Однородные почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий

А. В. Климаков, А. А. Михалёв

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

e-mails: klimakov88@mail.ru, aamikhalev@mail.ru

Москва, 2018

Шрайеровы многообразия

Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр).

Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Нильсен и Шрайер доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна.

Шрайеровы многообразия

А. Г. Курош (1947) доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

А. И. Ширшов (1953) показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен также Виттом (1956), где также было доказано, что многообразие всех p-алгебр Ли является шрайеровым).

А. И. Ширшов (1954) показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны.Таким образом многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым.

Шрайеровы многообразия

А. А. Михалёв (1985) и А. С. Штерн (1886) показали, что многообразие супералгебр Ли является шрайеровым.

А. А. Михалёв (1988) получил этот результат для цветных p-супералгебр Ли.

А. И. Корепанов (2003) доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны.

В. К. Харченко (2005) получил обобщение теоремы Ширшова-Витта о подалгебрах свободных алгебр Ли для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики с косым копроизведением.

У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков (2002) доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны.

У. У. Умирбаев (1994) получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий.

Примитивные элементы

Определение

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры $\mathcal{F}$ шрайерова многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}$, содержащее подмножество M.

Используя свободное дифференциальное исчисление, критерии распознавания примитивных систем элементов для свободных (p-) алгебр Ли и свободных (p-) супералгебр Ли были получены А. А. Золотых и А. А. Михалёвым (1994), для свободных неассоциативных алгебр — А. А. Михалёвым, У. У. Умирбаевым и Дж.-Т. Ю (2001).

Примитивные элементы

Для элемента a алгебры A через M_a обозначим левый $U(A)$-подмодуль в $U(A)$, порождённый элементами $\frac{\partial a}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial a}{\partial x_n}$. Алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра.

Теорема

Система $a_1, \ldots, a_r$ элементов алгебры A является примитивной тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. Элемент a алгебры A примитивен тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $m_1, \ldots, m_n \in U(A)$, что $\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$.

Алгоритмы распознавания примитивных систем элементов и построение дополнения до множества свободных образующих для свободных неассоциативных, свободных (анти-) коммутативных неассоциативных алгебр были построены (в том числе с компьютерной реализацией) в работах К. Шампаньер (2000), А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, К. Шампаньер (2007), А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский (2010).

Определение

Ненулевой элемент свободной алгебры $\mathcal{F}$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}$, но является примитивным элементом в любой содержащей его собственной подалгебре алгебры $\mathcal{F}$.

Почти примитивные элементы в свободных группах изучались в работах A. M. Brunner, R. G. Burns, S. Oates-Williams (1993), L. P. Comerford (1995), B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, M. Stille (1999), G. Rosenberger (1978, 1984, 1991). Алгоритм распознавания почти примитивных элементов свободных групп был построен L. P. Comerford (1995).

Почти примитивные элементы

Изучение почти примитивных элементов свободных алгебр было начато в работе А. А. Михалёва и Дж. Т. Ю (2000). В частности были построены примеры почти примитивных элементов в свободных неассоциативных алгебрах, свободных (p-) алгебрах Ли и (p-) супералгебрах Ли малых рангов. Используя свойства свободного произведения свободных алгебр, была доказана

Теорема

Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F} = A * B$. Пусть также a и b являются однородными почти примитивными элементами A и B, относительно некоторых весовых функций μ_1 и μ_2 на A и B, соответственно (μ_1 и μ_2 могут быть различными). Тогда $a + b$ является почти примитивным элементом в $\mathcal{F}$.

Почти примитивные элементы

В работе А. В. Климакова (2015) было введено понятия ранга примитивности элемента и усилен предыдущий результат

Определение

Рангом примитивности элемента $w \in \mathcal{F}(X)$ *называется*

$$\pi(w) = \min\left\{\mathrm{rank}(H) \mid w \in H \subset \mathcal{F}(X),\ w \textit{ не примитивен в } H\right\}.$$

Если не существует ни одной такой подалгебры H, *то* $\pi(w) = \infty$.

Теорема

Пусть $\mathcal{F}(X)$ *является свободным произведением двух собственных подалгебр* A *и* B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, *элементы* $a \in A$, $b \in B$. *Тогда* $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a+b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$. *Если* a *и* b *являются почти примитивными элементами* A *и* B, *то элемент* $a+b$ *является почти примитивным элементом* $\mathcal{F}(X)$.

Почти примитивные элементы

В работе А. В. Михалёва, У. У. Умирбаева, Дж. Т. Ю (2002) рассматривались свободные алгебры Ли и было доказано, что элемент $u_{kl} = (\mathrm{ad}\, x)^k(y) + (x)(\mathrm{Ad}\, y)^l$, где $(\mathrm{ad}\, u)(v) = u * v = (u)(\mathrm{Ad}\, v)$ и $*$ является операцией умножения, в свободной алгебре Ли $L(x, y)$, является почти примитивным при $k, l \geqslant 2$ и $k \neq l$.

В работе А. В. Климакова (2013) было доказано, что при $k = l = 2$ и $k = l = 4$ элемент $u_{k,l}(x, y)$ не является почти примитивным в $L(x, y)$. При $k = l = 3$ элемент $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в $L(x, y)$ тогда и только тогда, когда в поле K, над которым рассматривается данная алгебра, не имеет решений уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$.

Предложение

Пусть $\mathcal{F}(X)$ – свободная алгебра с конечным множеством X свободных образующих, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ – редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры H алгебры $F(X)$.

(a) *Если элемент является примитивным в подалгебре H, то существует h_i, входящий линейно в его представление;*

(b) *Если существует h_i, входящий только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H;*

(c) *Если существует h_i такого же веса, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H;*

(d) *Если существует h_i, старшая часть которого входит только линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H.*

Предложение

Пусть $\mathcal{F}(X)$ – свободная неассоциативная алгебра или свободная (анти)коммутативная алгебра, или свободная алгебра Ли. Тогда:

(a) *Если элемент $u \in F(X)$ не является примитивным элементом в $F(X)$, но старшая часть u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре $u^\circ \in H^\circ \subsetneq F(X)$, порожденной однородными образующими, то элемент u является почти примитивным элементом в $F(X)$.*

(b) *В обратную сторону утверждение* (a) *верно для однородных элементов.*

(c) *Существуют неоднородные элементы, для которых утверждение* (a) *в обратную сторону так же неверно.*

Почти примитивные элементы

Всякий однородный элемент u свободной неассоциативной алгебры $F(X)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$ имеет представление

$$u = u\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \Phi_j \Psi_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i\right) = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u},$$

где элемент $\widetilde{u}$ имеет вид

$$\widetilde{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{\Lambda_i} M_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{N_i} M_j\right) x_i,$$

где $\varepsilon_j^{\Lambda_i}, \varepsilon_j^{N_i} \in K$, $(\Phi_j(x_1, \ldots, x_n), \Psi_j(x_1, \ldots, x_n))$ — различные пары одночленов степени $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$, $d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x, \Lambda_y, N_x, N_y$ — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = d(N_x) = d(N_y) = m - 1$ или нулевые, M_j — упорядоченные одночлены степени $d(M_j) = m - 1$.

Почти примитивные элементы

Предложение

Однородный элемент u $(\widetilde{u})$ *свободной неассоциативной алгебры* $F(X)$ *степени* $d(u) = m \geqslant 3$ *является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда не существует таких* $y_1, \ldots, y_s$, $s < n$ *элементов* $d(y_t) = 1$ *и* $P_1, Q_1, \ldots P_s, Q_s$ *однородных элементов степени* $d(P_t) = d(Q_t) = m - 1$, *что*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i = \sum_{t=1}^{s} y_t P_t + \sum_{t=1}^{s} Q_t y_t$$

Другими словами почти примитивность однородного элемента неразрывно связана с невозможностью записать элемент с меньшим числом обраующих единичного веса в слагаемых левой и правой скобочной структуры. Минимально возможное число s называется ρ-числом однородного элемента u $(\widetilde{u})$.

Почти примитивные элементы

Поскольку нам надо проверить $\rho(\widetilde{u})$ равно или нет $n = rk(F(X))$, то пусть для $1 \leqslant t \leqslant n-1$

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} k_{t,i}x_i, \; P_t = \sum_j a_{t,j}M_j, \; Q_t = \sum_j b_{t,j}M_j,$$

и получаем систему уравнений степени не более 2: $\left\{F_{i,j} = 0, G_{i,j} = 0\right\}$, где

$$F_{i,j} = \sum_{t=1}^{n-1} k_{t,i}a_{t,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i}, \quad G_{i,j} = \sum_{t=1}^{n-1} k_{t,i}b_{t,j} - \varepsilon_j^{N_i}.$$

Таким образом верна следующая теорема

Теорема

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, тогда однородный элемент u является почти примитивным в $F(X)$, тогда и только тогда, когда редуцированный базис Гребнера-Ширшова идеала $I = (F_{i,j}, G_{i,j})$ содержит единицу.
В общем случае, если $1 \in \mathrm{RedGr}(I)$, то однородный элемент u степени $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным в $F(X)$ не зависимо от алгебраической замкнутости поля K.

Почти примитивные элементы

Используя каноническое представление элемента в базисе регулярных одночленов, предыдущие утверждения переносятся на случай свободной (анти)коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли. В последнем случае, необходимо будет рассматривать проекции на линейное пространство, порожденное всеми регулярными одночленами степени $d(u)$:

$$\widetilde{u} = [\Lambda_1, x_1] + \ldots + [\Lambda_n, x_n] = \Big([P_1, y_1] + \ldots + [P_{n-1}, y_{n-1}]\Big)\Big|_{W_X^m},$$

где $W_X \subset W$ множество регулярных одночленов вида $[A, x]$, $x \in X$ одна из свободных порождающих, A — регулярный одночлен степени $d(A) > d(x) = 1$, $W^m = \{w \in W \mid d(w) = m\}$, $W_X^m = W_X \cap W^m$.

Почти примитивные элементы

Для однородных элементов степени $d(u) = 2$, ρ-число в точности совпадает с рангом данного элемента, поэтому справедлива

Теорема

Однородный элемент $u \in \mathcal{F}(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, степени $d(u) = 2$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда элемент u имеет максимальный ранг, то есть $\mathrm{rank}(u) = n$.

Алгоритм вычисления ранга элемента свободных алгебр шрайеровых многообразий был получен и реализован в работах А. А. Золотых и А. А. Михалёва (1994), А. А. Михалёва, У. У. Умирбаева и Дж.-Т. Ю (2001, 2004), А. А. Михалёва, А. В. Михалёва, А. А. Чеповского, К. Шампаньер(2007).