место один из следующих четырёх случаев:

Случай 1. Уравнение имеет решение $\exp\left(\int \omega\, dx\right)$, где $\omega(x) \in \mathbf{C}(x)$.

Случай 2. Уравнение имеет решение $\exp\left(\int \omega\, dx\right)$, где $\omega(x)$ - функция, являющаяся решением алгебраического уравнения степени 2 и случай 1 не имеет места.

Случай 3. Все решения данного дифференциального уравнения являются алгебраическими функциями над $\mathbf{C}(x)$ и случаи 1 и 2 не имеют места. В этом случае уравнение имеет решение $\exp\left(\int \omega\, dx\right)$ и $\omega(x)$ - функция, удовлетворяющая алгебраическому уравнению степени 4, 6 или 12 над $\mathbf{C}(x)$

Случай 4. Заданное уравнение не имеет лиувиллевых решений. Это возможно, только если ни один из случаев 1, 2 и 3 не имеет места.

Необходимые условия – случаи 1 и 2

Принадлежность решения к одному из четырёх случаев существенно определяется характером полюсов функции $r(x)$.

Теорема. Для того, чтобы имел место один из перечисленных выше случаев, должны выполняться следующие необходимые условия.

Случай 1. Каждый полюс функции $r(x)$ должен иметь чётный порядок или, иначе, порядок 1. Порядок функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ должен быть четным или, иначе, должен быть больше, чем 2.

Случай 2. Функция $r(x)$ должна иметь хотя бы один полюс нечётного порядка, большего, чем 2 или, иначе, хотя бы один полюс порядка 2.

Необходимые условия – случай 3

<u>Случай 3.</u> Порядок полюса функции $r(x)$ не может превосходить 2, а порядок полюса этой функции в точке $x=\infty$ должен быть не меньше 2. Если разложение на простые дроби функции $r(x)$ имеет вид:

$$r=\sum_i \frac{\alpha_i}{\left(x-c_i\right)^2}+\sum_j \frac{\beta_j}{x-d_j},$$

то для коэффициентов α_i и β_j должны выполняться условия:

Для любого *i* имеем: $\sqrt{1+4\alpha_i} \in \square$ и $\sum_j \beta_j = 0$.

Если $\gamma=\sum_i \alpha_i+\sum_j \beta_j d_j,$ то $\sqrt{1+4\gamma} \in \square$

Описание алгоритма в случае 1 - I

Наша задача – найти решение уравнения (1), имеющее вид $\eta = P(x)\exp\left(\int \omega\, dx\right)$, где $P(x)$ – многочлен, а $\omega(x)$ - рациональная функция над $\mathbf{C}(x)$. Обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $r(x)$.

<u>Шаг 1.</u> Для каждого полюса $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $\left[\sqrt{r}\,\right]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- по правилам, описанным ниже:

(c_1) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка 1, то

$$\left[\sqrt{r}\,\right]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка 2, то

$$\left[\sqrt{r}\,\right]_c = 0$$

Пусть b – коэффициент при $1/(x-c)^2$ в разложении функции $r(x)$ на простые дроби. Тогда

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}$$

Описание алгоритма в случае 1 - II

(c_3) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка $2\nu \ge 4$, то

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \cdots + \frac{d}{(x-c)^2}$$

Пусть b – коэффициент при $1/(x-c)^{\nu+1}$ у функции $r - \left[\sqrt{r}\right]_c^2$.
Тогда:

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + \nu\right).$$

(∞_1) Если порядок $r(x)$ в бесконечности >2, то

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

(∞_2) Если порядок $r(x)$ в бесконечности =2, то

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0$$

Описание алгоритма в случае 1 - III

Пусть b – коэффициент при $1/x^2$ в разложении функции $r(x)$ в ряд Лорана в точке $x=\infty$. Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}$$

(∞_3) Если порядок $r(x)$ в бесконечности равен $-2\nu \le 0$, то

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = ax^\nu + \cdots + d$$

Пусть b – коэффициент при $x^{\nu-1}$ у функции $r-\left[\sqrt{r}\right]_\infty^2$. Тогда:

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a}-\nu\right).$$

Описание алгоритма в случае 1 - IV

<u>Шаг 2.</u> Для каждого набора знаков $s=\left(s(c),s(\infty)\right),\left(c\in\Gamma\right)$ где $s(c)$ и $s(\infty)$ равны, соответственно, + или - , определяем постоянную

$$d=\alpha_{\infty}^{s(\infty)}-\sum_{c\in\Gamma}\alpha_{c}^{s(c)}.$$

Если d – неотрицательное целое число, то в качестве $\omega(x)$ попробуем взять

$$\omega=\sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)\left[\sqrt{r}\right]_{c}+\frac{\alpha_{c}^{s(c)}}{x-c}\right)+s(\infty)\left[\sqrt{r}\right]_{\infty}$$

При любом другом d семейство $s=\left(s(c),s(\infty)\right),\left(c\in\Gamma\right)$ должно быть отброшено.

<u>Шаг 3.</u> Для каждого неотрицательного d полином $P(x)$ степени d, удовлетворяющий уравнению

$$P''+2\omega P'+\left(\omega'-\omega^{2}-r\right)P=0.$$

Если такой полином удаётся найти, то $\eta=P(x)\exp\left(\int\omega\ dx\right)$ - решение данного уравнения. Если нет, то случай 1 не имеет места.

Описание алгоритма в случае 2 - I

Обозначим через Г множество конечных полюсов функции $r(x)$.

<u>Шаг 1.</u> Для каждого полюса $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим множества E_c по правилам, описанным ниже:

(c_1) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка 1, то

$$E_c = \{4\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка 2, и b – коэффициент при $1/(x-c)^2$ в разложении функции $r(x)$ на простые дроби. Тогда

$$E_c = \left\{2 + k\sqrt{1+4b}\right\} \cap \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 2$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ - полюс порядка $\nu > 2$, то

$$E_c = \{\nu\}$$

(∞_1) Если порядок $r(x)$ в бесконечности >2, то

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}$$

Описание алгоритма в случае 2 - II

(∞_2) Если порядок $r(x)$ в бесконечности =2, и b – коэффициент при $1/x^2$ в разложении функции $r(x)$ в ряд Лорана в точке $x=\infty$. Тогда

$$E_\infty = \left\{2 + k\sqrt{1+4b}\right\} \cap \mathbb{Z},\quad k = 0, \pm 2$$

(∞_3) Если порядок $r(x)$ в бесконечности равен $\nu < 2$, то

$$E_\infty = \{\nu\}$$

<u>Шаг 2.</u> Рассмотрим семейства $s = \big(e(c), e(\infty)\big), (c \in \Gamma)$ где $e(c) \in E_c$ и хотя бы один из этих элементов является нечетным. Определим постоянную d по формуле:

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right)$$

Если d – неотрицательное целое число, семейство s сохраняется, в противном случае – отбрасывается.

Описание алгоритма в случае 2 - III

Шаг 3. Для каждого сохранённого на шаге 2 семейства s определим рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c},$$

и ищем полином полином $P(x)$ степени d, удовлетворяющий уравнению

$$P''' + 3\theta P'' + \left(3\theta^2 + 3\theta' - 4r\right)P' + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'\right)P = 0.$$

Если такой полином удаётся найти, то положим $\varphi = \theta + P'/P$ и пусть $\omega(x)$ обозначает решение квадратного уравнения:

$$\omega^2 - \varphi\omega + \left(\frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r\right) = 0$$

Решение исходного дифференциального уравнения имеет в таком случае вид: $\eta = \exp\left(\int \omega\ dx\right)$. Если полином P найти не удалось, то случай 2 не имеет места.

Результаты

Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса приводит к следующим результатам.

Теорема. В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют только лиувиллевы решения типа 2. Эти решения существуют, если выполнено одно из двух условий: $d_1 = 0$ (твердое тело является волчком Лагранжа) или $k_1 = 0$ (постоянная интеграла площадей равна нулю).

Спасибо за внимание!