

Конструктивный взгляд на квантовую механику:  
модели, основанные на конечных группах  
Семинар «Компьютерная Алгебра» ВМК МГУ, Москва  
28 декабря 2016 г.

Владимир Корняк

Лаборатория Информационных Технологий  
Объединённый Институт Ядерных Исследований  
Дубна, Россия

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Квантовая механика. Чистые состояния

① **Чистое состояние** = луч в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  над  $\mathbb{C}$

▶ **луч** = класс эквивалентности:  $\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \sim a|\psi\rangle, 0 \neq a \in \mathbb{C}$

**нормализация**  $\rightarrow$  подкласс:  $\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow |\psi\rangle \sim e^{i\alpha}|\psi\rangle, \alpha \in \mathbb{R}$

$e^{i\alpha}$  можно убрать заменив  $|\psi\rangle$  проектором  $\Pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$

▶ **ортонормальный базис** в  $\mathcal{H}$ :  $\{e_1, \dots, e_N\}, \langle e_k | e_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$

▶ **проектор**  $\Pi_{e_k} = |e_k\rangle\langle e_k|$  — детектор в физике

$$\Pi_{e_k} \Pi_{e_{k'}} = \delta_{kk'} \Pi_{e_k} \quad \Pi_{e_k} = \Pi_{e_k}^\dagger \quad \sum_k \Pi_{e_k} = \mathbb{1}$$

▶ **Состояния составной системы**:  $\mathcal{H}_{XY} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$

② **Матрица плотности**:  $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  для чистого состояния  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

# Квантовая механика. Наблюдение и измерение

- ① **Наблюдение** = срабатывание детектора  $\Pi_{e_k}$  при состоянии  $|\psi\rangle$   
Вероятность срабатывания — **правило Борна**

$$P_{e_k}(\psi) = |\langle e_k | \psi \rangle|^2 \equiv \langle \psi | \Pi_{e_k} | \psi \rangle \equiv \text{tr}(\Pi_{\psi} \Pi_{e_k})$$

более общо

$$P_{e_k}(\rho) = \text{tr}(\rho \Pi_{e_k})$$

Теорема Глисона  $\implies$  единственность правила Борна

- ② **Измерение** = наблюдение состояния  $|\psi\rangle$  в базисе **наблюдаемой** — эрмитова оператора  $A = A^\dagger = \sum_k a_k \Pi_{e_k}$

- ▶  $e_1, \dots, e_N$  — ортонормальный базис собственных векторов  $A$
- ▶  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$  — **спектр** наблюдаемой  $A$
- ▶  $a_k$  — **результат измерения** при срабатывании детектора  $\Pi_{e_k}$
- ▶ **Среднее значение** наблюдаемой  $A$  в состоянии  $|\psi\rangle$

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_k a_k \langle \psi | \Pi_{e_k} | \psi \rangle = \sum_k a_k P_{e_k}(\psi) = \text{tr}(\rho A)$$

# Квантовая механика. Смешанные состояния

## 1. Состояния подсистемы $X$ составной системы $XY$

Гильбертовы пространства и ортонормальные базисы

$$\mathcal{H}_X, \{|x\rangle\} \otimes \mathcal{H}_Y, \{|y\rangle\} \longrightarrow \mathcal{H}_{XY} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y, \{|x \otimes y\rangle\}$$

Чистое состояние в  $\mathcal{H}_{XY}$ :  $|\psi\rangle = \sum_{xy} \alpha_{xy} |x\rangle \otimes |y\rangle \quad \sum_{xy} |\alpha_{xy}|^2 = 1$

Наблюдаемая  $A_X$  в  $\mathcal{H}_X$ :  $A_X \xrightarrow{x \rightarrow xy} A_X \otimes \mathbb{1}_Y$

Среднее значение:

$$\langle A_X \rangle = \langle \psi | A_X \otimes \mathbb{1}_Y | \psi \rangle = \sum_{x'y'} \alpha_{x'y'}^* (\langle x' | \otimes \langle y' |) (A_X \otimes \mathbb{1}_Y) \sum_{xy} \alpha_{xy} (|x\rangle \otimes |y\rangle)$$

матричное умножение произведений Кронекера

$$(A \otimes B) (A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$$

$$\longrightarrow = \sum_{x'xy} \alpha_{x'y}^* \alpha_{xy} \langle x' | A_X | x \rangle = \text{tr}(\rho_X A_X)$$

Матрица плотности для  $X$ :  $\rho_X = \text{tr}_Y (|\psi\rangle\langle\psi|) \equiv \sum_{x'xy} \alpha_{x'y}^* \alpha_{xy} |x\rangle\langle x'|$

## 2. Определение общей матрицы плотности $\rho$ :

$$\rho = \rho^\dagger \quad \langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi \quad \text{tr}(\rho) = 1 \quad \implies \quad \rho \simeq \text{diag} \{p_1, p_2, \dots\}$$

$p_1, p_2, \dots$  — распределение вероятностей в ансамбле чистых состояний

Смешанное в чистое:  $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |x_i\rangle \otimes |y_i\rangle \in \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$  — “purification”

John A. Smolin: “The Church of the larger Hilbert space”

- 1 **Эволюция** = унитарное преобразование данных между наблюдениями в моменты времени  $t$  и  $t'$

▶  $|\psi_{t'}\rangle = U_{t't} |\psi_t\rangle$     вектор состояния

▶  $\rho_{t'} = U_{t't} \rho_t U_{t't}^\dagger$     матрица плотности

$|\psi_t\rangle$  или  $\rho_t$  — состояние **после** наблюдения в момент  $t$

$|\psi_{t'}\rangle$  или  $\rho_{t'}$  — состояние **перед** наблюдением в момент  $t'$

Континуальное приближение  $\rightarrow$  уравнение Шрёдингера

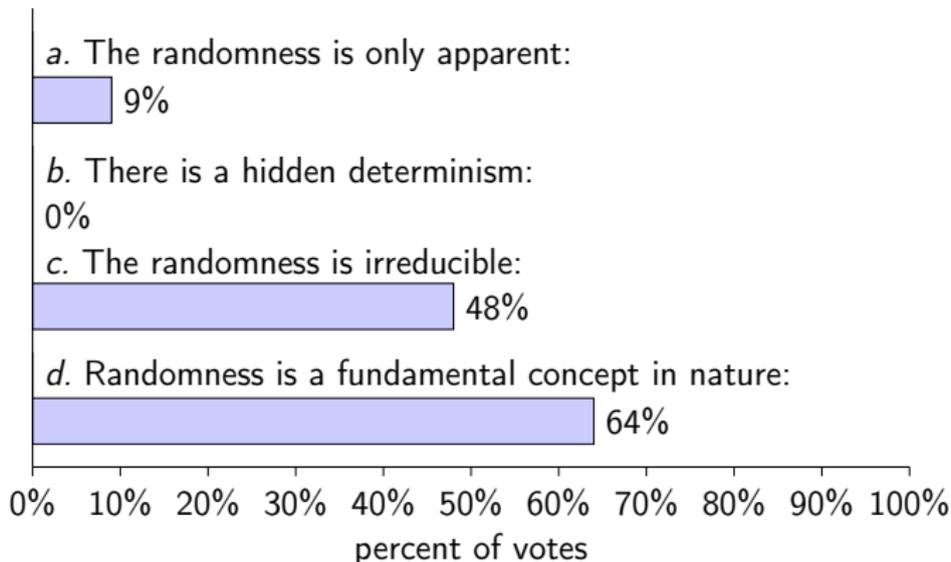
# Физики верят в фундаментальную природу квантовой случайности

M. Schlosshauer, J. Kofler, A. Zeilinger<sup>1</sup>

A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics

Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. **44**, 222-230 (2013)

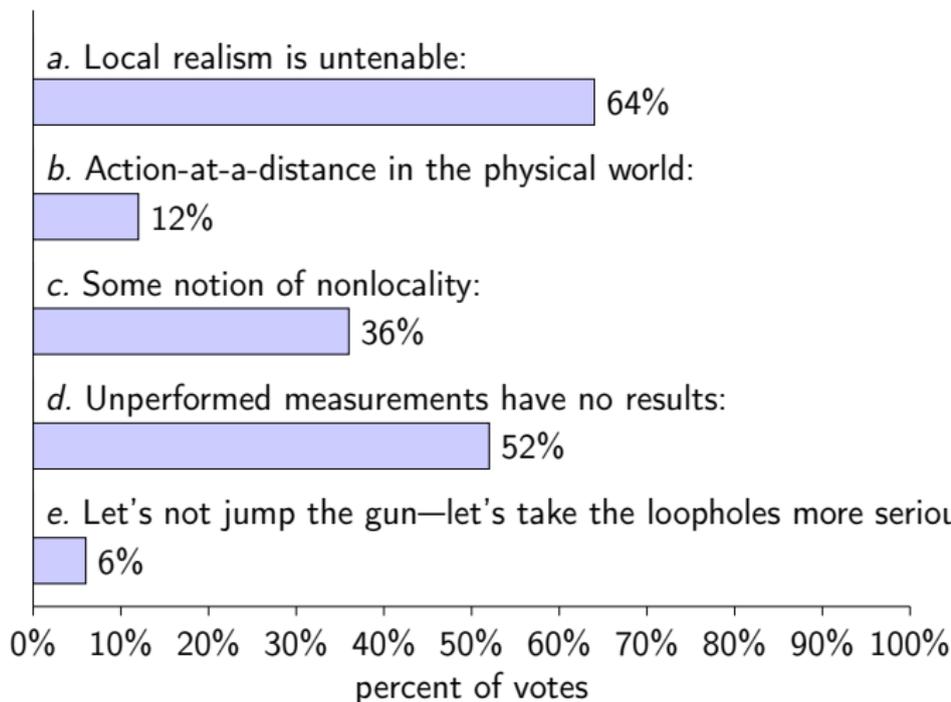
Question 1: What is your opinion about the randomness of individual quantum events (such as the decay of a radioactive atom)?



<sup>1</sup>Антон Цайлингер (Австрия) — впервые осуществил квантовую телепортацию

## Физики не верят в “локальный реализм”

Question 6: What is the message of the observed violations of Bell's inequalities?



# “Эпистемологический” взгляд на квантовое поведение

Пример: модель Спеккенса (Robert W. Spekkens, 2004)

“онтические” состояния $\Omega$	$\mapsto$	“эпистемические” состояния
симметрии $\text{Sym}(\Omega)$		описываются лучами в $\mathcal{H}$
полная информация недоступна		симметрии $\text{Aut}(\mathcal{H})$
		частичная информация извлекается из проекций в подпространства $\mathcal{H}$

Нужно конкретизировать отображение состояний:  $\Omega \mapsto \mathcal{H}$

в модели Спеккенса надуманный **knowledge balance principle**:

“... for every system, at every time, the amount of knowledge one possesses about the ontic state of the system at that time must equal the amount of knowledge one lacks”

Наше предположение о “потере онтической информации”:

квантовая случайность возникает из-за фундаментальной невозможности проследить идентичность неразличимых объектов в процессе эволюции — в наблюдениях доступны только инвариантные соотношения

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация**
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Убрать бесконечность

поскольку "... **бесконечное нигде не реализуется**. Его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления ..." (Д. Гильберт)

- Формально

$U(n)$  эмпирически эквивалентна конечной группе  $G$

- ▶  $U(n) \cong \text{Aut}(\mathcal{H}_n)$

- ▶  $U(n) \xrightarrow{\text{используя универсальный набор квантовых вентилях строим плотную в } U(n) \text{ конечно порождённую матричную группу}} G_\infty$

- ▶  $G_\infty \xrightarrow{\text{по теореме Мальцева } G_\infty \text{ остаточна конечна } \implies \text{богатый набор гомоморфизмов в конечные группы}} G$

- По существу

естественно предположить, что на **фундаментальном уровне** работают **конечные группы**, а унитарные группы  $U(n)$  — это лишь непрерывные аппроксимации унитарных представлений конечных групп

- Преимущества конечных групп

- ▶ любая конечная группа — подгруппа **симметрической группы**
- ▶ любое линейное представление конечной группы
  - ★ **унитарно**
  - ★ подпредставление некоторого **перестановочного представления**

Потери от введения континуума: классификация простых групп непрерывных (2 человека за ~6 лет) конечных (~100 человек за ~170 лет)

Группы Ли	Конечные группы ("enormous theorem")
4 бесконечных ряда +5 исключительных	16 + 1 + 1 бесконечных рядов + 26 спорадических групп
$A_n, B_n, C_n, D_n$ $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$	$A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), G_2(q)$ - Шевалле ${}^2A_n(q^2), {}^2D_n(q^2), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3)$ - Стайнберг; ${}^2B_n(2^{2n+1})$ - Судзуки ${}^2F_4(2^{2n+1})$ - Ри, Титс; ${}^2G_2(3^{2n+1})$ - Ри
	$\mathbb{Z}_p$ - циклическая $\text{Alt}(n)$ - важная, $S_n/\text{Alt}(n) \cong \mathbb{Z}_2$ , но нет непрерывных аналогов!
	$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ - Матьё: единственные нетривиальные кратно (4- и 5-) транзитивные группы перестановок $J_1, J_2, J_3, J_4$ - Янко; $Co_1, Co_2, Co_3$ - Конвей; $Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}$ - Фишер $HS$ - Хигман-Симс; $McL$ - МакЛафлин; $He$ - Хельд; $Ru$ - Рюдвалис $Suz$ - Судзуки; $O'N$ - О'Нан; $HN$ - Харада-Нортон; $Ly$ - Лайонс $Th$ - Томпсон; $B$ - "маленький монстр" $M$ — монстр Фишера-Грисса — наибольшая спорадическая $ M  \sim 10^{54}$ содержит остальные спорадические — как подгруппы или подфакторы — за исключением 6 парий: $J_1, J_3, J_4, Ru, O'N, Ly$

# “Физические” числа

- ① натуральные числа  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  — “счётчики”
- ② корни из единицы  $r_k \mid r_k^k = 1$  — “периодические процессы”

достаточно для построения всех физически значимых чисел:

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N}[r_2]$  — расширение полукольца  $\mathbb{N}$   
примитивным корнем из единицы 2-й степени  $r_2 = \underbrace{e^{2\pi i/2}}_{\text{тождество Эйлера}} = -1$
- $\mathbb{Q}(r_k)$  — поле частных кольца  $\mathbb{N}[r_k]$   
если  $k \geq 3$ , то  $\mathbb{Q}(r_k)$  — плотное подполе поля комплексных чисел  $\mathbb{C}$

# Конструктивные представления конечной группы $G$

- **модуль** над **полукольцом**  $\mathbb{N}$ :  $H = \mathbb{N}^N$ 
  - ▶  $N = |\Omega|$
  - ▶  $\Omega$  — множество на котором  $G$  действует **перестановками**
- **Гильбертово пространство**:  $H \xrightarrow{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}(r_k)} \mathcal{H}$ 
  - ▶  $H$  — **главный ортант** в  $\mathbb{Z}^N \subset \mathcal{H}$
  - ▶  $k$  — некоторый делитель **экспоненты** группы  $G$
  - ▶  $r_k$  — **примитивный корень**  $k$ -й степени из единицы

Любое конструктивное представление  $G$  можно получить как проекцию **перестановочного представления**  $G$  в модуле  $H$  на некоторое подпространство гильбертова пространства  $\mathcal{H}$

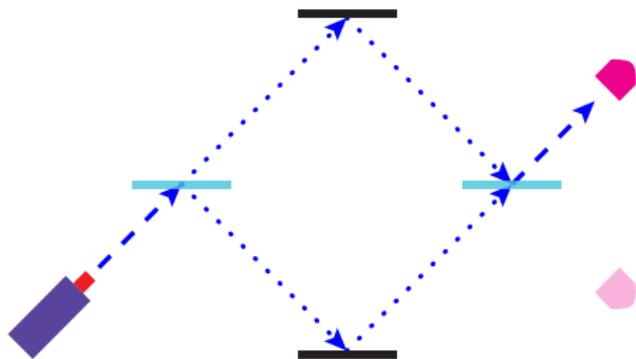
# Интерферометр Маха–Цендера

Разделитель луча  $S$ : 
$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + i|\searrow\rangle) \\ |\searrow\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\searrow\rangle + i|\nearrow\rangle) \end{aligned} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Зеркало  $M$ : 
$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &\rightarrow i|\searrow\rangle \\ |\searrow\rangle &\rightarrow i|\nearrow\rangle \end{aligned} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad M = S^2$$

$S$  порождает группу  $\mathbb{Z}_8$

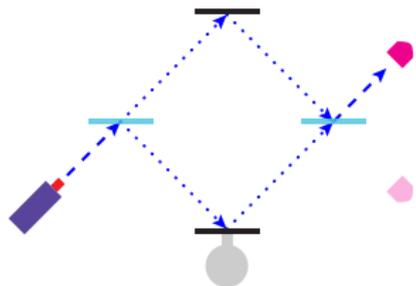
Схема



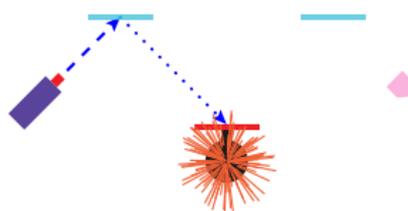
реализует эволюцию  $SMS|\nearrow\rangle = S^4|\nearrow\rangle = -|\nearrow\rangle$

Небольшая модификация интерферометра Маха–Цендера позволяет реализовать любой унитарный оператор: A.Zeilinger et al

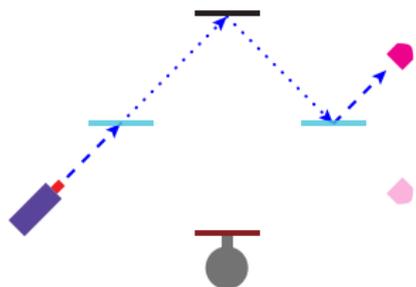
# Измерение без взаимодействия: проверка бомб (Elitzur-Vaidman-Penrose)



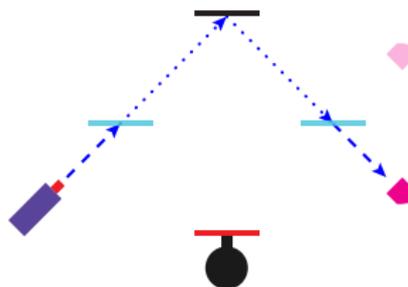
$|\nearrow\rangle \xrightarrow{SMS} -|\nearrow\rangle$   $P = 1$   
 проверка **дефектной** бомбы



$|\nearrow\rangle \xrightarrow{\Pi \searrow S} \frac{i}{\sqrt{2}} |\searrow\rangle$   $P = \frac{1}{2}$   
 взрыв **качественной** бомбы



$|\nearrow\rangle \xrightarrow{\Pi \nearrow S M \Pi \nearrow S} -\frac{1}{2} |\nearrow\rangle$   $P = \frac{1}{4}$   
 бомба остаётся **непроверенной**

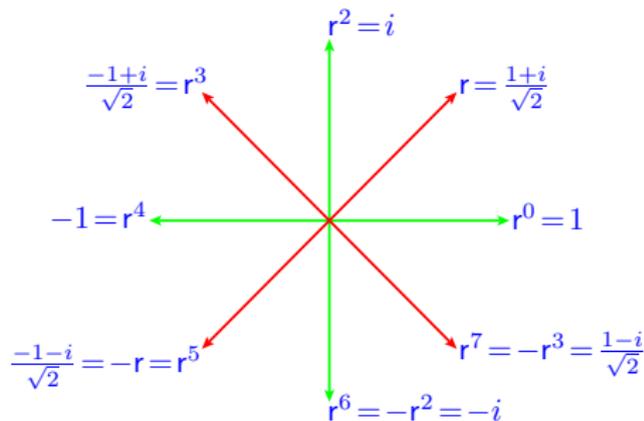


$|\nearrow\rangle \xrightarrow{\Pi \searrow S M \Pi \nearrow S} \frac{i}{2} |\searrow\rangle$   $P = \frac{1}{4}$   
 качественная бомба **сохраняется**

Эксперимент: P.G.Kwait, H.Weinfurter, N.Herzog, **A.Zeilinger**, M.A.Kasevich

# Интерферометр Маха–Цендера и группа $\mathbb{Z}_8$ I

- “Зеркало” = квадрат “разделителя”:  $M = S^2$
- $S$  порождает циклическую группу  $\mathbb{Z}_8$ 
  - ▶ Циклотомический полином  $\Phi_8(r) = 1 + r^4$
  - ▶ **примитивные** и **непримитивные** корни из единицы



- ▶ минимальная степень **точной** реализации  $\mathbb{Z}_8$  перестановками = 8

# Интерферометр Маха–Цендера и группа $\mathbb{Z}_8$ II

- погружение в перестановки

- ▶  $S \longleftrightarrow g = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$
- ▶ представление в 8-мерном модуле натуральных векторов  $\mathbb{N}^8$   
 $N = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8)^T \in \mathbb{N}^8$
- ▶ преобразование подобия:

$$\begin{array}{ccc}
 P(g) & \longrightarrow & S(g) = Q^{-1}P(g)Q \\
 \parallel & & \parallel \\
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
 \cdot & 1 \\
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[ \begin{array}{cccc}
 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & A & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \underbrace{\left[ \begin{array}{cc}
 \frac{r-r^3}{2} & \frac{r+r^3}{2} \\
 \frac{r+r^3}{2} & \frac{r-r^3}{2}
 \end{array} \right]}_{\text{разделитель } S} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$r$  — примитивный корень 8-й степени из единицы

$$A = \text{diag}(-1, r^2, -r^2, r^3, -r)$$

# Интерферометр Маха–Цендера и группа $\mathbb{Z}_8$ III

- **квантовая амплитуда** как проекция натурального вектора  $N$  в подпространство “разделителя”

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} -r^3(n_1 + n_3 - n_5 - n_7) + (1 - r^2)(n_2 - n_6) \\ r(n_1 - n_3 - n_5 + n_7) + (1 + r^2)(-n_4 + n_8) \end{bmatrix}$$

$$\|\psi\|^2 = A^2 + B^2$$

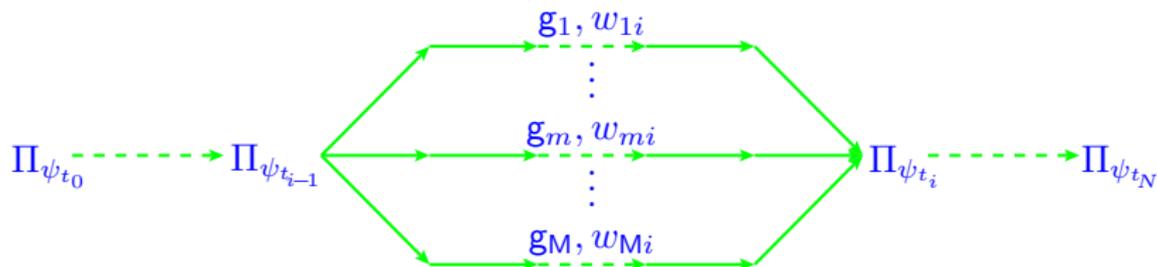
$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\|\psi\|^2} = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} A^2 & -iAB \\ iAB & B^2 \end{pmatrix}$$

$$A = n_1 + n_3 - n_5 - n_7 + \sqrt{2}(n_2 - n_6) \equiv z_1 + z_2\sqrt{2}$$

$$B = n_1 - n_3 - n_5 + n_7 - \sqrt{2}(n_4 - n_8) \equiv z_3 + z_4\sqrt{2}$$

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции**
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Схема квантовой эволюции



- $t_i$  — время наблюдения
- $\Pi_{\psi_{t_i}} = |\psi_{t_i}\rangle\langle\psi_{t_i}|$  — проектор в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$
- $G = \{g_1, \dots, g_M\}$  — калибровочная группа с представлением  $U$  в  $\mathcal{H}$
- $g_m \in G$  — калибровочная связность  
= параллельный перенос  
= способ отождествления неразличимых объектов при переходе от  $t_{i-1}$  к  $t_i$
- $w_{mi} \geq 0$  — вес связности  $g_m$  при переходе  $t_{i-1} \rightarrow t_i$

# Специфика стандартной квантовой механики

единственная унитарная эволюция между наблюдениями

$$a \in G, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad \gamma_j = a^{\Delta t_j}$$

$$U = U(\gamma_j) \xrightarrow{\text{Гамильтониан } H = i \ln U(a)} U = e^{-iH\Delta t_j}$$

Наше предположение

выделенная унитарная эволюция — доминантный элемент  
в множестве всех возможных калибровочных связностей

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение**
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Принцип отбора наиболее вероятных траекторий и принцип наименьшего действия

- одношаговая вероятность

$$P_{\psi_{t_{i-1}} \rightarrow \psi_{t_i}} = \sum_{k=1}^{K_i} w_{ki} \operatorname{tr} \left( \Pi_{\varphi_{ki}} \Pi_{\psi_{t_i}} \right) \quad \varphi_{ki} = U(\gamma_{ki}) \psi_{t_{i-1}}$$

- вероятность траектории

$$P_{\psi_{t_0} \rightarrow \dots \rightarrow \psi_{t_N}} = \prod_{i=1}^N P_{\psi_{t_{i-1}} \rightarrow \psi_{t_i}}$$

- одношаговая энтропия

$$\Delta S_{\psi_{t_{i-1}} \rightarrow \psi_{t_i}} = -\log P_{\psi_{t_{i-1}} \rightarrow \psi_{t_i}}$$

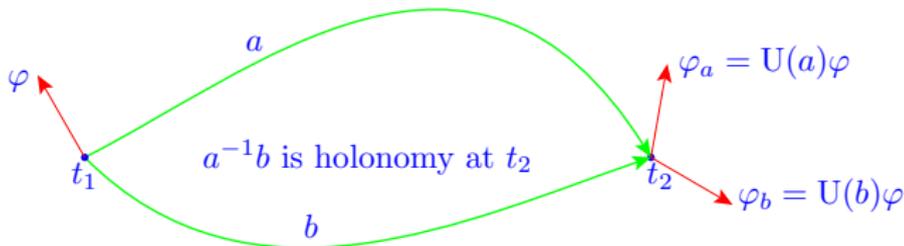
континуальный предел  $\rightarrow$  лагранжиан  $\mathcal{L}$

- энтропия траектории

$$S_{\psi_{t_0} \rightarrow \dots \rightarrow \psi_{t_N}} = \sum_{i=1}^N \Delta S_{\psi_{t_{i-1}} \rightarrow \psi_{t_i}}$$

континуальный предел  $\rightarrow$  действие  $S = \int \mathcal{L} dt$

# Кривизна калибровочной связности в континуальном приближении и инфинитезимальная голономия и квантовая неопределённость



$$\langle \varphi_a | \varphi_b \rangle = \langle \varphi | U(a^{-1}b) | \varphi \rangle \xrightarrow{\text{приближение алгебры Ли}} \approx \langle \varphi | \mathbb{1} + iF | \varphi \rangle = 1 + i \langle \varphi | F | \varphi \rangle$$

$$\text{нормализация: } \|(\mathbb{1} + iF)\varphi\|^2 = \langle \varphi | (\mathbb{1} - iF)(\mathbb{1} + iF) | \varphi \rangle = 1 + \langle \varphi | F^2 | \varphi \rangle$$

Вероятность:

$$P_{t_1 \rightarrow t_2} \approx \frac{1 + \langle \varphi | F | \varphi \rangle^2}{1 + \langle \varphi | F^2 | \varphi \rangle} \xrightarrow{\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon} \approx 1 - \langle \varphi | F^2 | \varphi \rangle + \langle \varphi | F | \varphi \rangle^2$$

Энтропия:

$$\Delta S_{t_1 \rightarrow t_2} = -\ln P_{t_1 \rightarrow t_2} \xrightarrow{\ln(1+\varepsilon) \approx -\varepsilon} \approx \langle \varphi | F^2 | \varphi \rangle - \langle \varphi | F | \varphi \rangle^2 \equiv (\Delta_\varphi F)^2$$

$\Delta_\varphi F$  — стандартное отклонение

$(\Delta_\varphi F)^2$  — дисперсия

# Континуальный предел схемы квантовой эволюции

- Унитарный переход между  $i-1$ -м и  $i$ -м наблюдениями в линейном по времени и лиевском приближении:

$$U_i \approx \mathbb{1} + i(F_i - F_{i-1}) \approx \mathbb{1} + i\dot{F}_i \Delta t$$

- Состояние перед  $i$ -м наблюдением:

$$|\varphi_i\rangle \approx |\psi_{i-1}\rangle + i\dot{F}_i |\psi_{i-1}\rangle \Delta t$$

- Лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \approx & \langle \psi | \dot{F}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \dot{F} | \psi \rangle^2 \longleftrightarrow \boxed{\text{дисперсия } \dot{F} \text{ в состоянии } \psi} \\ & - i \left( \langle \dot{\psi} | \dot{F} | \psi \rangle - \langle \psi | \dot{F} | \dot{\psi} \rangle + 2 \langle \psi | \dot{F} | \psi \rangle \langle \psi | \dot{\psi} \rangle \right) \\ & - \langle \psi | \dot{\psi} \rangle^2 \end{aligned}$$

Решение уравнений Лагранжа  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$  для случая  $SU(2)$

$iF =$  элемент алгебры Ли

$$F = X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицы Паули

$$|\psi\rangle = |\varphi, \theta\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + (\cos\varphi + i\sin\varphi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle \quad \text{— вектор состояния}$$

$$\dot{X} = G(t)$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{2\cos\varphi} \left( \pm \sqrt{B - \frac{A^2}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}} + 2G(t)\sin\varphi \right)$$

$$\dot{Z} = \frac{\sin\varphi\cos\theta}{2\cos\varphi\sin\theta} \left( \pm \sqrt{B - \frac{A^2}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}} + \frac{2G(t)}{\sin\varphi} \right) - \frac{A}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

$$\dot{\theta} = \mp \sqrt{B - \frac{A^2}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}}$$

компьютерно-алгебраическое наблюдение:  
превосходство SymPy над Maple в вырази-  
тельности, удобстве программирования и  
качестве результатов вычислений

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации**
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Непрерывные симметрии как аппроксимации I

- Группа **целочисленной решётки**  $\mathbb{Z}^d$ :  
 $\text{Aut}(\mathbb{Z}^d) \cong \mathbb{Z}^d \rtimes G_d \quad G_d \cong (\mathbb{Z}_2)^d \rtimes S_d \equiv \mathbb{Z}_2 \wr S_d$
- **Симметричное блуждание** на  $\mathbb{Z}^d$  в непрерывном пределе:  
биномиальное распределение  $\xrightarrow[\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}]{\text{приближение Стирлинга}}$   
распределение Гаусса  $\longrightarrow$  произведение одномерных распределений  $\longrightarrow$  **ядро оператора теплопроводности**

$$K(t, \vec{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}{4t}\right)$$

$$t \in \mathbb{R}_{>0} \quad x_j \in \mathbb{R}$$

- **Группа пространственных симметрий** ядра  $K(t, \vec{x})$   
 $\mathbb{R}^d \rtimes O(d, \mathbb{R})$  — группа Евклида = полупрямое произведение трансляций и вращений

## Непрерывные симметрии как аппроксимации II

- Асимметричное блуждание на  $\mathbb{Z}$

$k_+, k_-$  — числа шагов “вправо” и “влево”

$T = k_+ + k_-$  — полное число шагов

$p_+, p_-$  — вероятности:  $p_+ + p_- = 1$

Погружение в непрерывные переменные  $x, t, v \in \mathbb{R}$ :

$x := k_+ - k_-$        $t := T$        $v := p_+ - p_-$  ( $-1 \leq v \leq 1$ )

“Скорость дрейфа”  $v$  удовлетворяет релятивистскому правилу сложения скоростей:  $w = (u + v) / (1 + uv)$  (К.Н.Knuth, 2015)

- Непрерывная аппроксимация биномиального распределения

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-v^2)t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right\}$$

уравнение теплопроводности или диффузии или Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{(1-v^2)}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

# Непрерывные симметрии как аппроксимации III

- Аппроксимация относительно “**времени Хаббла**”  $T_H$ :  $t' \ll T_H$   
Подстановки  $t = T_H + t'$  и  $x = vT_H + x'$



$$P(x', t') = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \exp \left\{ -\pi \frac{m^2}{4} \left( \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right\} + O\left(\frac{t'}{T_H}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{2}{\pi T_H}}$$

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания**
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме



# “Entanglement builds Geometry” II

Как обнаружить геометрию в гильбертовом пространстве

③ **Расстояние**  $d(x, y) = \min_p \sum_{i=0}^{k-1} w(p_i, p_{i+1})$

$p = (p_0 = x, p_1, p_2, \dots, p_k = y)$  — путь между точками  $x$  и  $y$   
{*неравенство треугольника*}  $\wedge$  { $d(x, y) = d(y, x)$ }  
 $\wedge$  { $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ }  $\implies$  **метрика**

④ **Приближение** графа с метрикой **гладким многообразием** небольшой (по возможности) размерности

- ▶ **Задача:** погрузить изометрически (с заданной погрешностью)  $N$  точек с данными попарными расстояниями в гладкое метрическое многообразие размерности  $D \ll N$  определённого типа
- ▶ **Алгоритмический подход:** различные версии **многомерного шкалирования** (**multidimensional scaling, MDS**)

Пример использования связи квантовой запутанности с метрикой многообразий: **гипотеза ER=EPR** (Juan Maldacena, Leonard Susskind)

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе**
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

## $S_N$ : натуральное и стандартное представления в конструктивном изложении

- **натуральное представление** = перестановки координат в модуле  $H = \mathbb{N}^N$
- **стандартное представление** — проекция натурального представления в  $(N - 1)$ -мерное дополнение к  $1$ -мерному подмодулю  $n_1 = n_2 = \dots = n_N$   
условие для дополнения  $n_1 + n_2 + \dots + n_N = 0$  — неизбежен выход за пределы натуральных чисел  
стандартное представление неприводимо
- $S_N$  — рационально представляемая группа:  
любое неприводимое представление можно реализовать над  $\mathbb{Q}$  или, эквивалентно, над  $\mathbb{Z}$ 
  - ▶ потеря симметрии приводит к выходу в комплексные числа:  
например, представления циклической группы  $\mathbb{Z}_k$  невозможно описать без корней из единицы  $k$ -й степени

## Числовые характеристики $S_{50}$

- $|S_{50}| = 50! \approx 3.04 \times 10^{64}$  — на 10 порядков больше Монстра
- число классов сопряжённости = 204226
- число различных периодов = 1056
- максимальное число классов с одним периодом = 14076
- максимальный период = 180180

Монте-Карло воспроизводит распределения для группы  $S_{50}$  с очень высокой точностью и эффективностью при генерации небольшого

числа элементов: 
$$\frac{N_{\text{sample}}}{|S_{50}|} = \frac{10^6}{3 \times 10^{64}} \approx 3 \times 10^{-59}$$

# Энергия перестановки

- 1 Формула Планка:  $E = h\nu$   
энергия  $\simeq$  частота =  $\frac{\text{число срабатываний счётчика}}{\text{интервал времени}}$   
= собственное число гамильтониана  $H = i\hbar \ln U$
- 2 Гамильтониан перестановки  $p$  циклового типа  
 $\{(\ell_1 - \text{длина}, m_1 - \text{кратность}), \dots, (\ell_K, m_K)\}$ :

$$H_p = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{m_1} \otimes H_{\ell_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{1}_{m_K} \otimes H_{\ell_K} \end{pmatrix}$$

$$H_{\ell_k} = \frac{1}{\ell_k} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ell_k - 1 \end{pmatrix} \quad \text{— гамильтониан цикла длины } \ell_k$$

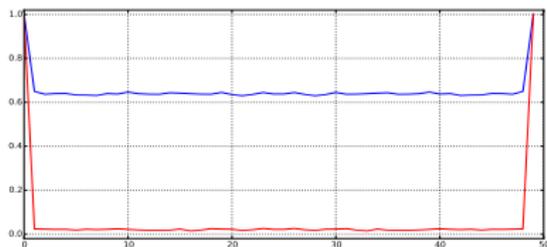
- 3 “Основная” (минимальная ненулевая) энергия перестановки

$$\epsilon_p = \frac{1}{\max(\ell_1, \dots, \ell_K)}$$

# Вероятности Зенона в доминантных классах

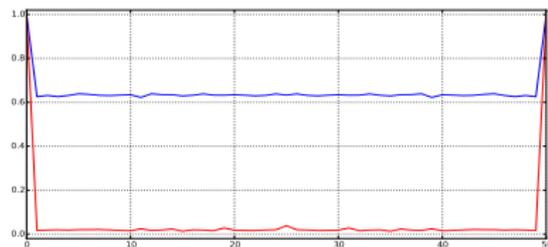
размер:  $6.2 \times 10^{62}$

период: 49



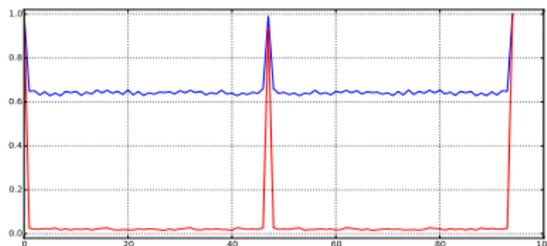
$6.1 \times 10^{62}$

50



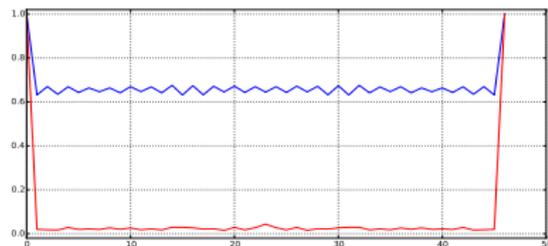
размер:  $3.2 \times 10^{62}$

период:  $94 = 47 \times 2$



$8.3 \times 10^{61}$

46



Эволюции вероятностей для **натурального** (—) и **стандартного** (—) представлений

# Вероятности Зенона в случайно выбранных классах

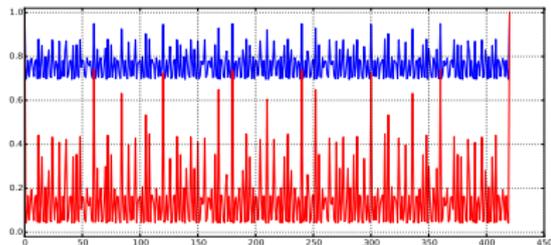
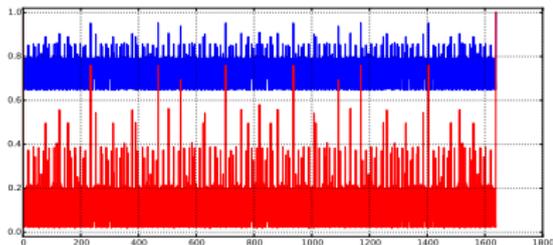
Размеры типичных классов  $\sim 10^{-9}$  —  $\sim 10^{-3}$  относительно доминантных

размер:  $1.2 \times 10^{57}$

период: 1638

$3.7 \times 10^{53}$

420

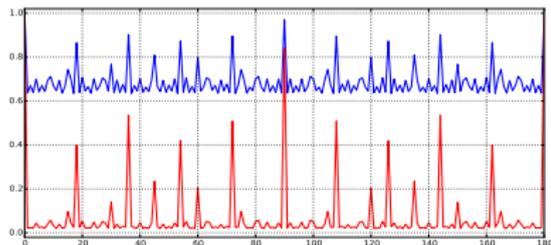
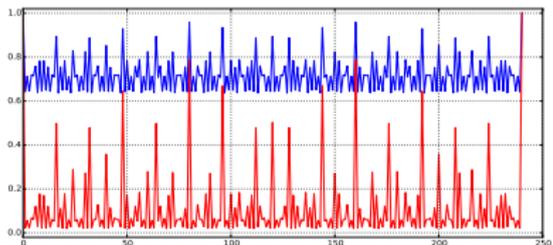


размер:  $2.1 \times 10^{56}$

период: 240

$3.9 \times 10^{59}$

180



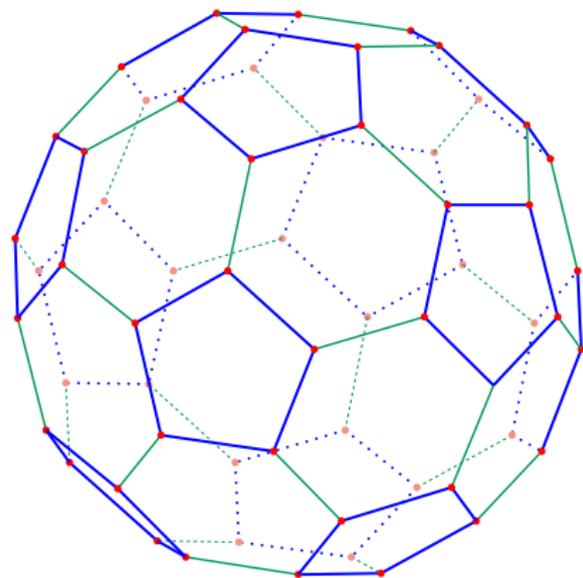
Типичные эволюции вероятностей

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра**
- 9 Резюме

# Группа икосаэдра $A_5$

порядок  $|A_5| = 60$

экспонента  $\text{Exp}(A_5) = 30$



- Образующие и соотношения

$$A_5 = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$$

“физическое воплощение”: граф

Кэли  $A_5 \cong$  молекула фуллерена  $C_{60}$

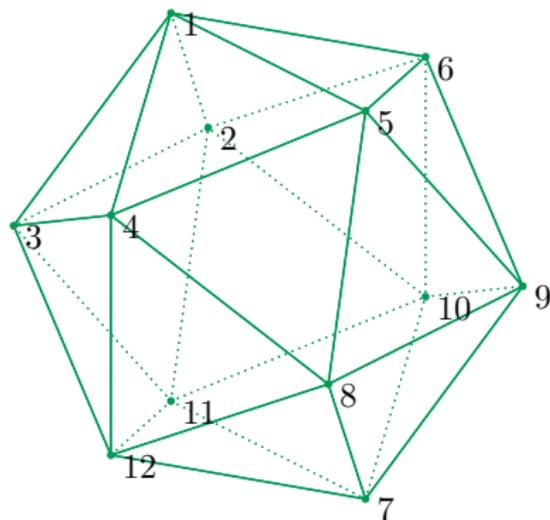
- 5 неприводимых представлений

$$1, 3, 3', 4, 5$$

- 3 примитивных перестановочных представления

$$\underline{5} \cong 1 \oplus 4, \quad \underline{6} \cong 1 \oplus 5, \quad \underline{10} \cong 1 \oplus 4 \oplus 5$$

## $A_5$ : действие на вершинах икосаэдра



- Действие **импримитивно**:  
**система импримитивности**

$$\begin{array}{ccccccc} B_1 & \cdots & B_i & \cdots & B_6 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (1, 7) & \cdots & (i, i+6) & \cdots & (6, 12) \end{array}$$

**блоки** — противоположные пары

- Разложение на неприводимые:

$$\underline{12} \cong 1 \oplus 3 \oplus 3' \oplus 5$$

$A_5$  на икосаэдре: орбиталы и централизаторное кольцо

$$\Omega \times \Omega = \{1, \dots, 12\} \times \{1, \dots, 12\} \quad \text{Ранг } A_5 \text{ на икосаэдре: } R = 4$$

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Общий вид инвариантной формы:  $A = x_1 \mathcal{A}_1 + x_2 \mathcal{A}_2 + x_3 \mathcal{A}_3 + x_4 \mathcal{A}_4$

## $A_5$ на икосаэдре: скалярные произведения в инвариантных подпространствах

**Инвариантные формы** в инвариантных подпространствах:

$$B_1 = \frac{1}{12} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4)$$

$$B_3 = \frac{1}{4} \left( \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_3 + \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

$$B_{3'} = \frac{1}{4} \left( \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_3 - \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

$$B_5 = \frac{5}{12} \left( \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \frac{1}{5} \mathcal{A}_3 - \frac{1}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

можно вычислить решая системы линейных уравнений<sup>2</sup>  
извлекаемых из факторизации полинома  $\det A|_{x_1=1} = f(x_2, x_3, x_4)$

$r$  — примитивный корень 5-й степени из единицы

<sup>2</sup>Этот трюк за доли секунды справляется с непосильной для **Magma** группой **PSL(3,  $\mathbb{F}_3$ )** размера **5616** и экспоненты **312**

## $A_5$ на икосаэдре: скалярные произведения проекций натуральных амплитуд

$n = (n_1, \dots, n_{12})^T$ ,  $m = (m_1, \dots, m_{12})^T$  — **натуральные** векторы  $\Psi_\alpha$ ,  $\Phi_\alpha$  — **проекции**  $n, m$  в инвариантные подпространства

$$\textcircled{1} \quad \langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle = \frac{1}{12} \{ \mathcal{A}_1(m, n) + \mathcal{A}_2(m, n) + \mathcal{A}_3(m, n) + \mathcal{A}_4(m, n) \}$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \Phi_{3 \oplus 3'} | \Psi_{3 \oplus 3'} \rangle = \frac{1}{2} \{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) \}$$

$$\textcircled{1} \quad \langle \Phi_3 | \Psi_3 \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) + \frac{\sqrt{5}}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) - \mathcal{A}_4(m, n)) \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \Phi_{3'} | \Psi_{3'} \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) - \frac{\sqrt{5}}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) - \mathcal{A}_4(m, n)) \right\}$$

- ▶ иррациональность — **следствие импримитивности**: невозможно переместить вершину икосаэдра без одновременного движения противоположной вершины  $\implies$  лишь комбинация  $3 \oplus 3'$  имеет смысл (рациональные борновские вероятности)

$$\textcircled{3} \quad \langle \Phi_5 | \Psi_5 \rangle = \frac{5}{12} \{ \mathcal{A}_1(m, n) + \mathcal{A}_2(m, n) - \frac{1}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) + \mathcal{A}_4(m, n)) \}$$

# Группы в компьютере

Библия:

Derek F.Holt, Bettina Eick, Eamonn A.O'Brien

Handbook of Computational Group Theory. 2005, pp. 510

Основные типы

- группы перестановок — перестановки в памяти в виде массивов, для ввода-вывода — разложение на непересекающиеся циклы
- матричные группы — матрицы над (конструктивным) кольцом
- конечно заданные (finitely-presented) группы — образующие и соотношения (неразрешимость проблемы тождества слов)

Отдельно

- black box groups — элементы группы кодируются строками символов длины  $\leq N$ , оракул для групповых операций

# Важные алгоритмы

- 1 Шрайера–Симса (на практике Монте-Карло) → база и сильное порождающее множество (BSGS) → легко решается большинство задач для групп перестановок  $J_3, He, O'N, Ly, B$  → “enormous theorem” для  $B$  (“Baby monster”)  $|B| \approx 4 \times 10^{33}$  и  $|\Omega| = 13\,571\,955\,000$
- 2 Бёрнсайда–Диксона–Шнайдера → таблица характеров
- 3 Диксона → неприводимое представление из характера
- 4 MeatAxe (алгоритм Лас-Вегас) → неприводимые компоненты модуля над алгеброй матриц представления групп над  $\mathbb{F}_2$   $\xrightarrow{\text{MeatAxe}}$  “enormous theorem”
- 5 перемножения-замены (product-replacement) → случайные элементы группы
- 6 Тодда–Коксетера → перечисление смежных классов в конечно заданных группах

## Компьютерные реализации

- **GAP** (Groups, Algorithms and Programming) [www.gap-system.org](http://www.gap-system.org)  
— универсальная, бесплатная, “manual” — 1381 стр.  
инициатор Joachim Neubüser, Aachen
- **Magma** [magma.maths.usyd.edu.au/magma/](http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/) — универсальная,  
платная, “handbook” — 5273 стр.  
инициатор John Cannon, Sydney  
больше, чем GAP выходит за пределы задач вычислительной теории групп

В приложениях часто возникают потребность узнать группу симметрий конкретного комбинаторного объекта. Для подобных целей имеется

**Nauty** (No automorphism, yes?) [users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/](http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/)  
— эффективная программа для вычисления групп симметрий графов  
бесплатная, автор Brendan McKay, Melbourne

**GAP**, **Magma** и **Nauty** написаны на Си

# Иллюстрация Magma vs GAP I

## Magma

Из образующих  $(2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  построить группу  $F$   
определить размер, экспоненту, структуру

```
> F:=PermutationGroup<3|(2,3),(1,3,2)>;
```

```
> F;
```

```
Permutation group F acting on a set of  
cardinality 3
```

```
(2, 3)
```

```
(1, 3, 2)
```

```
> Order(F);
```

```
6
```

```
> Exponent(F);
```

```
6
```

В Magma нет аналога StructureDescription()

## GAP

```
gap> F:=Group((2,3),(1,3,2));
```

```
Group([ (2,3), (1,3,2) ])
```

```
gap> Size(F);
```

```
6
```

```
gap> Exponent(F);
```

```
6
```

```
gap> StructureDescription(F);
```

```
"S3" — означает, что  $F \cong S_3$ 
```

# Иллюстрация Magma vs GAP II

## Magma

Построить группу  $G$  из образующих

$(1, 7)(2, 8)(3, 12)(4, 11)(5, 10)(6, 9)$  и  $(1, 2, 11, 12, 4)(5, 6, 10, 7, 8)$

```
G:=PermutationGroup  
<12|(1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9),  
  (1,2,11,12,4)(5,6,10,7,8)>;
```

```
> G;
```

Permutation group G acting on a set  
of cardinality 12

```
(1, 7)(2, 8)(3, 12)(4, 11)(5, 10)(6, 9)
```

```
(1, 2, 11, 12, 4)(5, 6, 10, 7, 8)
```

```
> #G;
```

```
60
```

```
> Exponent(G);
```

```
30
```

## GAP

```
gap> G:=Group(  
  (1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9),  
  (1,2,11,12,4)(5,6,10,7,8));
```

```
Group([ (1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9),  
  (1,2,11,12,4)(5,6,10,7,8) ])
```

```
gap> Size(G);
```

```
60
```

```
gap> Exponent(G);
```

```
30
```

```
gap> StructureDescription(G);
```

```
"A5" —  $G \cong A_5$ 
```

# Иллюстрация Magma vs GAP III

Определение

Пусть  $G$  действует на  $X$ ,  $F$  — на  $U$

Сплетение:  $W = F \wr_X G \cong F^X \rtimes G$

Канонические действия  $W$ :  $\begin{cases} \text{импримитивное} & \text{на } U \times X \\ \text{примитивное} & \text{на } U^X \end{cases}$

$U$  нас  $G = A_5$ ,  $X =$  икосаэдр,  $F = S_3$ ,  $U = \{1, 2, 3\}$ ,

$U^X =$  функции на икосаэдре и нас интересует примитивное действие

Magma

```
> W:=PrimitiveWreathProduct(F,G);
```

```
> W;
```

```
Permutation group W acting on a set  
of cardinality 531441
```

```
> Order(W);
```

```
130606940160  $\approx 1.3 \times 10^{11} \sim 2^{37}$ 
```

```
> Exponent(W);
```

```
180
```

GAP

```
gap> W:=WreathProductProductAction(F,G);
```

```
<permutation group of size 130606940160
```

```
with 26 generators>
```

```
gap> Exponent(W);
```

```
180
```

Время вычисления экспоненты

минуты

часы

# Магма: неприводимые компоненты представления I

Входной файл A5.txt

```
SetOutputFile("A5(12).txt": Overwrite:=true);
G:=PermutationGroup<12|(1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9),
                    (1,2,11,12,4)(5,6,10,7,8)>;
G;
#G;
expG:=Exponent(G);
printf "Exponent A5 = %o\n", expG;
M:=PermutationModule(G, CyclotomicField(5));
M: Maximal;           // варианты: Minimal, Maximal и Magma
Deco:=ConstituentsWithMultiplicities(M);
printf "decomposition A5(12) = %o\n", Deco;
for i := 1 to #Deco do
  Deco[i]: Maximal;
end for;
UnsetOutputFile();
```

Вызов: > load "A5.txt";

# Магма: неприводимые компоненты представления II

Результат вычислений в файле A5(12).txt

Permutation group G acting on a set of cardinality 12

(1, 7)(2, 8)(3, 12)(4, 11)(5, 10)(6, 9)

(1, 2, 11, 12, 4)(5, 6, 10, 7, 8)

60

Exponent A5 = 30

GModule M of dimension 12 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4

Generators of acting algebra:

```
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

# Магма: неприводимые компоненты представления III

```
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

```
decomposition A5(12) = [
<GModule of dimension 1 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4, 1>,
<GModule of dimension 3 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4, 1>,
<GModule of dimension 3 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4, 1>,
<GModule of dimension 5 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4, 1>
]
```

# Магма: неприводимые компоненты представления IV

<

GModule of dimension 1 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4  
Generators of acting algebra:

[1]

[1]

,

1

>

<

GModule of dimension 3 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4  
Generators of acting algebra:

[ -1 0 zeta\_5^3 + zeta\_5^2 + 2]

[ 0 -1 zeta\_5^3 + zeta\_5^2 + 1]

[ 0 0 1]

[-zeta\_5^3 - zeta\_5^2 - 1 zeta\_5^3 + zeta\_5^2 + 1 0]

[ -zeta\_5^3 - zeta\_5^2 0 0]

[ -1 0 1]

,

# Магма: неприводимые компоненты представления $V$

```
1
>
<
GModule of dimension 3 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4
Generators of acting algebra:

[          1          0          0]
[zeta_5^3 + zeta_5^2 + 1 -1          0]
[ zeta_5^3 + zeta_5^2          0 -1]

[          0          1          0]
[ -zeta_5^3 - zeta_5^2 zeta_5^3 + zeta_5^2 + 1 -zeta_5^3 - zeta_5^2]
[-zeta_5^3 - zeta_5^2 - 1 zeta_5^3 + zeta_5^2 + 1          0]
,
1
>
```

# Магма: неприводимые компоненты представления VI

<

GModule of dimension 5 over Cyclotomic Field of order 5 and degree 4

Generators of acting algebra:

[ 1 0 -1 0 0]

[ 0 1 -1 0 0]

[ 0 0 -1 0 0]

[ 0 0 -1 0 1]

[ 0 0 -1 1 0]

[ 0 1 0 -1 0]

[ 0 0 0 -1 1]

[ 0 0 1 -1 0]

[ 1 0 0 -1 0]

[ 0 0 0 -1 0]

,

1

>

- 1 Квантовая механика
- 2 Конструктивная модификация
- 3 Конструктивная схема квантовой эволюции
- 4 Принцип наименьшего действия как континуальное приближение
- 5 Непрерывные симметрии как аппроксимации
- 6 Возникновение геометрии в схеме квантово механического описания
- 7 Поиск физических структур в симметрической группе
- 8 Вычислительная теория групп и компьютерная алгебра
- 9 Резюме

# Резюме I

- 1 **Квантовая механика** — перестановки конечных множеств  
+ проекции векторов натуральных чисел
- 2 **Квантовая случайность** — принципиальная невозможность  
проследить идентичность неразличимых объектов в процессе  
эволюции
- 3 **Комплексные числа** в квантовом формализме — неконструктивная  
версия циклотомических чисел (метрическое пополнение)
- 4 **Принцип наименьшего действия** — континуальная аппроксимация  
принципа отбора наиболее вероятных траекторий
- 5 **Непрерывные симметрии** — континуальные аппроксимации  
конечных симметрий

## Резюме II

- 6 Геометрическое пространство — структура тензорного произведения в основном гильбертовом пространстве
- 7 Конкретные физические структуры — доминанты в множестве недетерминистических квантовых эволюций
- 8 Монте-Карло — адекватный метод поиска “эмерджентных” структур в больших совокупностях квантовых эволюций
- 9 Вычислительная теория групп предлагает эффективные алгоритмы исследования конечных групп
- 10 Среди двух основных компьютерных реализаций вычислительной теории групп Magma демонстрирует преимущество над GAP