# Динамика движения спутника относительно центра масс с пассивными системами ориентации

Гутник Сергей Александрович доцент МФТИ

Представление диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Научный консультант д.ф.-м.н, профессор Сарычев Василий Андреевич

МАИ 25 Октября 2019 г. Москва

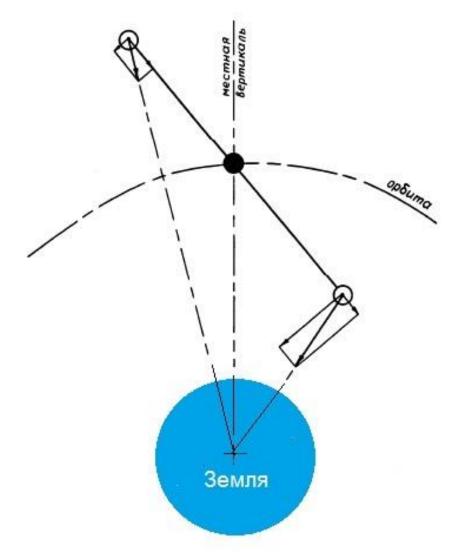
#### Структура диссертации

- Глава 1. Динамика спутника-гиростата на круговой орбите. Метод исследования
- Глава 2. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов
- Глава 3. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов
- Глава 4. Динамика гравитационноориентированного спутника при действии управляющих моментов
- Глава 5. Динамика системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите

#### Цель работы и задачи

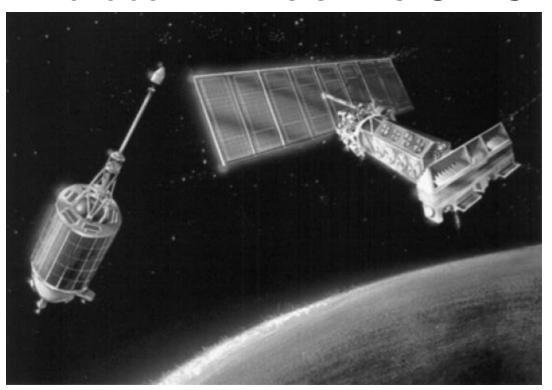
- **Целью работы** является разработка аналитических и символьно-численных методов исследования динамики движения относительно центра масс спутника-гиростата, спутника подверженного действиям аэродинамического момента, постоянного момента, активного управляющего момента, и составной схемы спутник-стабилизатор.
- Задачами исследования являются:
- разработка символьно-численных методов определения положений равновесия и методов анализа их устойчивости;
- разработка методов решения задачи о положениях равновесия спутника в центральном гравитационном поле на круговой орбите при действии возмущающих моментов;
- — анализ условий устойчивости равновесных ориентаций при действии внешних моментов и асимптотической устойчивости при наличии управляющих моментов;
- исследование равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле на круговой орбите.

# Гравитационные системы ориентации. Общие идеи



# Примеры спутников с гравитационной системой ориентации

• Спутники для международной космичской системы спасения «КОСПАС-SARSAT»



• Серия Космос-1383 и NOAA-8 1982-1983 г. В 2009 г. В систему вошли спутники «Стерх-1», «Стерх-2». Вес спутника 850 кг, длина стержня 12 м. Околокруговая орбита с высотой 1000 км. i=83 $^0$ 

#### Станция «Салют-7»



Стация *«Салют-7»* (1982-1991) в режиме гравитационной ориентации Параметры орбиты:  $h_a$  =284 km,  $h_p$  =279 km, i=51.60

Sarychev V.A., Legostaev V.P., Sazonov V.V., Belyaev M.Yu., Gansvind I.N., Tyan T.N. The passive attitude motion of the orbital stations Salyut-6 and Salyut-7. Acta Astronautica, 1987, v.16, p.165-192

#### Основные системы координат

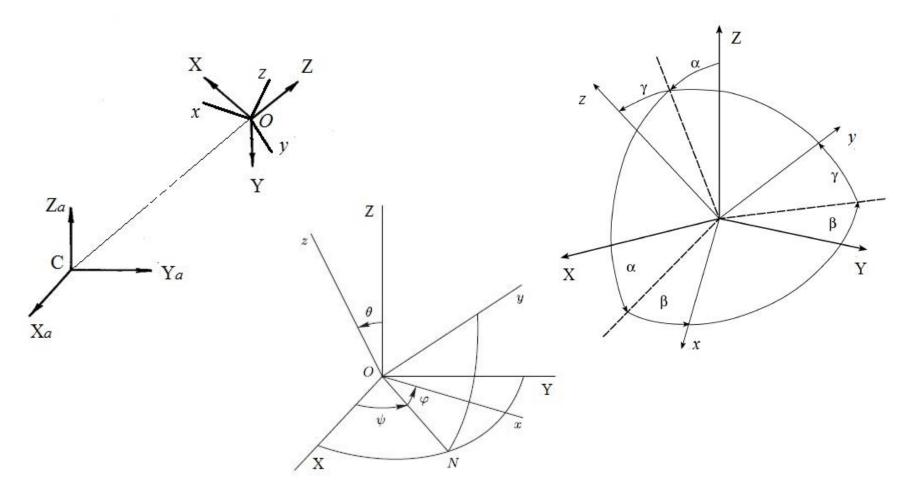


Рис 1. Основные системы координат

#### Глава 1. Динамика спутника-гиростата на круговой орбите. Метод исследования

Уравнения движения спутника-гиростата относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента имеют вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} + \bar{H}_3q - \bar{H}_2r = 0,$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} + \bar{H}_1r - \bar{H}_3p = 0,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} + \bar{H}_2p - \bar{H}_1q = 0;$$

$$p = \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + \omega_0a_{21} = \bar{p} + \omega_0a_{21},$$

$$q = \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta}\sin\varphi + \omega_0a_{22} = \bar{q} + \omega_0a_{22},$$

$$r = \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + \omega_0a_{23} = \bar{r} + \omega_0a_{23}.$$
(1.2)

Здесь  $p, q, r, H_1 = \bar{H}_1/\omega_0, H_2 = \bar{H}_2/\omega_0, H_3 = \bar{H}_3/\omega_0;$  проекции абсолютной угловой скорости спутника-гиростата и проекции вектора гиростатического момента на оси  $\mathit{Ox}, \mathit{Oy}, \mathit{Oz}; \; \psi, \vartheta, \varphi$  – углы Эйлера;  $a_{ij}$  - направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz, в орбитальной системе координат,  $\omega_0$  – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. A, B, C главные центральные моменты инерции спутника-гиростата

#### 1.3 Положения равновесия

Положив в (1.1) в (1.2)  $\psi = \psi_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , (постоянные величины) получим уравнения:

$$(C-B)(a_{22}a_{23}-3a_{32}a_{33})-H_2a_{13}+H_3a_{12}=0,$$

$$(A-C)(a_{23}a_{21}-3a_{33}a_{31})-H_3a_{11}+H_1a_{13}=0,$$

$$(B-A)(a_{21}a_{22}-3a_{31}a_{32})-H_1a_{12}+H_2a_{11}=0,$$

$$(1.3)$$

Удобнее использовать эквивалентную систему

$$4(Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) = 0,$$

$$Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33} = 0.$$
(1.4)

$$(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) + (H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) = 0,$$

которая вместе с условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$a_{11}^{2} + a_{12}^{2} + a_{13}^{2} = 1, a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1, a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$

$$a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1, a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$(1.5)$$

определяет все положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат когда  $A, B. C, H_1, H_2, H_3$  заданы.

Для системы (1.3), (1.5) или (1.4), (1.5) решается следующая **задача:** для заданных значений $A, B, C, H_1, H_2, H_3$ ; требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера), т.е. найти все положения равновесия спутника-гиростата.

Вводя безразмерные параметры,  $h_i = H_i/(B-C)$ ,  $\nu = (B-A)/(B-C)$ , система (1.3), примет вид:

$$-4(va_{21}a_{31} + a_{23}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) = 0,$$

$$va_{11}a_{31} + a_{13}a_{33} = 0,$$

$$va_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} - (h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}) = 0.$$
(1.6)

Система (1.5), (1.6) может быть разрешена относительно переменных  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$  в следующем виде:

$$a_{11} = \frac{-4a_{32}a_{33}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}, \qquad a_{21} = \frac{4[va_{32}^{2} - (1-v)a_{33}^{2}]a_{31}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}, \qquad a_{21} = \frac{4[va_{32}^{2} - (1-v)a_{33}^{2}]a_{31}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}, \qquad a_{22} = \frac{-4(va_{31}^{2} + a_{33}^{2})a_{32}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}, \qquad a_{23} = \frac{4[(1-v)a_{31}^{2} + a_{32}^{2}]a_{33}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}.$$

$$a_{23} = \frac{4[(1-v)a_{31}^{2} + a_{32}^{2}]a_{33}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}.$$

$$a_{23} = \frac{4[(1-v)a_{31}^{2} + a_{32}^{2}]a_{33}}{h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}}.$$

10

Подставляя решения (1.7) в (1.6), получим систему алгебраических уравнений от 3-х неизвестных  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$ 

$$16[a_{32}^{2}a_{33}^{2} + (1-v)^{2}a_{33}^{2}a_{31}^{2} + v^{2}a_{31}^{2}a_{32}^{2}] = (h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33})^{2}(a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2}),$$

$$4v(1-v)a_{31}a_{32}a_{33} + [h_{1}a_{32}a_{33} - h_{2}(1-v)a_{33}a_{31} - h_{3}va_{31}a_{32}](h_{1}a_{31} + h_{2}a_{32} + h_{3}a_{33}) = 0,$$

$$a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1.$$

$$(1.8)$$

Учитывая однородность первых двух уравнений (1.8), и вводя обозначения

$$x=\frac{a_{31}}{a_{33}}, \ y=\frac{a_{32}}{a_{33}} \ \text{получим алгебраическую систему:}$$
 
$$a_0y^2+a_1y+a_2=0,$$
 
$$b_0y^4+b_1y^3+b_2y^2+b_3y+b_4=0.$$
 
$$3десь \quad a_0=h_2(h_1-vh_3x),$$
 
$$a_1=h_1h_3+[4v(1-v)+h_1^2-(1-v)h_2^2-vh_3^2]x-vh_1h_3x^2,$$

$$a_{1} = h_{1}h_{3} + [4V(1-V) + h_{1} - (1-V)h_{2} - Vh_{3}]x - Vh_{1}h_{3}x$$

$$a_{2} = -(1-V)h_{2}(h_{1}x + h_{3})x,$$

$$b_{0} = h_{2}^{2},$$

$$b_{1} = 2h_{2}(h_{1}x + h_{3}),$$

$$b_{2} = (h_{2}^{2} + h_{3}^{2} - 16) + 2h_{1}h_{3}x + (h_{1}^{2} + h_{2}^{2} - 16V^{2})x^{2},$$

$$b_{3} = 2h_{2}(h_{1}x + h_{3})(1 + x^{2}),$$

$$b_{4} = (h_{1}x + h_{3})^{2}(1 + x^{2}) - 16(1-V)^{2}x^{2}.$$

### Исключим из системы двух уравнений (1.9) переменную y с использованием понятия результанта

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0,$$
  

$$b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 = 0.$$
(1.9)

Результант R(x) уравнений (1.9) имеет вид

$$R(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

### Определитель R(x) представляет собой алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x

$$\begin{split} p_0 x^{12} + p_1 x^{11} + p_2 x^{10} + p_3 x^9 + p_4 x^8 + p_5 x^7 + p_6 x^6 + \\ + p_7 x^5 + p_8 x^4 + p_9 x^3 + p_{10} x^2 + p_{11} x + p_{12} = 0, \end{split}$$
 где коэффициенты  $p_i = p_i (h_1, h_2, h_3, \nu)$  имеют вид: 
$$p_0 = -h_1^4 h_3^4 v^6, \\ p_1 = 2h_1^3 h_3^3 v^5 \Big[ 2h_1^2 - h_2^2 \left( \nu - 1 \right) - 2\nu \left( h_3^2 + 2\nu - 2 \right) \Big], \\ p_2 = -h_1^2 h_3^2 v^4 \Big\{ 6h_1^4 + h_2^4 \left( \nu - 1 \right)^2 - h_2^2 \left( \nu - 1 \right) \Big[ 16 \left( \nu^3 - \nu^2 \right) + \left( \nu - 1 \right) + h_3^2 \left( 1 - 7\nu \right) \Big] + \\ + h_1^2 \Big[ \left( -25\nu^2 + 26\nu - 1 \right) + h_3^2 \left( \nu^2 - 16\nu + 1 \right) + h_2^2 \left( \nu^2 - 8\nu + 7 \right) \Big] + \\ + 2\nu^2 \Big[ 3h_3^4 + 8(\nu - 1)^2 - 4h_3^2 \left( 2\nu^2 - 7\nu + 5 \right) \Big] \Big\}, \\ p_3 = 2h_1 h_3 v^3 \Big\{ 2h_1^6 + h_1^4 \Big[ \left( -13\nu^2 + 14\nu - 1 \right) + 2h_3^2 \left( \nu^2 - 6\nu + 1 \right) + h_2^2 \left( \nu^2 - 5\nu + 4 \right) \Big] + \\ + h_3^2 \Big[ -h_2^4 \left( \nu - 1 \right)^2 \left( 2\nu - 1 \right) + h_2^2 \left( \nu - 1 \right) \nu \Big[ h_3^2 \left( 1 - 4\nu \right) + \left( 16\nu^3 - 16\nu^2 + \nu - 1 \right) \Big] + \\ + 2\nu^3 \Big[ -h_3^4 + 8(\nu - 1)^2 \left( 4\nu - 5 \right) + 2h_3^2 \left( 7 - 11\nu + 4\nu^2 \right) \Big] \Big] - \\ - h_1^2 \Big[ h_2^4 \left( \nu - 2 \right) \left( \nu - 1 \right)^2 + h_2^2 \left( \nu - 1 \right) \Big[ \left( 16\nu^3 - 16\nu^2 + \nu - 1 \right) + h_3^2 \left( 3\nu^2 - 13\nu + 3 \right) \Big] + \\ + 2\nu \Big[ -2 \left( \nu - 1 \right)^2 \left( 5\nu - 1 \right) + h_3^4 \left( \nu^2 - 6\nu + 1 \right) + h_3^2 \left( 18\nu^3 - 53\nu^2 + 38\nu - 3 \right) \Big] \Big] \Big\} \quad \dots \end{split}$$

#### 1.3. Исследование положений равновесия

Численные исследования проводились при значениях B > A > C  $(0 < \nu < 1)$ . Для предельных значений параметров  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$ , возможно аналитически определить границы областей в пространстве параметров с одинаковым числом действительных корней.

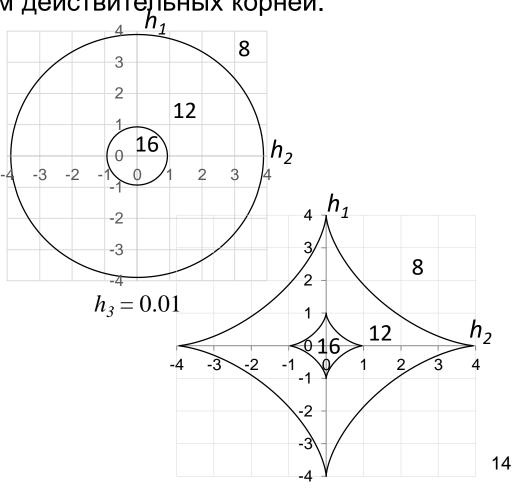
Для случая v=0 (A=B)

$$h_1^2 + h_2^2 = (4^{2/3} - h_3^{2/3})^3,$$
  

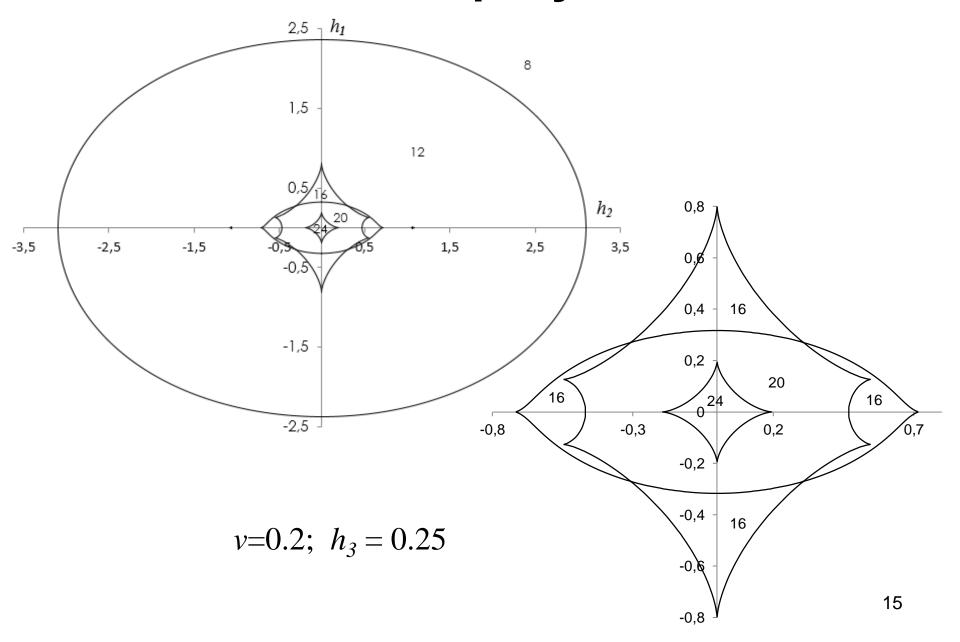
$$h_1^2 + h_2^2 = (1 - h_3^{2/3})^3.$$
(1.11)

Для случая v = 1 (A = C)

$$h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 4^{2/3},$$
 (1.12)  
 $h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 1.$ 



#### 1.5 Численные результаты



#### 1.5. Численные результаты

Равновесия/ v	24/20	20/16	16/12	12/8
0,01	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,990	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,999	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,959	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,1	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,900	<b>h</b> <sub>3</sub> =1,021	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,610	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,2	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,800	$h_3 = 1,048$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,264	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,3	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,700	$h_3 = 1,082$	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,950	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,4	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,600	$h_3 = 1,124$	$h_3$ =2,669	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,5	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,500	$h_3 = 1,182$	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,412	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,6	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,400	$h_3$ =1,186	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,167	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,7	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,300	$h_3 = 1,105$	<b>h</b> <sub>3</sub> =1,915	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,8	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,200	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,909	<b>h</b> <sub>3</sub> =1,629	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,9	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,100	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,676	<b>h</b> <sub>3</sub> =1,245	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0
0,99	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,010	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,168	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,997	<b>h</b> <sub>3</sub> =4,0

# 1.6 Анализ устойчивости положений равновесия

Для исследования достаточных условий устойчивости положений равновесия использовался обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(A\overline{p}^{2} + B\overline{q}^{2} + C\overline{r}^{2}) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_{0}^{2}\{3[(1 - \nu)a_{31}^{2} + a_{32}^{2}] + (\nu a_{21}^{2} + a_{23}^{2}) - 2(h_{1}a_{21} + h_{2}a_{22} + h_{3}a_{23})\} = \text{const.}$$
(1.13)

Поставляя  $\psi = \psi_0 + \overline{\psi}$ ,  $\vartheta = \vartheta_0 + \overline{\vartheta}$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \overline{\varphi}$  в (1.13) получим интеграл энергии в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(A\overline{p}^{2} + B\overline{q}^{2} + C\overline{r}^{2}) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_{0}^{2}(A_{\psi\psi}\overline{\psi}^{2} + A_{gg}\overline{\theta}^{2} + A_{\varphi\varphi}\overline{\varphi}^{2} + A_{\varphi\varphi}\overline{\varphi}^{2} + 2A_{\psi\varphi}\overline{\psi}\overline{\varphi} + 2A_{g\varphi}\overline{\theta}\overline{\varphi}) + \Sigma = \text{const.}$$
(1.14)

#### в (1.14) коэффициенты квадратичной формы имеют вид

$$\begin{split} A_{\psi\psi} &= v(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (a_{13}^2 - a_{23}^2) + h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23}, \\ A_{gg} &= (3 + \cos^2 \psi_0)(1 - v \sin^2 \varphi_0) \cos 2\theta_0 - \\ &- \frac{1}{4} v \sin 2\psi_0 \cos \theta_0 \sin 2\varphi_0 + (h_1 \sin \varphi_0 + h_2 \cos \varphi_0) \cos \psi_0 \cos \theta_0 + h_3 a_{23}, \\ A_{\varphi\varphi} &= v[(a_{22}^2 - a_{21}^2) - 3(a_{32}^2 - a_{31}^2)] + h_1 a_{21} + h_2 a_{22}, \\ A_{\psi\theta} &= -\frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \sin 2\theta_0 + v(a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}) - \sin \psi_0 (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}), \\ A_{\psi\varphi} &= v(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) - h_1 a_{12} + h_2 a_{11}, \\ A_{\theta\varphi} &= -\frac{3}{2} v \sin 2\theta_0 \sin 2\varphi_0 + v(a_{21} \cos \varphi_0 + a_{22}) a_{23} - (h_1 \cos \varphi_0 - h_2 \sin \varphi_0) a_{23}. \end{split}$$

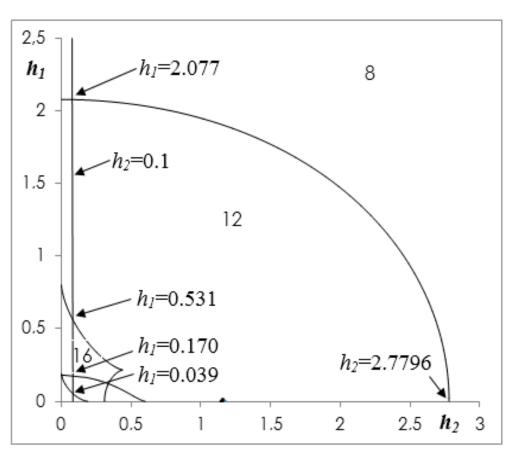
Из теоремы Ляпунова следует, что положения равновесия устойчивы, если квадратичная форма (1.14), (1.15) является положительно определенной, т.е. имеют место следующие неравенства:

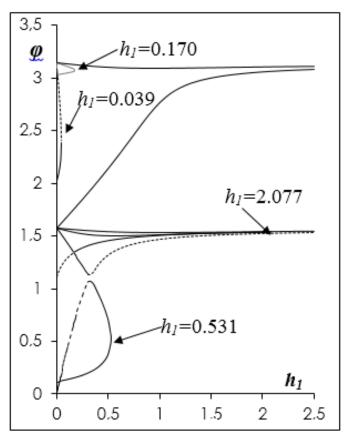
$$A_{\psi\psi} > 0,$$

$$A_{\psi\psi} A_{gg} - (A_{\psi g})^{2} > 0,$$

$$A_{\psi\psi} A_{gg} A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psi g} A_{\psi\varphi} A_{g\varphi} - A_{\psi\psi} (A_{g\varphi})^{2} - A_{gg} (A_{\psi\varphi})^{2} - A_{\varphi\varphi} (A_{\psi g})^{2} > 0.$$
(1.16)

### Численные результаты исследования достаточных условий устойчивости (1.16) равновесий

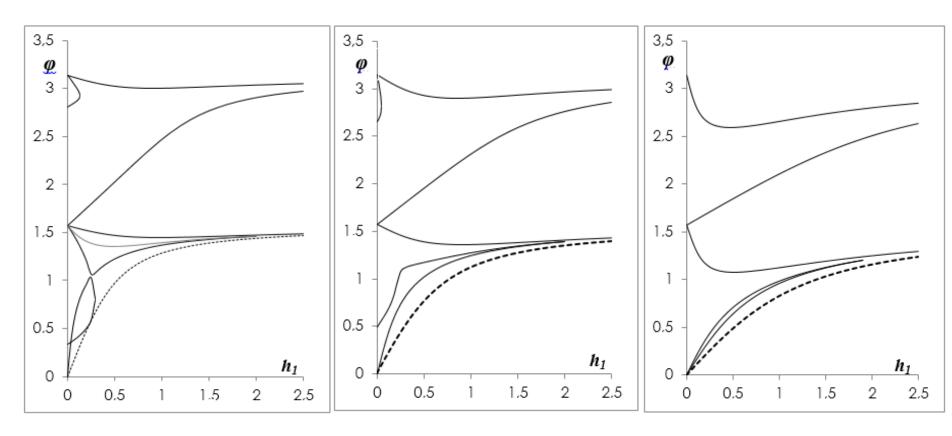




$$v=0.2, h_3=0.4$$

v=0.2,  $h_2$  = 0.1,  $h_3$  = 0.4 (24 равновесные ориентации, 4 устойчивые)

#### Численные результаты исследования устойчивости равновесий

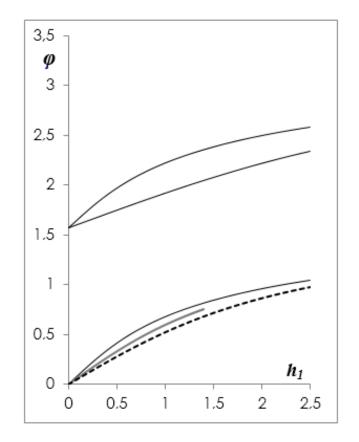


 $v=0.2, h_2=0.3, h_3=0.4$ (20 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

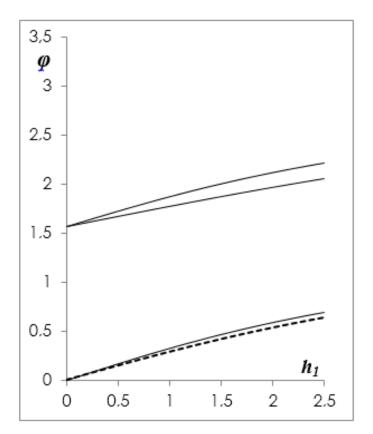
 $v=0.2, h_2=0.5, h_3=0.4$ (16 равновесных ориентаций, (12 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

$$v$$
=0.2,  $h_2$  = 1.0,  $h_3$  = 0.4 (12 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

#### Численные результаты исследования устойчивости равновесий



v=0.2,  $h_2$  = 2.0,  $h_3$  = 0.4 (12 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)



$$v$$
=0.2,  $h_2$  = 4.0,  $h_3$  = 0.4 (8 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

#### 1.7 Положения равновесия спутника-гиростата для частных случаев

Рассмотрим частные случаи, когда вектор гиростатического момента находится в плоскости, образованной осями системы координат Охуг. В случае 1, когда  $H_1 \neq 0, H_2 \neq 0, H_3 = 0$ , система (1.3) примет вид:

$$a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{23} = 0,$$

$$(1 - v)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{23} = 0,$$

$$v(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{22} + h_2a_{21} = 0.$$
(1.17)

G:=map(factor,Groebner[Basis]([f1,f2,f3, ... f9], plex(a11, a12, a13, ...a33)))

$$P(x) = P_{1}(x)P_{2}(x) = 0, \quad x = a_{33};$$

$$P_{1}(x) = x(x^{2} - 1),$$

$$P_{2}(x) = p_{0}x^{4} + p_{1}x^{2} + p_{2},$$

$$p_{0} = 16(1 - v)^{2}p_{3}^{2},$$

$$p_{1} = p_{3}(h_{1}^{6} + (1 - v)(8v + (3 - v)h_{2}^{2})h_{1}^{4} - (1 - v)^{2}((2v - 3)h_{2}^{4} + 16v^{2}(2h_{2}^{2} - 1))h_{1}^{2} + (1 - v)^{4}h_{2}^{2}(h_{2}^{2} - 4v)^{2}),$$

$$p_{2} = -v^{2}h_{1}^{2}h_{2}^{2}(h_{1}^{6} - (1 - v)(1 - 9v - (3 - v)h_{2}^{2})h_{1}^{4} - (1 - v)^{2}((2v - 3)h_{2}^{4} + (1 - v)^{4}(h_{2}^{2} - 1)(h_{2}^{2} - 4v)^{2} + 8v(1 - 3v))h_{1}^{2} + (17v^{2} + 2(1 - v))h_{2}^{2}),$$

$$p_{3} = h_{1}^{4} + 2(1 - v)(h_{2}^{2} + 4v)h_{1}^{2} + (1 - v)^{2}(h_{2}^{2} - 4v)^{2}.$$
(1.18)

22

Algorithm	Time	
method=fglm (plex)	32.5 sec.	
2 steps – tdeg (F4) + plex (FGLM)	5.86+39.0=44.86 sec.	
lexdeg (method=fglm)	6.89 sec.	

[PC with CPU Intel Core i7 2,4 GGz, 8 Gb RAM]

Рассмотрены 3 случая:  $a_{33} = 0$ ,  $a_{33}^2 = 1$ ,  $P_2(a_{33}^2) = 0$ .

В **случае 1**,  $a_{33} = 0$  и система (1.17), (1.5) приводится к виду:

$$16v^{2}a_{21}^{4} - 8vh_{2}a_{21}^{3} + (h_{1}^{2} + h_{2}^{2} - 16v^{2})a_{21}^{2} + 8vh_{2}a_{21} - h_{1}^{2} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{h_{2}a_{21}}{(h_{1} - 4va_{21})}.$$
(1.19)

Из системы (1.19) можно получить бифуркационную кривую в форме астроиды которая разделяет области с 4 и 8 решениями

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (4\nu)^{2/3}$$
 (1.20)

В **случае 2**  $a_{33}^2 = 1$  из системы (1.17) можно получить бифуркационную кривую также в форме астроиды :  $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = v^{2/3}$ .

Случай 3 
$$P_2(t) = p_0 t^2 + p_1 t + p_2 = 0, \quad t = a_{33}^2;$$
 (1.21)

$$t_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{2p_0}; \quad t_2 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{2p_0}$$

Кривые  $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$ ,  $t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$ , делят плоскость на области, где существуют 8, 4 и 0 решений.

Положения равновесия для **случая**  $H_1 = 0$ .

Из системы (3) получены следующие бифуркационные кривые :

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 4^{2/3}, h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 1.$$
 (1.22)

**В случае**  $H_2 = 0$  имеем следующие бифуркационные кривые:

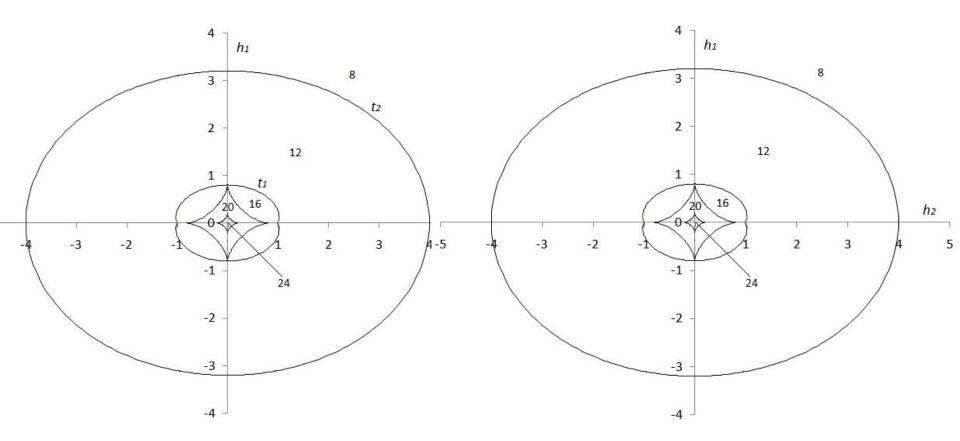
$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (1 - \nu)^{2/3}, \quad h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (4(1 - \nu))^{2/3}.$$
 (1.23)

Полученные во всех трех случаях условия :

$$a_{31} = 0$$
,  $a_{31}^2 = 1$ ,  $a_{32} = 0$ ,  $a_{32}^2 = 1$ ,  $a_{33} = 0$ ,  $a_{33}^2 = 1$ 

определяют все типы плоских решений данной задачи.

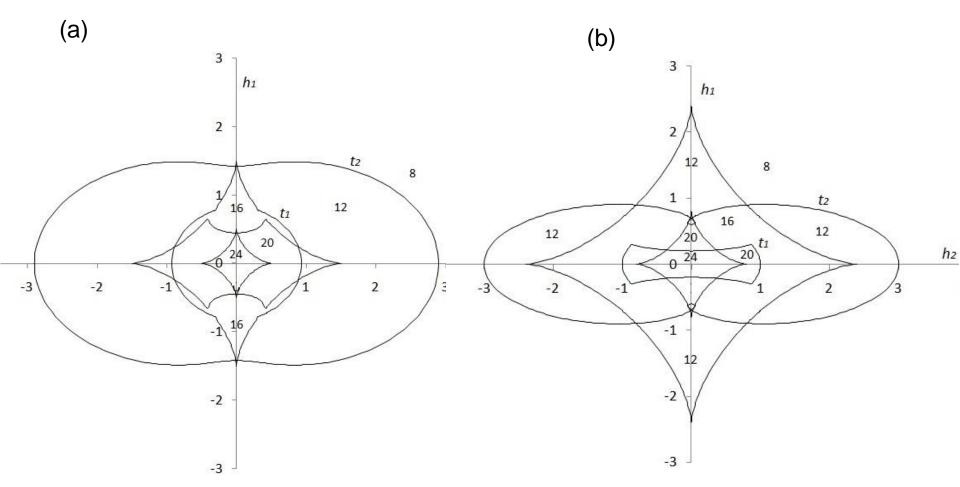
#### 1.7. Символьно-численные результаты



Области с одинаковым числом равновесий при  $v = 0.2, h_3 = 0.$ 

Области с одинаковым числом равновесий при  $v = 0.2, h_3 = 0.001$  (численный результат, общий случай)

#### 1.7 Символьно-численные результаты



Области с равным числом равновесий при  $v=0.5,\ h_3=0$  (a),  $v=0.8,\ h_3=0$  (b)

#### 1.8. Другие частные случаи

#### Простейшие положения равновесия спутника-гиростата:

1. 
$$a_{11}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$ ,  $H_1 = 0$ ,

2. 
$$a_{12}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{32} = 0$ ,  $H_2 = 0$ ,

3. 
$$a_{13}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{12} = a_{23} = a_{33} = 0$ ,  $H_3 = 0$ ,

4. 
$$a_{21}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = 0$ ,  $H_2 = H_3 = 0$ ,

5. 
$$a_{22}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$ ,  $H_1 = H_3 = 0$ ,

6. 
$$a_{23}^2 = 1$$
,  $a_{13} = a_{33} = a_{21} = a_{22} = 0$ ,  $H_1 = H_2 = 0$ .

7. 
$$a_{31}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{21} = a_{32} = a_{33} = 0$ ,  $H_1 = 0$ ,

8. 
$$a_{32}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{22} = a_{31} = a_{33} = 0$ ,  $H_2 = 0$ ,

9. 
$$a_{33}^2 = 1$$
,  $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ ,  $H_3 = 0$ ,

Для 9 частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите, показано, что любая такая ориентация является равновесной 27

# 1.9. Динамика осесимметричного спутника-гиростата

Для осесимметричного спутника-гиростата, когда, например  $A \neq B = C$ ,  $h_1 \neq 0, \ h_2 \neq 0, \ h_3 \neq 0.$  система (1.4) упрощается и принимает вид

$$4(A-B)a_{21}a_{31} + H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33} = 0,$$

$$(A-B)a_{11}a_{31} = 0,$$

$$(A-B)a_{11}a_{21} + H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13} = 0.$$
(1.24)

Изучены: Случай 1)  $a_{11} = 0$ 

$$16a_{21}^4 + 8ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 16) - 8ma_{21} - m^2 = 0,$$

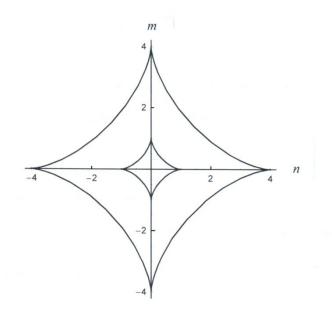
$$a_{31} = \frac{\pm na_{21}}{4a_{21} + m} \rightarrow m^{2/3} + n^{2/3} = 4^{2/3},$$
 (1.25)

Случай 2)  $a_{31} = 0$ .

$$a_{21}^4 + 2ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 1) - 2ma_{21} - m^2 = 0,$$

$$a_{31} = \frac{\mp na_{21}}{a_{21} + m} \rightarrow m^{2/3} + n^{2/3} = 1.$$
 (1.26)

$$m = H_1/(A-B); n = \sqrt{H_2^2 + H_3^2}/(A-B).$$



#### Устойчивость положений равновесия

В качестве функции Ляпунова использовался обобщенный интеграл энергии (1.13) для осесимметричного случая (B=C) в виде

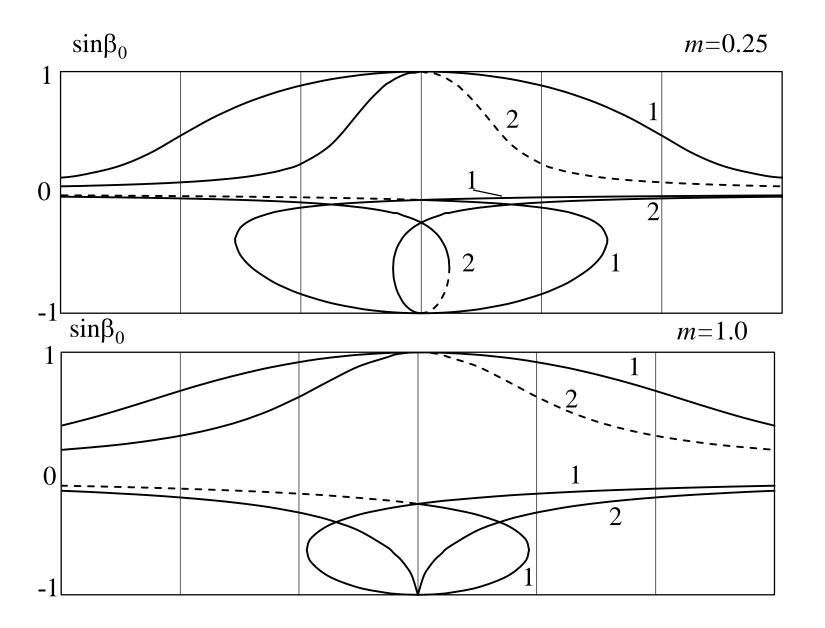
$$\frac{1}{2}[A\overline{p}^{2} + B(\overline{q}^{2} + \overline{r}^{2})] + \frac{1}{2}\omega_{0}^{2}\{3(B - A)(a_{31}^{2} - a_{11}^{2})\overline{\alpha}^{2} + \\
+[(B - A)(1 + 3\sin^{2}\alpha_{0})\cos 2\beta_{0} + H_{1}a_{21} + H_{2}a_{22} + H_{3}a_{23}]\overline{\beta}^{2} - \\
-2a_{21}(H_{2}\sin \gamma_{0} + H_{3}\cos \gamma_{0})\overline{\beta}\overline{\gamma} + (H_{2}a_{22} + H_{3}a_{23})\overline{\gamma}^{2}\} + \Sigma = \text{const.}$$
(1.27)

Получены достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата для случая 1: A-B<0, (n<0) (1.28)  $0<\sin\beta_0<1$ ,  $m+4\sin\beta_0<0$ ,  $-1<\sin\beta_0<0$ ,  $m+4\sin\beta_0>0$ . Для случая 2: A-B>0, (n>0) (1.29)

$$0 < \sin \beta_0 < 1, m + \sin^3 \beta_0 < 0, -1 < \sin \beta_0 < 0, m + \sin^3 \beta_0 > 0.$$

В случае 2 при  $n>0,\ 0<|m|<1$  существуют четыре устойчивых положения равновесия, а при $|m|\geq 1$  существуют два устойчивых положения равновесия. В случае 1  $n<0,\ m\neq 0$  всегда существуют два устойчивых положения равновесия.

29



Пример решений уравнений (1.25) и (1.26)

## Глава 2. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов

В Гл. 2 исходим из предположения, что действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха.

Пусть  $a_p,\ b_p,\ c_p$  — координаты центра давления спутника в связанной системе координат,  $V_x,\ V_y,\ V_z$  — проекции скорости центра масс спутника относительно воздуха на оси орбитальной системы координат. Направляющие косинусы вектора скорости запишутся в виде  $V_x/V,\ V_y/V,\ V_z/V$ , где  $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ . Проекции аэродинамического момента на оси Oxyz —

$$M_{x} = -Q(b_{p}\overline{Z} - c_{p}\overline{Y}), \ M_{y} = -Q(c_{p}\overline{X} - a_{p}\overline{Z}), \ M_{z} = -Q(a_{p}\overline{Y} - b_{p}\overline{X}).$$

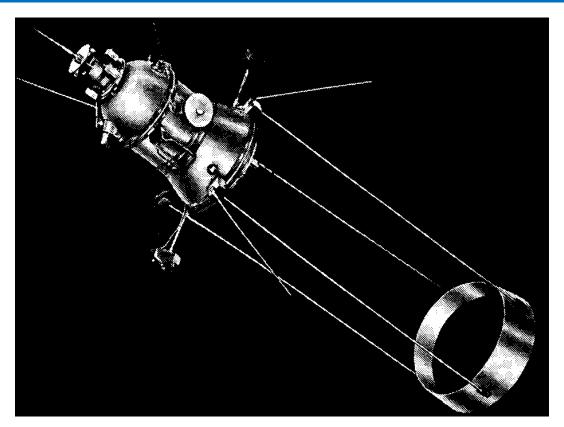
 $Q = 1/2 \, \rho^* V^2 S c_x, \quad \rho^* -$  плотность атмосферы, S - характерная площадь спутника,  $c_x -$  коэффициент сопротивления, Q - сила сопротивления.

$$\overline{X} = \frac{V_x}{V} a_{11} + \frac{V_y}{V} a_{21} + \frac{V_z}{V} a_{31}, \overline{Y} = \frac{\dot{V}_x}{V} a_{12} + \frac{V_y}{V} a_{22} + \frac{V_z}{V} a_{32}, \overline{Z} = \frac{\dot{V}_x}{V} a_{13} + \frac{\dot{V}_y}{V} a_{23} + \frac{\dot{V}_z}{V} a_{33}.$$

• Силовая функция, определяющая действие сопротивления атмосферы Земли на спутник имеет следующий вид:

$$U_a = -Q(a_p \overline{X} + b_p \overline{Y} + c_p \overline{Z}).$$

#### Спутники «Космос-149/320»



Спутники «Космос-149» (1967) и «Космос-320» (1970), с аэродинамической системой ориентации.

Параметры орбиты  $h_a = 297$  км,  $h_p = 248$  км,  $i = 48^0$  Спутник *PAMS* (Проект GAMES, США) (1996)

Sarychev V.A. Aerodynamic stabilization system of satellites. Proceedings of the International Conference on Attitude Changes and Stabilization of Satellites. 1968, P. 177-183, Paris, France

#### 2.2 Уравнения движения

Уравнения движения спутника относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов имеют вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) = 0,$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) = 0,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) = 0;$$

$$p = \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + \omega_0a_{21} = \bar{p} + \omega_0a_{21},$$

$$q = \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta}\sin\varphi + \omega_0a_{22} = \bar{q} + \omega_0a_{22},$$

$$r = \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + \omega_0a_{23} = \bar{r} + \omega_0a_{23}.$$
(2.2)

Здесь  $p, q, r, H_1 = -Qa_p/\omega_0^2, H_2 = -Qb_p/\omega_0^2, H_3 = -Qc_p/\omega_0^2;$  проекции абсолютной угловой скорости спутника и проекции вектора аэродинамического момента на оси Ox, Oy, Oz;  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  — углы Эйлера;  $a_{ij}$  - направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz, в орбитальной системе координат,  $\omega_0$  — угловая скорость движения центра масс спутника по

круговой орбите.

#### 2.3. Положения равновесия спутника

Положив в (2.1) в (2.2)  $\psi = \psi_0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , (постоянные величины) получим стационарные уравнения:

$$(C-B)(a_{22}a_{23}-3a_{32}a_{33})-H_2a_{13}+H_3a_{12}=0,$$

$$(A-C)(a_{23}a_{21}-3a_{33}a_{31})-H_3a_{11}+H_1a_{13}=0,$$

$$(B-A)(a_{21}a_{22}-3a_{31}a_{32})-H_1a_{12}+H_2a_{11}=0,$$
(2.3)

Была использована эквивалентная система

$$Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} = 0,$$

$$3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) = 0,$$

$$(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) = 0,$$

$$(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) = 0,$$

которая вместе с условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$a_{11}^{2} + a_{12}^{2} + a_{13}^{2} = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$

$$a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$(2.5)$$

определяет все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат когда A, B. C,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  заданы.

#### 2.3. Положения равновесия

Для системы (2.3), (2.5) или (2.4), (2.5) ставится следующая задача:

• Для заданных  $A, B, C, H_1, H_2, H_3$  требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера), т.е. найти все положения равновесия спутника.

Используя метод, разработанный в главе 1 система (2.4), (2.5) была к системе двух алгебраических уравнений. Использовались безразмерные параметры  $h_i = H_i/(B-C), \ \ \nu = (B-A)/(B-C)$  и  $x = \frac{a_{31}}{a_{33}}, \ \ y = \frac{a_{32}}{a_{33}}$   $a_{33}$ 

 $b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 = 0.$ 

$$\begin{aligned}
-b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 &= 0. \\
a_0 &= h_2 (v h_3 x - h_1), \\
a_1 &= v h_1 h_3 x^2 - h_1 h_3 + [3v(1-v) - h_1^2 + (1-v)h_2^2 + v h_3^2]x, \\
a_2 &= (1-v)h_2 (h_1 x + h_3)x, \\
b_0 &= h_2^2, \quad b_1 &= 2h_2 (h_1 x + h_3), \\
b_2 &= (h_2^2 + h_3^2 - 9) + 2h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 9v^2)x^2, \\
b_3 &= 2h_2 (h_1 x + h_3)(1 + x^2), \\
b_4 &= (h_1 x + h_3)^2 (1 + x^2) - 9(1-v)^2 x^2.
\end{aligned}$$

(2.6)

Исключая из системы (2.6) y, с использованием понятия результанта, получим алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x

$$p_{0}x^{12} + p_{1}x^{11} + p_{2}x^{10} + p_{3}x^{9} + p_{4}x^{8} + p_{5}x^{7} + p_{6}x^{6} + p_{7}x^{5} + p_{8}x^{4} + p_{9}x^{3} + p_{10}x^{2} + p_{11}x + p_{12} = 0,$$
(2.7)

где коэффициенты  $p_i = p_i(h_1, h_2, h_3, \nu)$  имеют вид:

$$\begin{split} p_0 &= h_1^4 h_3^4 v^6, \\ p_1 &= -2 h_1^3 h_3^3 v^5 \Big[ 2 h_1^2 + \left( 1 - v \right) h_2^2 - 2 v h_3^2 - 3 v \left( 1 - v \right) \Big], \\ p_2 &= h_1^2 h_3^2 v^4 [6 h_1^4 + h_1^2 (h_2^2 (v^2 - 8v + 7) + h_3^2 (v^2 - 16v + 1) + 17 v^2 - 16v - 1) \\ &\quad + h_2^4 (1 - v)^2 + h_2^2 (1 - v) + 3 v^2 \left( 2 h_3^4 + 3 h_3^2 (1 - v^2) + 3 (1 - v)^2 \right) \Big], \\ p_3 &= -2 h_1 h_3 v^3 [2 h_1^6 h_1^4 (h_2^2 (v^2 - 5v + 4) + 2 h_3^2 (v^2 - 6v + 1) + \\ &\quad + 8 v^2 - 7 v - 1) + h_1^2 (h_2^4 ((2 - v))(1 - v)^2 + h_2^2 (1 - v)(h_3^2 (3v^2 - 13v + 3) + \\ &\quad + 9 v^3 - 9 v^2 + v - 1) - v (2 h_3^4 (v^2 - 6v + 1) + h_3^2 (15 v^3 - 8v^2 - 8v + 1) - \\ &\quad - 3 (1 - v)^2 (2 v + 1))) + h_3^2 (h_2^4 ((1 - v)^2)(1 - 2v) - h_2^2 v (1 - v)(h_3^2 (1 - 4v) + \\ &\quad + 9 v^3 - 9 v^2 + v - 1) + v^3 (-2 h_3^4 + 9 h_3^2 v (1 - v) - 9 (1 - v)^2 (3v - 2))) \Big], \quad \dots \end{split}$$

36

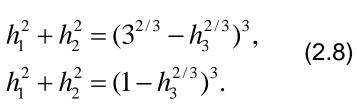
#### 2.4. Исследование положений равновесия

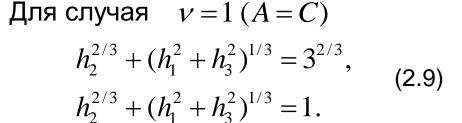
Численные исследования проводились при значениях B > A > C (0 <  $\nu$  < 1).

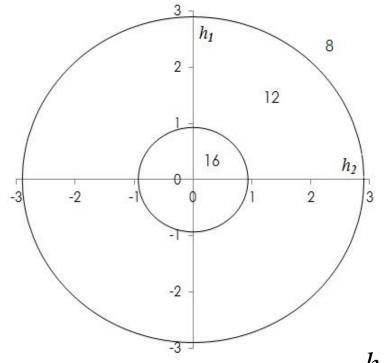
Для случая 
$$v = 0$$
  $(A = B)$ 

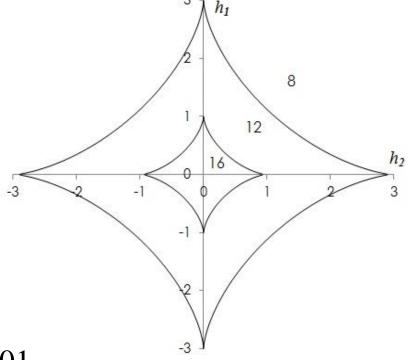
$$h_1^2 + h_2^2 = (3^{2/3} - h_3^{2/3})^3,$$

$$h_2^2 + h_2^2 = (1 - h_3^{2/3})^3$$
(2.8)

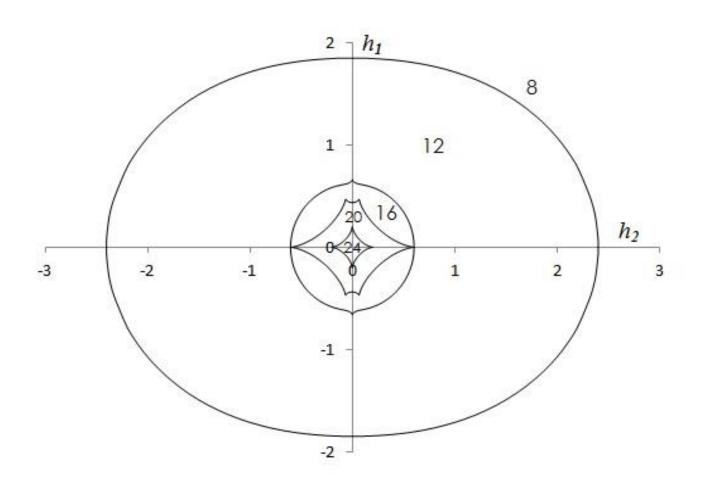








#### 2.5 Численные результаты



$$v=0.2; h_3=0.15$$

#### 2.5. Численные результаты

Равновесия/ v	24/20	20/16	16/12	12/8
0,01	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,99	$h_3 = 1.0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,97	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,1	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,90	$h_3 = 1.0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,7	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,2	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,80	$h_3 = 1.0$	$h_3 = 2,4$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,3	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,70	$h_3 = 1.0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =2,1	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,4	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,60	$h_3 = 1.0$	$h_3 = 1.8$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,5	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,50	$h_3 = 1.0$	$h_3 = 1,5$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,6	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,40	$h_3 = 1.0$	$h_3 = 1,2$	$h_3 = 3.0$
0,7	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,30	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,9	$h_3 = 1,0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,8	$h_3 = 0.20$	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,6	$h_3 = 1,0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,9	$h_3 = 0.10$	$h_3 = 0.3$	$h_3 = 1,0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0
0,99	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,01	<b>h</b> <sub>3</sub> =0,03	$h_3 = 1,0$	<b>h</b> <sub>3</sub> =3,0

#### 2.6. Анализ устойчивости положений равновесия

Для исследования достаточных условий устойчивости положений равновесия будем использовать обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(A\overline{p}^{2} + B\overline{q}^{2} + C\overline{r}^{2}) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_{0}^{2}\{3[(1 - v)a_{31}^{2} + a_{32}^{2}] + (va_{21}^{2} + a_{23}^{2}) - (2.10)$$

$$-2(h_{1}a_{11} + h_{2}a_{12} + h_{3}a_{13})\} = \text{const.}$$

Представим  $\psi = \psi_0 + \overline{\psi}, \ \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \overline{\mathcal{G}}, \ \varphi = \varphi_0 + \overline{\varphi}, \$  тогда интеграл энергии примет вид:  $\frac{1}{2}(A\overline{p}^2 + B\overline{q}^2 + C\overline{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\overline{\psi}^2 + A_{gg}\overline{\mathcal{G}}^2 + A_{\varphi\varphi}\overline{\varphi}^2 + A_{\varphi\varphi}\overline{\varphi$ 

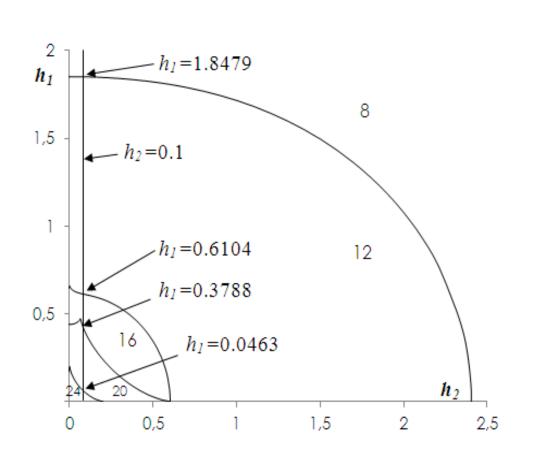
$$\frac{1}{2}(Ap^{2} + Bq^{2} + CF^{2}) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_{0}(A_{\psi\psi}\psi^{2} + A_{gg}\mathcal{F}^{2} + A_{\phi\phi}\psi^{2} + A_{\phi\phi}\psi^{2} + A_{\phi\phi}\psi^{2} + 2A_{\phi\phi}\overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}} + 2A_{\phi\phi}\overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}} + 2A_{g\phi}\overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}}) + \Sigma = \text{const.}$$
(2.11)

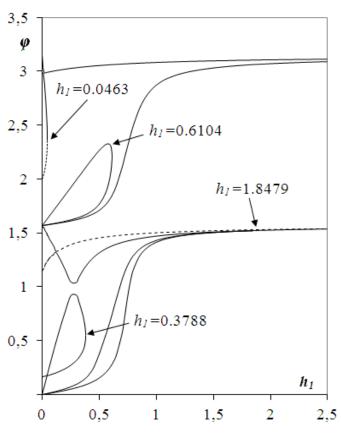
Из теоремы Ляпунова следует, что положения равновесия устойчивы, если квадратичная форма (2.11), (2.12) является положительно определенной, т.е. имеют место следующие неравенства:

$$\begin{split} A_{\psi\psi} > 0, \\ A_{\psi\psi} A_{gg} - (A_{\psig})^2 > 0, \\ A_{\psi\psi} A_{gg} A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psig} A_{\psi\varphi} A_{g\varphi} - A_{\psi\psi} (A_{g\varphi})^2 - A_{gg} (A_{\psi\varphi})^2 - A_{\varphi\varphi} (A_{\psig})^2 > 0. \end{split}$$
 (2.12)

40

#### Численные результаты исследования устойчивости равновесий

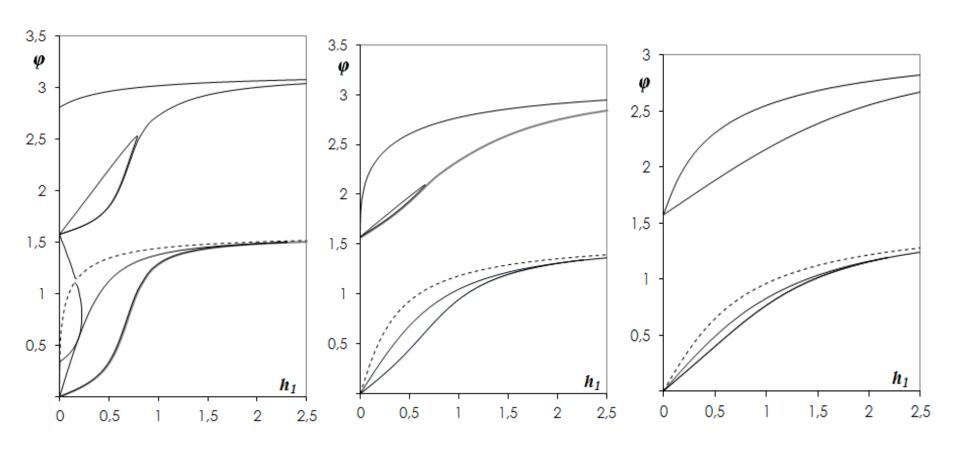




$$v=0.2, h_3=0.15$$

$$v$$
=0.2,  $h_2$  = 0.1,  $h_3$  = 0.15 (24 равновесные ориентации, 4 устойчивые)

#### Численные результаты исследования устойчивости равновесий

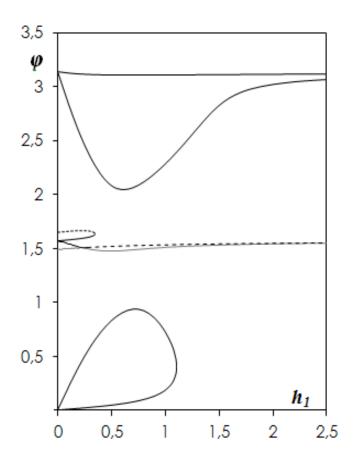


 $v=0.2, h_2=0.2, h_3=0.01$ (20 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

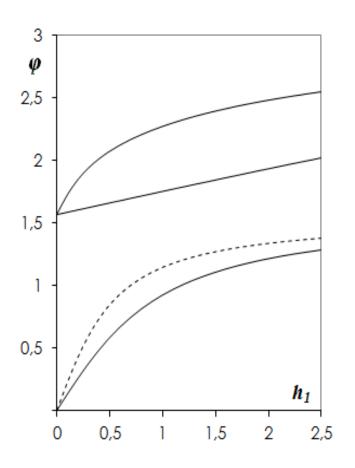
 $v=0.2, h_2=0.6, h_3=0.01$ (16 равновесных ориентаций, (12 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

$$v$$
=0.2,  $h_2$  = 1.0,  $h_3$  = 1.0 (12 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

## **Численные результаты исследования** устойчивости равновесий



v=0.4,  $h_2$  = 0.4,  $h_3$  = 1.0 (16 равновесных ориентаций, 4 устойчивые)



v=0.8,  $h_2$  = 3.0,  $h_3$  = 0.01 (8 равновесных ориентаций, 2 устойчивые)

### 2.7. Положения равновесия спутника для частных случаев

Рассмотрим частные случай, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образованной осями системы координат Oxyz. В случае 1, когда  $H_1 \neq 0$ ,  $H_2 \neq 0$ ,  $H_3 = 0$ , система (2.3) примет вид:

$$a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{13} = 0,$$

$$(1 - v)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{13} = 0,$$

$$v(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} = 0.$$
(2.13)

(2.14)

44

G:=map(factor,Groebner[Basis]([f1,f2,f3, ... f9], plex(a11, a12, a13, ...a33)))

$$P(x) = P_1(x)P_2(x) = 0, \quad x = a_{33};$$

$$P_1(x) = x(x^2 - 1),$$

$$P_2(x) = p_0x^4 + p_1x^2 + p_2,$$

$$p_0 = 9(1 - \nu)^2 p_3^2,$$

$$p_1 = p_3(h_1^6 - (1 - \nu)(6\nu - (3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - (1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + 9\nu^2(2h_2^2 - 1))h_1^2 + (1 - \nu)^4(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_2 = -\nu^2 h_1^2 h_2^2 (h_1^6 - (1 - \nu)(5\nu + 1 - (3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - (1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + 2(5\nu^2 - \nu + 1)h_2^2 - 3\nu(2 + \nu))h_1^2 + (1 - \nu)^4(h_2^2 - 1)(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_3 = h_1^4 + 2(1 - \nu)(h_2^2 - 3\nu)h_1^2 + (1 - \nu)^2(h_2^2 + 3\nu)^2.$$

Рассмотрены 3 случая:  $a_{33} = 0$ ,  $a_{33}^2 = 1$ ,  $P_2(a_{33}^2) = 0$ .

В **случае 1**,  $a_{33} = 0$  и система (2.13), (2.5) приводится к виду:

$$9v^{2}a_{31}^{4} + 6vh_{2}a_{31}^{3} + (h_{1}^{2} + h_{2}^{2} - 9v^{2})a_{31}^{2} - 6vh_{2}a_{11} - h_{1}^{2} = 0,$$

$$a_{32} = \mp \frac{h_{1}a_{31}}{(3va_{31} \pm h_{2})}.$$
(2.15)

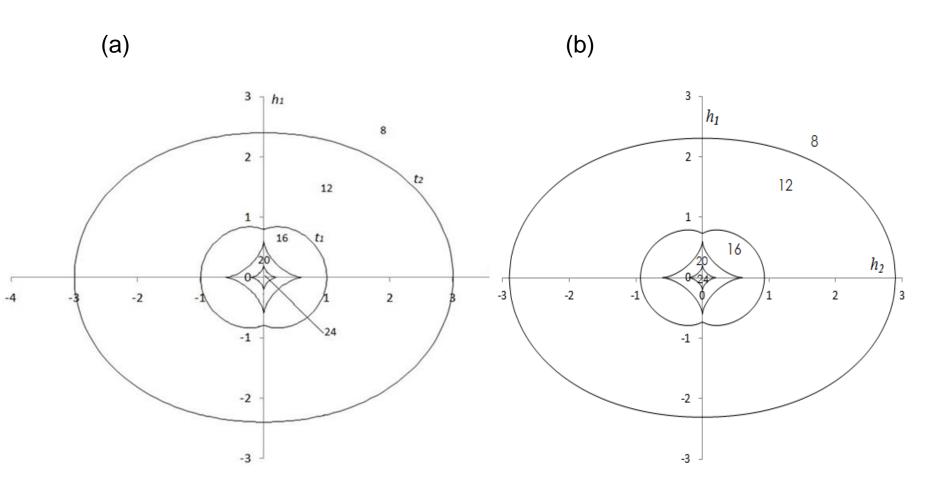
Из системы (2.15) можно получить бифуркационную кривую в форме астроиды которая разделяет области с 4 и 8 решениями  $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (3\nu)^{2/3}$ .

В **случае 2,**  $a_{33}^2=1$  из системы (2.13) можно получить бифуркационную кривую также в форме астроиды :  $h_1^{2/3}+h_2^{2/3}=\nu^{2/3}$ .

**Случай 3.** Решения уравнения  $P_2(a_{33}) = 0$  делят плоскость на области, где существуют 8, 4 и 0 решений.

Случаи, когда  $H_1 = 0$ ,  $H_2 = 0$ , рассматриваются аналогично.

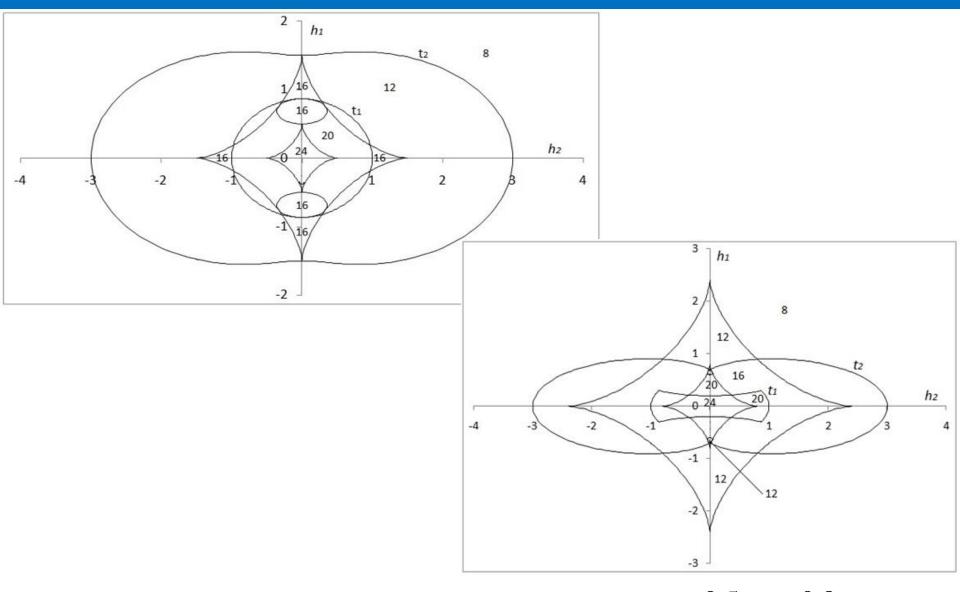
#### 2.7. Символьно-численные результаты



Области с одинаковым числом равновесий при

а) 
$$\nu = 0.2$$
,  $h_3 = 0$ , b)  $\nu = 0.2$ ,  $h_3 = 0.01$  (численный результат)

#### 2.7 Символьные результаты



Области с одинаковым числом равновесий при  $\nu = 0.5, \ \nu = 0.8$ 

#### 2.8. Другие частные случаи

Простейшие положения равновесия спутника-гиростата:

1. 
$$a_{11}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$ ,  $H_1 = 0$ ,

2. 
$$a_{12}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{32} = 0$ ,  $H_2 = 0$ ,

3. 
$$a_{13}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{12} = a_{23} = a_{33} = 0$ ,  $H_3 = 0$ ,

4. 
$$a_{21}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = 0$ ,  $H_2 = H_3 = 0$ ,

5. 
$$a_{22}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$ ,  $H_1 = H_3 = 0$ ,

6. 
$$a_{23}^2 = 1$$
,  $a_{13} = a_{33} = a_{21} = a_{22} = 0$ ,  $H_1 = H_2 = 0$ .

7. 
$$a_{31}^2 = 1$$
,  $a_{11} = a_{21} = a_{32} = a_{33} = 0$ ,  $H_1 = 0$ ,

8. 
$$a_{32}^2 = 1$$
,  $a_{12} = a_{22} = a_{31} = a_{33} = 0$ ,  $H_2 = 0$ ,

9. 
$$a_{33}^2 = 1$$
,  $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ ,  $H_3 = 0$ ,

Для 9 частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите, показано, что любая такая ориентация является равновесной и получены условия их существования.

## 2.10 Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов

Для осесимметричного спутника, когда, например 
$$A \neq B = C$$
,  $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$  система (2.4) упрощается и принимает вид  $(A-B)a_{21}a_{31}=0,$   $3(A-B)a_{11}a_{31}+(h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33})=0,$  (2.16)  $(A-B)a_{11}a_{21}-(h_1a_{21}+h_2a_{22}+h_3a_{23})=0.$  Случай 1)  $a_{21}=0$  Случай 2)  $a_{31}=0.$   $3(A-B)a_{11}a_{31}+(H_1a_{31}+H_2a_{32}+H_3a_{33})=0,$   $(A-B)a_{11}a_{21}+H_1a_{21}+H_2a_{22}+H_3a_{23}=0,$   $H_2a_{22}+H_3a_{23}=0,$   $H_2a_{32}+H_3a_{33}=0,$   $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,$   $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,$   $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,$  (2.18)

$$a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1,$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1,$$

$$a_{31}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1,$$

$$a_{12}^{2} a_{22} + a_{13} a_{23} = 0,$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$

$$a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

$$a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

$$(2.17)$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1,$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$

$$a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$

$$a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

49

#### 1. В первом случае из (2.17) получена система уравнений

$$9a_{11}^{4} + 6ma_{11}^{3} + (m^{2} + n^{2} - 9)a_{11}^{2} - 6ma_{11} - m^{2} = 0,$$

$$a_{31} = \frac{\mp na_{11}}{m + 3a_{11}}.$$
(2.19)

2. Во втором случае имеем при  $m = H_1/(A-B)$ ;  $n = \sqrt{H_2^2 + H_3^2/(A-B)}$ .  $a^4 - 2ma^3 + (m^2 + n^2 - 1)a^2 + 2ma - m^2 - 0$ 

$$a_{11}^4 - 2ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{11}^2 + 2ma_{11} - m^2 = 0,$$

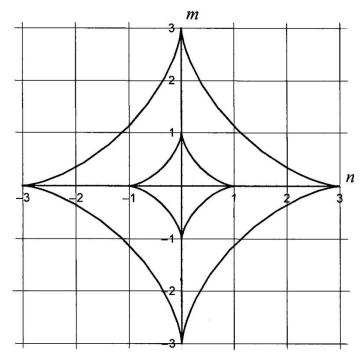
(2.20)

$$a_{21} = \frac{\pm na_{11}}{}$$
.

 $m-a_{\rm L}$  Из (2.25) и (2.26) были получены уравнения астроид

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 3^{2/3},$$
  
 $m^{2/3} + n^{2/3} = 1,$  (2.21)

которые разделяют области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций осесимметричного спутника



#### 2.11 Устойчивость положений равновесия

В качестве функции Ляпунова использовался обобщенный интеграл энергии (2.10) для осесимметричного случая (B=C) в виде

$$\frac{1}{2}[A\overline{p}^{2} + B(\overline{q}^{2} + \overline{r}^{2})] + \frac{1}{2}\omega_{0}^{2}(A - B)(3a_{31}^{2} - a_{21}^{2}) - \omega_{0}^{2}(H_{1}a_{11} + H_{2}a_{12} + H_{3}a_{13}) = \text{const.}$$
(2.22)

Получены достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата для случая 1: A-B < 0

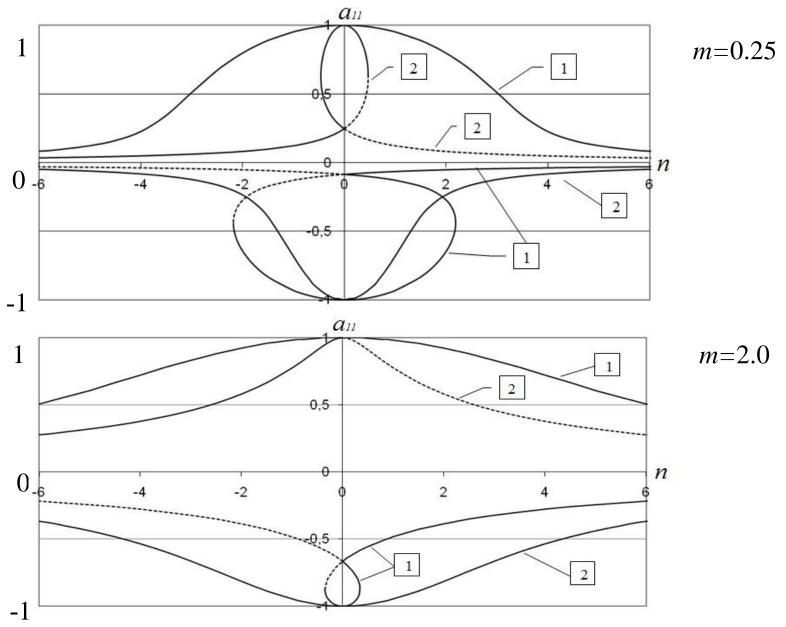
$$a_{11}(m+3a_{11}^3) < 0$$
,  $3a_{11}^2 + ma_{11} - 4 < 0$ , (2.23)

Для случая 2: A - B > 0

$$a_{11}[a_{11}(4a_{11}^2-1)+m] > 0, \quad a_{11}(m-a_{11}^3) > 0.$$
 (2.24)

В **случае 2**, при n>0, 0<|m|<1 существуют **4** устойчивых положения равновесия, а при  $|m|\geq 1$  существуют **2** устойчивых положения равновесия.

В **случае 1**, n < 0, 0 < |m| < 3 также существуют **4** устойчивых положения равновесия. При значениях  $|m| \ge 3$  существует **2** устойчивых положения равновесия



Пример решений уравнений (2.19) и (2.20) и выполнения условий устойчивости (пунктирная линия)

## Глава 3. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов

Уравнения движения спутника относительно центра масс на круговой орбите под действием постоянного момента

$$A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \tilde{a} = 0,$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \tilde{b} = 0,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \tilde{c} = 0;$$

$$p = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma},$$

$$q = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta}\sin\gamma,$$

$$r = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta}\cos\gamma.$$
(3.1)

В уравнениях (3.1), (3.2) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника,  $p, q, r, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  – проекции абсолютной угловой скорости спутника и проекции вектора постоянного момента на оси  $Ox, Oy, Oz; \omega_0$  – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите.

#### 3.1. Положения равновесия спутника

Положив в (3.1) и (3.2)  $\alpha=\alpha_0$ ,  $\beta=\beta_0$ ,  $\gamma=\gamma_0$ , (постоянные) получим следующие уравнения :

$$a_{22}a_{23}-3a_{32}a_{33}-a=0,$$
 
$$a_{23}a_{21}-3a_{33}a_{31}-b=0,$$
 
$$a_{21}a_{22}-3a_{31}a_{32}-c=0,$$
 
$$a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1,$$
 
$$a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1,$$
 
$$a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0.$$
 
$$3десь a=\frac{\tilde{a}}{\omega_0^2(C-B)}, b=\frac{\tilde{b}}{\omega_0^2(A-C)}, c=\frac{\tilde{c}}{\omega_0^2(B-A)}.$$

Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных A, B, C, a, b, c требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат.

Система (3.3) с использованием выражений для направляющих косинусов через самолетные углы и понятия результанта может быть сведена к одному алгебраическому уравнению 6-й степени относительно  $\mathcal{X}(x = (1 + 3\sin^2\alpha))$ :

$$x^2(b^2+c^2)^2(p_0x^6+p_1x^5+p_2x^4+p_3x^3+p_4x^2+p_5x+p_6)=0. \tag{3.5}$$
 Здесь 
$$p_0=a^2r^4+10a^3qr^3-80a^3qr^2+2a^2q^2r^3+57a^2q^2r^2-544a^2q^2r-32a^2r^3+400a^2r^2+10aq^3r^2+80aq^3r-720aq^3-480aqr^2+2720aqr+q^4r^2+32q^4r-144q^4+32q^2r^2-1088q^2r+3600q^2+256r^2,$$
 
$$p_1=8(-3a^3qr^3+58a^3qr^2-40a^2q^2r^2+420a^2q^2r+50a^2r^3-580a^2r^2-3aq^3r^2-83aq^3r+522aq^3-8aqr^3+716aqr^2-4072aqr-25q^4r+90q^4-70q^2r^2+1690q^2r-5220q^2-480r^2),$$
 
$$p_2=16(-40a^3qr^2+21a^2q^2r^2-336a^2q^2r-95a^2r^3+1241a^2r^2+90aq^3r-360aq^3+20aqr^3-1440aqr^2+9130aqr+12q^4r-27q^4+169q^2r^2-3769q^2r+11169q^2+16r^3+1392r^2),\dots$$
 
$$r=(b^2+c^2),$$
 
$$p_6=4096(a^2r^2+10aqr-4q^2r+9q^2+r^3+4r^2).$$
 
$$q=bc.$$

55

Применяя систему символьных вычислений Maple, построен базис Гребнера полиномов (3.3) и (3.4) относительно лексикографического упорядочения по переменным и получено алгебраическое уравнение шестого порядка относительно только одной переменной  $x = a_{33}^2$ 

$$P(x) = p_0 x^6 + p_1 x^5 + p_2 x^4 + p_3 x^3 + p_4 x^2 + p_5 x + p_6 = 0,$$
(3.6)

где

$$\begin{split} p_0 &= 4096, \\ p_1 &= -8192, \\ p_2 &= 256(16 - 6u^2 + 20uc + 17v), \\ p_3 &= -128(u^2v + 8c^2u^2 - 8u^2 + 40cu + 5cuv + 34v - c^2v^2), \\ p_4 &= 16(9u^4 + 257u^2 - 43u^2v + 16v^2 + 210cuv - 20cuv^2 + 20cu^3 \\ &\quad + 17v^2c^2 + 64c^2u^2), \\ p_5 &= 8(4u^2v^2 - 34u^2v - 38u^4 + 3u^4v - 130cu^3 + 5cu^3v - 20cuv^2 - 4c^2v^3 \\ &\quad - 68c^2u^2v + 3c^2u^2v^2 - 10c^3uv^2), \\ p_6 &= (4u^2 + u^2v + c^2v^2 + 5cuv)^2, \quad v = a^2 + b^2, \quad u = ab. \end{split}$$

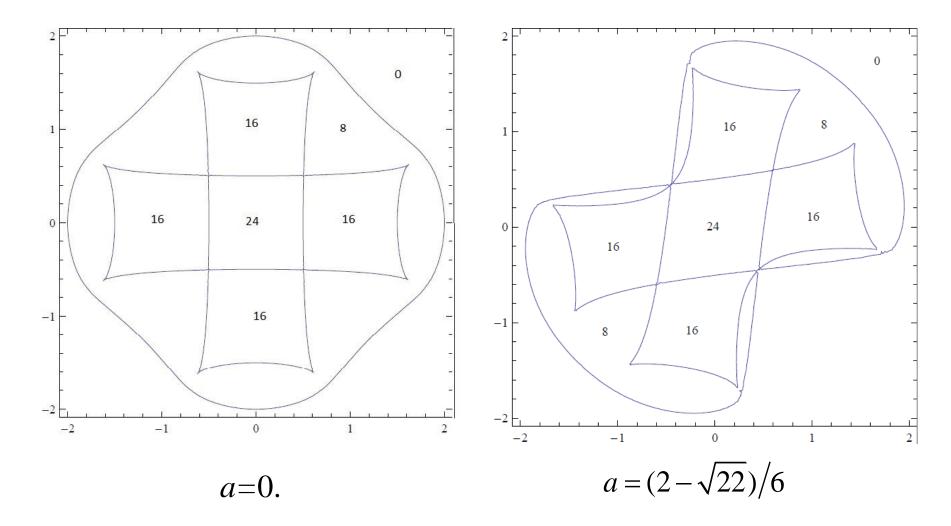
Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней воспользуемся теоремой Меймана, из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью. Дискриминант многочлена (3.6) имеет вид:  $(a^2 - b^2)^6 P_1^2(a, b, c) P_2(a, b, c) = 0$ .

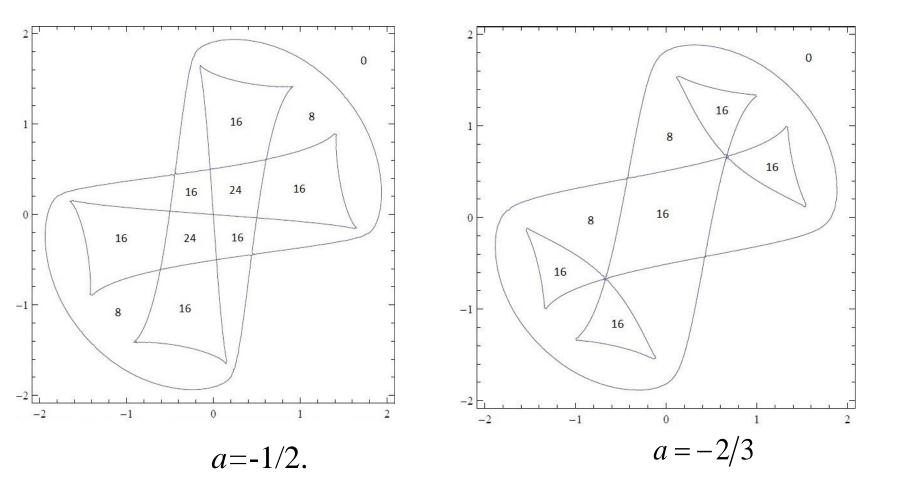
#### Результаты вычислений бифуркационных значений параметра a

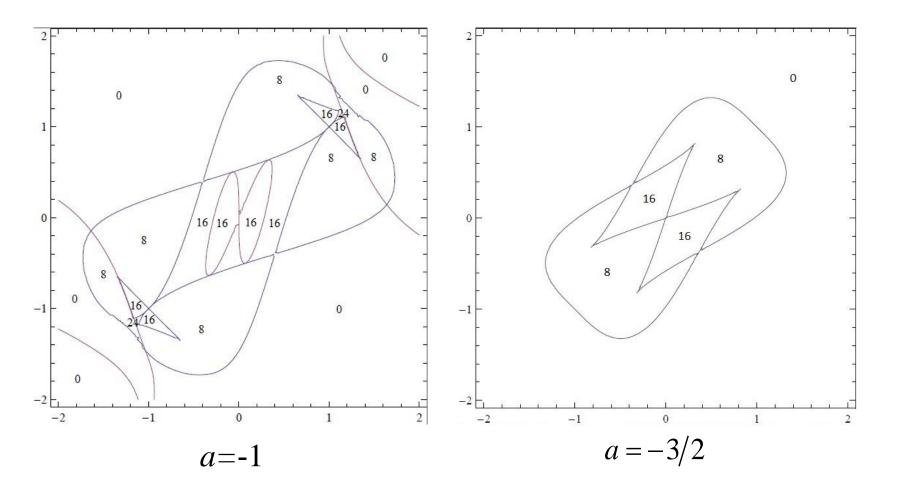
a	24	16	8	0
-2	-	-	1 точка	1 область
$(-35+\sqrt{193})/12$	-	2 точки	1 область	1 область
-3/2	_	2 области	2 области	1 область
$(-25+\sqrt{73})/12$	_	3 области	2 области	1 область
-7/6	4 области	11 областей	2 области	1 область
$-(2+\sqrt{22})/6$	2 области	9 областей	2 области	1 область
-1	2 области	9 областей	2 области	1 область
			2 точки	2 точки
-35/39	-	5 областей	4 области	3 области
-2/3	-	5 областей	2 области	1 область
				2 точки
-1/2	2 области	6 областей	2 области	1 область
$(2-\sqrt{22})/6$	1 область	4 области	2 области	1 область
0	1 область	4 области	1 область	1 область

 $a^{2} + b^{2} + c^{2} \le 5$ ,  $a^{2} + b^{2} \le 4$ ,  $a^{2} + c^{2} \le 4$ ,  $b^{2} + c^{2} \le 4$ .

57







#### Глава 4. Динамика гравитационноориентированного спутника при действии управляющих моментов

Уравнения движения спутника относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента и управляющего момента имеют следующий вид:

$$Ap'_{1} + (C - B)q_{1}r_{1} - 3\omega_{0}^{2}(C - B)a_{32}a_{33} + \overline{k}_{1}p_{1} = 0,$$

$$Bq'_{1} + (A - C)r_{1}p_{1} - 3\omega_{0}^{2}(A - C)a_{33}a_{31} + \overline{k}_{2}(q_{1} - \omega_{0}) = 0,$$

$$Cr'_{1} + (B - A)p_{1}q_{1} - 3\omega_{0}^{2}(B - A)a_{31}a_{32} + \overline{k}_{3}r_{1} = 0;$$

$$p_{1} = (\alpha' + \omega_{0})a_{21} + \gamma',$$

$$q_{1} = (\alpha' + \omega_{0})a_{22} + \beta'\sin\gamma,$$

$$r_{1} = (\alpha' + \omega_{0})a_{23} + \beta'\cos\gamma.$$

$$(4.1)$$

В уравнениях (4.1), (4.2) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника,  $p_1, q_1, r_1$  и  $M_x = -\bar{k_1}p_1, M_y = -\bar{k_2}(q_1 - \omega_0), M_z = -\bar{k_3}r_1$  – проекции абсолютной угловой скорости спутника и проекции вектора управляющего момента на оси  $Ox, Oy, Oz; \bar{k_1}, \bar{k_2}, \bar{k_3}$  – коэффициенты управления,  $\omega_0$  – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите.

#### 4.1 Уравнения движения

 $a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} + k_3a_{23} = 0,$ 

Вводя безразмерные параметры  $\theta_A = A/B, \ \theta_C = C/B, \ p = p_1/\omega_0,$  $q = q_1 / \omega_0$ ,  $r = r_1 / \omega_0$ ,  $\tilde{k}_1 = \bar{k}_1 / \omega_0 B$ ,  $\tilde{k}_2 = \bar{k}_2 / \omega_0 B$ ,  $\tilde{k}_3 = \bar{k}_3 / \omega_0 B$ ,  $\tau = \omega_0 t$  перепишем систему (4.1), (4.2) в безразмерном виде  $\theta_{A} \dot{p} + (\theta_{C} - 1)qr - 3(\theta_{C} - 1)a_{32}a_{33} + k_{1}p = 0,$  $\dot{q} + (\theta_A - \theta_C)rp - 3(\theta_A - \theta_C)a_{33}a_{31} + k_2(q-1) = 0,$ (4.3) $\theta_C \dot{r} + (1 - \theta_A) pq - 3(1 - \theta_A) a_{31} a_{32} + k_3 r_1 = 0;$  $p = (\dot{\alpha} + 1)a_{21} + \dot{\gamma},$  $q = (\dot{\alpha} + 1)a_{22} + \beta \sin \gamma$ , (4.4) $r = (\dot{\alpha} + 1)a_{23} + \beta \cos \gamma$ . Положив в (4.3) - (4.4)  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \ \beta = \beta_0 = \text{const}, \ \gamma = \gamma_0 = \text{const}, \ \text{получим систему}$  $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$ ,  $a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + k_1a_{21} = 0,$  $a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} + k_2(a_{22} - 1) = 0,$  $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ , (4.5)

позволяющую определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В (4.5)  $k_1 = \tilde{k_1} / (\theta_C - 1), \ k_2 = \tilde{k_2} / (\theta_A - \theta_C), \ k_3 = \tilde{k_3} / (1 - \theta_A)$ .

 $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$ 

#### 4.3 Условия асимптотической устойчивости

Уравнения (4.3), линеаризованные в окрестности нулевого решения

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0 \tag{4.6}$$

примут вид

$$\ddot{\overline{\alpha}} + k_2 \dot{\overline{\alpha}} + 3(\theta_A - \theta_C) \overline{\alpha} = 0,$$

$$\theta_C \ddot{\overline{\beta}} + k_3 \dot{\overline{\beta}} - (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\overline{\gamma}} + (1 - \theta_A) \overline{\beta} - k_3 \overline{\gamma} = 0,$$

$$\theta_A \ddot{\overline{\gamma}} + (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\overline{\beta}} + k_1 \dot{\overline{\gamma}} + k_1 \overline{\beta} + 4(1 - \theta_C) \overline{\gamma} = 0.$$
(4.7)

Характеристическое уравнение системы (4.12) имеет вид

$$[\lambda^2 + k_2 \lambda + 3(\theta_A - \theta_C)](A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4) = 0, \tag{4.8}$$
 где

$$\begin{split} A_{0} &= \theta_{A} \theta_{C}, \quad A_{1} = k_{1} \theta_{C} + k_{3} \theta_{A}, \\ A_{2} &= k_{1} k_{3} + (\theta_{A} + \theta_{C} - 1)^{2} + \theta_{A} (1 - \theta_{A}) + 4 \theta_{C} (1 - \theta_{C}), \\ A_{3} &= k_{1} \theta_{C} + k_{3} (3 + \theta_{A} - 3 \theta_{C}), \quad A_{4} = k_{1} k_{3} + 4 (1 - \theta_{A}) (1 - \theta_{C}). \end{split}$$

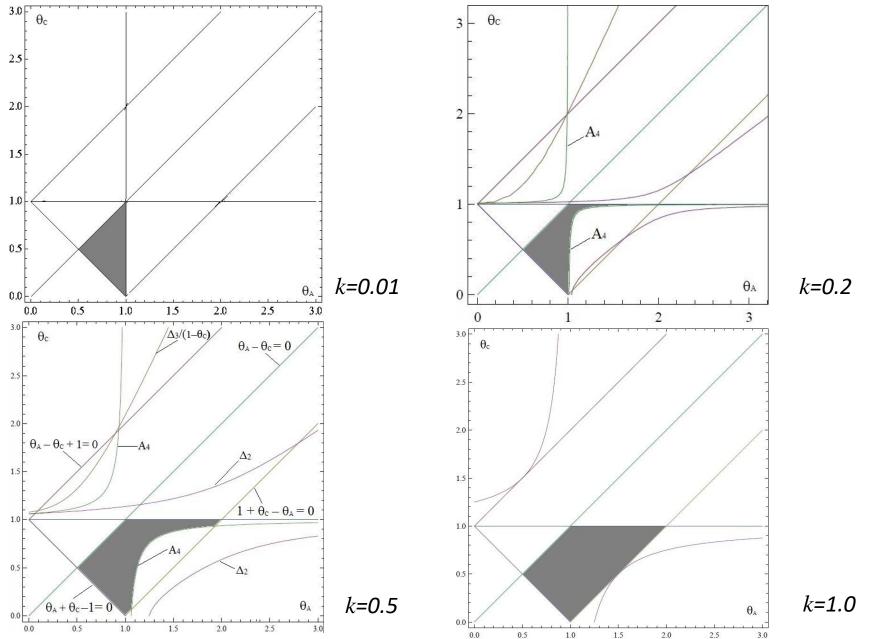
#### 4.3 Условия асимптотической устойчивости

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (условия Рауса - Гурвица) нулевого решения (4.6) имеют следующий вид:

$$\begin{split} k_2 &> 0, \quad \theta_A - \theta_C > 0, \\ \Delta_1 &= A_1 = k_1 \theta_C + k_3 \theta_A > 0, \\ \Delta_2 &= A_1 A_2 - A_0 A_3 = k_1^2 k_3 \theta_C + k_1 k_3^2 \theta_A + \\ &+ (1 - \theta_C) [k_1 \theta_C (1 - \theta_A + 3\theta_C) + k_3 \theta_A (1 - \theta_A)] > 0, \\ \Delta_3 &= A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 = 3(1 - \theta_C) \{k_1^2 k_3^2 \theta_C + k_1 k_3^3 \theta_A + \\ &+ k_1^2 \theta_C^2 (\theta_A + \theta_C - 1) + k_1 k_3 \theta_C [(\theta_A + \theta_C - 1)(2\theta_A - 1) + \\ &+ 3\theta_C (1 - \theta_C)] - k_3^2 \theta_A (1 - \theta_A)(\theta_A + \theta_C - 1)\} > 0, \\ \Delta_4 &= \Delta_3 A_4 > 0, \quad A_4 = k_1 k_3 + 4(1 - \theta_A)(1 - \theta_C) > 0. \end{split}$$

Для частного случая, когда  $k_1 = k_2 = k_3 = k$  необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (4.9) упрощаются и их удобно представить в графическом виде

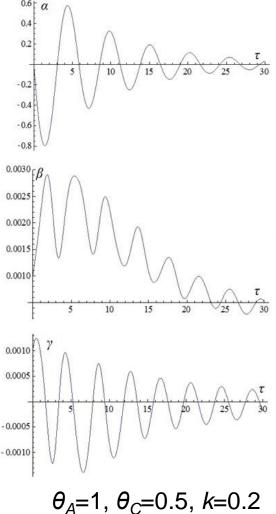
#### Примеры областей выполнения условий асимптотической устойчивости

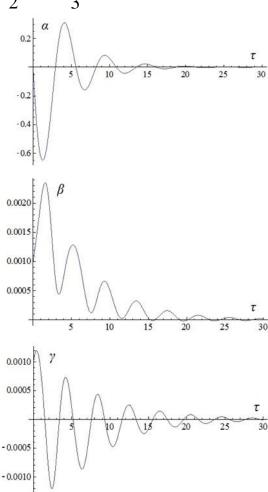


65

#### 4.4 Анализ переходных процессов

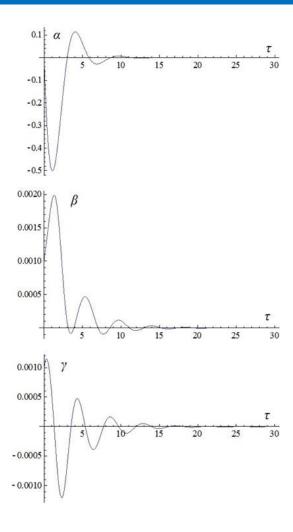
Численное интегрирование системы (4.3), (4.4) проводилось для случая  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ 



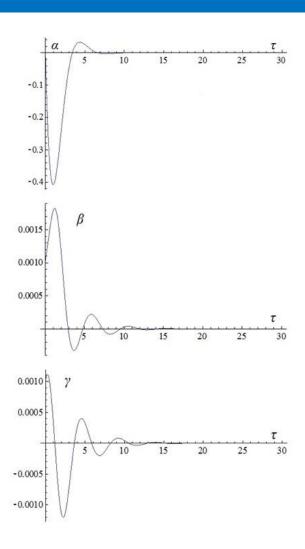


 $\theta_{\Delta}$ =1,  $\theta_{C}$ =0.5, k=0.5

#### 4.4 Анализ переходных процессов



$$\theta_A$$
=1,  $\theta_C$ =0.5,  $k$ =1.0



$$\theta_A$$
=1,  $\theta_C$ =0.5,  $k$ =1.5

#### 4.5 Случай осесимметричного спутника

Рассмотрим уравнения движения осесимметричного спутника, на который действует симметричный момент активного демпфирования, проекции суммарного вектора которого на оси связанной системы координат про-порциональны проекциям угловой скорости  $M_x = -\overline{k_1}p_1, M_y = -\overline{k_2}q_1, M_z = -\overline{k_3}r_1$ :

$$A\dot{p} + (C - B)qr - 3(C - B)a_{32}a_{33} + k_1p/\omega_0 = 0,$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp - 3(A - C)a_{33}a_{31} + \overline{k_2}q/\omega_0 = 0,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq - 3(B - A)a_{31}a_{32} + \overline{k_3}r/\omega_0 = 0;$$

$$p = \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + a_{21},$$

$$q = \dot{\psi}a_{32} + \dot{\vartheta}\sin\varphi + a_{22},$$

$$r = \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + a_{23}.$$
(4.11)

Положив <u>в</u> (4.10) - (4.11)  $\psi = \psi_0 = \mathrm{const}, \ \theta = \theta_0 = \mathrm{const}, \ \dot{\phi} = \mathrm{const}, \ \mathrm{получим} \ \mathrm{при}$   $A = B, \ k_3 = 0, \ r = r_0, \ \mathrm{уравнения}$ 

$$-(A-C)r_0a_{22} - 3(A-C)a_{32}a_{33} + a_{21}\overline{k_1}/\omega_0 = 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$

$$(A-C)r_0a_{21} - 3(A-C)a_{33}a_{31} + a_{22}\overline{k_2}/\omega_0 = 0, \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

$$r_0 = \dot{\varphi} + a_{23}, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0,$$

$$(4.12)$$

которые определяют стационарные движения осесимметричного спутника. 68

#### 4.5. Стационарные движения спутника

Вводя безразмерные параметры  $k_1=\overline{k_1}/(A-C)\omega_0,\ k_2=\overline{k_2}/(A-C)\omega_0$  система (4.19) примет вид

$$-r_0 a_{22} - 3a_{32} a_{33} + k_1 a_{21} = 0,$$

$$r_0 a_{21} - 3a_{33} a_{31} + k_2 a_{22} = 0,$$

$$r_0 - \dot{\varphi} - a_{23} = 0.$$
(4.13)

Для этой системы уравнений ставится задача: для заданных параметров системы требуется определить все направляющие косинусы. Решение (4.13) существуют при  $|r_0 - \dot{\varphi}| \le 1$ .

Полином из построенного базиса Гребнера, который зависит только от одной переменной  $a_{33}$  имеет вид

$$P(a_{33}) = 81a_{33}^{8} + p_{1}a_{33}^{6} + p_{2}a_{33}^{4} + p_{3}a_{33}^{2} + p_{4} = 0.$$

$$p_{1} = 54(2r_{0}\dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^{2} - 3),$$

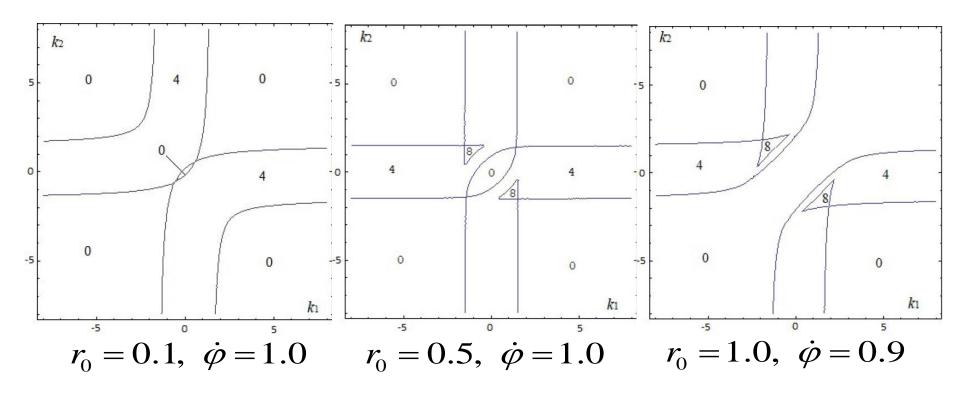
$$p_{2} = 9[6r_{0}^{2}(\dot{\varphi} - r_{0})^{2} + 2k_{1}k_{2}(\dot{\varphi} - r_{0})^{2} + 10r_{0}^{2} - 12\dot{\varphi}r_{0} + k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + 9]$$

$$p_{3} = 3[(\dot{\varphi} - r_{0})^{2} - 1][3(k_{1}^{2} + k_{2}^{2}) + 4k_{1}k_{2}r_{0}(\dot{\varphi} - r_{0}) + 2r_{0}^{2}(2r_{0}\dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^{2} - 3)],$$

$$p_{4} = [(\dot{\varphi} - r_{0})^{2} - 1]^{2}(k_{1}k_{2} + r_{0}^{2})^{2}.$$

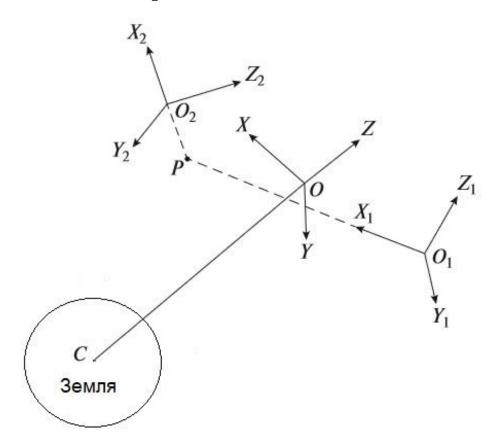
$$(4.14)$$

Дискриминант полинома (4.14) задает границы областей с одинаковым числом стационарных движений осесимметричного спутника



Осесимметричный спутник на круговой орбите под действием гравитационного и управляющего моментов может иметь не более 16 стационарных решений

# Глава 5. Динамика системы двух тел, соединенных сферическим шарниром на круговой орбите



Здесь  $(a_1,b_1,c_1)$  —координаты шарнира Р в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$   $(a_2,b_2,c_2)$  — координаты шарнира Р в системе координат  $O_2x_2y_2z_2$   $M=M_1M_2/(M_1+M_2), \quad M_i$  — масса i — го тела

#### 5.1. Уравнения движения

Уравнения движения системы спутник-стабилизатор на круговой орбите в случае  $a_1 \neq 0, \ a_2 \neq 0, \ b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$  имеют вид:

$$A_{1}\dot{p}_{1} + (C_{1} - B_{1})q_{1}r_{1} = 3\omega_{0}^{2}(C_{1} - B_{1})a_{32}a_{33},$$

$$(5.1)$$

$$(B_{1} + Ma_{1}^{2})\dot{q}_{1} - Ma_{1}a_{2}(a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33})\dot{q}_{2} + Ma_{1}a_{2}(a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32})\dot{r}_{2} + \\
+ Ma_{1}a_{2}\{a_{13}[r_{2}(p_{2}b_{13} - r_{2}b_{11}) - q_{2}(q_{2}b_{11} - p_{2}b_{12})] + \\
+ a_{23}[r_{2}(p_{2}b_{23} - r_{2}b_{21}) - q_{2}(q_{2}b_{21} - p_{2}b_{22})] + \\
+ a_{33}[r_{2}(p_{2}b_{33} - r_{2}b_{31}) - q_{2}(q_{2}b_{31} - p_{2}b_{32})] + [(A_{1} - C_{1}) - Ma_{1}^{2})]r_{1}p_{1} = \\
= 3\omega_{0}^{2}(A_{1} - C_{1})a_{33}a_{31} - Ma_{1}\omega_{0}^{2}[a_{2}(a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}) + 3a_{33}(a_{1}a_{31} - a_{2}b_{31})],$$

$$(C_{1} + Ma_{1}^{2})\dot{r}_{1} + Ma_{1}a_{2}[(a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33})\dot{q}_{2} - (a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32})]\dot{r}_{2} + \\
-Ma_{1}a_{2}\{a_{12}[r_{2}(p_{2}b_{13} - r_{2}b_{11}) - q_{2}(q_{2}b_{11} - p_{2}b_{12})] + \\
+a_{22}[r_{2}(p_{2}b_{23} - r_{2}b_{21}) - q_{2}(q_{2}b_{21} - p_{2}b_{22})] + \\
+a_{32}[r_{2}(p_{2}b_{33} - r_{2}b_{31}) - q_{2}(q_{2}b_{31} - p_{2}b_{32})] + [(B_{1} - A_{1}) + Ma_{1}^{2})]p_{1}q_{1} = \\
= 3\omega_{0}^{2}(B_{1} - A_{1})a_{31}a_{32} + Ma_{1}\omega_{0}^{2}[a_{2}(a_{13}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}) + 3a_{32}(a_{1}a_{31} - a_{2}b_{31})],$$

## 5.1. Уравнения движения

$$A_{2}\dot{p}_{2} + (C_{2} - B_{2})q_{2}r_{2} = 3\omega_{0}^{2}(C_{2} - B_{2})b_{32}b_{33},$$

$$(5.4)$$

$$(B_{2} + Ma_{2}^{2})\dot{q}_{2} - Ma_{1}a_{2}[(a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33})\dot{q}_{1} -$$

$$-(a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33})\dot{r}_{1}] + Ma_{1}a_{2}\{b_{13}[r_{1}(p_{1}a_{13} - r_{1}a_{11}) - q_{1}(q_{1}a_{11} - p_{1}a_{12})] +$$

$$+b_{23}[r_{1}(p_{1}a_{23} - r_{1}a_{21}) - q_{1}(q_{1}a_{21} - p_{1}a_{22})] + b_{33}[r_{1}(p_{1}a_{33} - r_{1}a_{31}) - q_{1}(q_{1}a_{31} - p_{1}a_{32})] \} +$$

$$+[(A_{2} - C_{2}) - Ma_{2}^{2}]r_{2}p_{2} + Ma_{2}b_{1}\{b_{13}[p_{1}(q_{1}a_{11} - p_{1}a_{12}) - r_{1}(r_{1}a_{12} - q_{1}a_{13})] +$$

$$+b_{23}[p_{1}(q_{1}a_{21} - p_{1}a_{22}) - r_{1}(r_{1}a_{22} - q_{1}a_{23})] + b_{33}[p_{1}(q_{1}a_{31} - p_{1}a_{32}) - r_{1}(r_{1}a_{32} - q_{1}a_{33})] \} =$$

$$= 3\omega_{0}^{2}(A_{2} - C_{2})b_{33}b_{31} - M\omega_{0}^{2}a_{2}[a_{1}(a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33}) - 3b_{33}(a_{2}b_{31} - a_{1}a_{31})],$$

$$(C_{2} + Ma_{2}^{2})\dot{r}_{2} + Ma_{1}a_{2}[(a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32})\dot{q}_{1} - (a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32})\dot{r}_{1}] +$$

$$+[(B_{2} - A_{2}) + Ma_{2}^{2}]p_{2}q_{2} - Ma_{1}a_{2}\{b_{12}[r_{1}(p_{1}a_{13} - r_{1}a_{11}) - q_{1}(q_{1}a_{11} - p_{1}a_{12})] +$$

$$+b_{22}[r_{1}(p_{1}a_{23} - r_{1}a_{21}) - q_{1}(q_{1}a_{21} - p_{1}a_{22})] + b_{32}[r_{1}(p_{1}a_{33} - r_{1}a_{31}) - q_{1}(q_{1}a_{31} - p_{1}a_{32})] \} =$$

$$= 3\omega_{0}^{2}(B_{2} - A_{2})b_{31}b_{32} + M\omega_{0}^{2}a_{2}[a_{1}(a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}) + 3b_{32}(a_{2}b_{31} - a_{1}a_{31})].$$

$$(5.6)$$

Здесь  $a_{kj}^{(1)} = a_{kj}$ ,  $a_{kj}^{(2)} = b_{kj}$  направляющие косинусы определяющие ориентацию первого и второго тела в орбитальной системе координат;  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  - проекции абсолютной угловой скорости i-го тела на оси  $O_i x_i$ ,  $O_i y_i$ ,  $O_i z_i$ ;

## 5.2. Положения равновесия

Положив в (5.1) - (5.6)  $\alpha_i = \mathrm{const}, \, \beta_i = \mathrm{const}, \, \gamma_i = \mathrm{const}$  получим стационарные уравнения:

$$\begin{aligned} &a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} = 0, \\ &m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) = 0, \\ &n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) = 0, \\ &b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} = 0, \\ &m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) = 0, \\ &n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) = 0, \\ &a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\ &a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ &a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, \\ &m_1 = \frac{(A_1 - C_1) - Ma_1^2}{Ma_1a_2} & n_1 = \frac{(B_1 - A_1) + Ma_1^2}{Ma_1a_2}, \\ &m_2 = \frac{(A_2 - C_2) - Ma_2^2}{Ma_1a_2}, &n_2 = \frac{(B_2 - A_2) + Ma_2^2}{Ma_1a_2}, \end{aligned}$$

(5.7)

которые определяет положения равновесия системы спутник-стабилизатор в орбитальной системе координат.

## Пространственные решения

Уравнения 2, 3, 5 и 6 системы (9) образуют однородную подсистему относительно переменных  $a_{21}, a_{31}, b_{21}, b_{31}$ 

$$a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} = 0,$$

$$m_{1}(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (a_{23}b_{21} - 3a_{32}b_{31}) = 0,$$

$$n_{1}(a_{22}a_{21} - 3a_{32}a_{31}) - (a_{22}b_{21} - 3a_{32}b_{31}) = 0,$$

$$b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} = 0,$$

$$+(b_{23}a_{21} - 3b_{33}a_{31}) + m_{2}(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) = 0,$$

$$-(b_{22}a_{21} - 3b_{32}a_{31}) + n_{2}(b_{22}b_{21} - 3b_{32}b_{31}) = 0,$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} + a_{23}^{2} = 1,$$

$$a_{21}^{2} + a_{32}^{2} + a_{33}^{2} = 1,$$

$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0,$$

$$b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} = 0.$$

$$(5.7)$$

Если определитель этой подсистемы  $\Delta \neq 0$ , то  $a_{21} = a_{31} = b_{21} = b_{31} = 0$  и решения имеют вид:

$$(1-4). \ a_{22}^2 = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0, a_{33}^2 = 1; \quad b_{22}^2 = 1, b_{23} = 0, b_{32} = 0, b_{33}^2 = 1$$

$$(5-8). \ a_{22} = 0, a_{23}^2 = 1, a_{32}^2 = 1, a_{33} = 0; \quad b_{22} = 0, b_{23}^2 = 1, b_{32}^2 = 1, b_{33} = 0.$$

**Случай 2.** Рассматривая аналогично подсистемы (5.7) относительно переменных  $a_{23}, a_{33}$  и  $b_{23}, b_{33}$  при  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ , получим  $(a_{23} = a_{33} = b_{23} = b_{33} = 0)$ 

$$n_{1}(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) = 0,$$

$$n_{2}(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) = 0,$$

$$a_{21}^{2} + a_{22}^{2} = 1, b_{21}^{2} + b_{22}^{2} = 1,$$

$$a_{31}^{2} + a_{32}^{2} = 1, b_{31}^{2} + b_{32}^{2} = 1,$$

$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0, b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} = 0.$$

$$(5.8)$$

Решения которой получено с использованием системы компьютерной Алгебры методом построения базиса Гребнера

$$P_{1}(a_{32})P_{2}(n_{1},n_{2},a_{32}) = 0.$$

$$P_{1}(a_{32}) = a_{32}(a_{32}^{2} - 1),$$

$$P_{2}(n_{1},n_{2},a_{32}) = 64n_{1}^{2}(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)a_{32}^{4} - 32(2n_{1}^{2} - 1)(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)a_{32}^{2} + \left[ (4n_{1}n_{2} + 2)^{2} - 9(n_{1} + n_{2})^{2} \right].$$

$$(5.9)$$

#### Случай 2. Получим решения системы (5.8)

(I) 
$$(1-4)$$
.  $a_{32} = a_{33} = 0$ ,  $a_{31}^2 = 1$ ;  $b_{32} = b_{33} = 0$ ,  $b_{31}^2 = 1$ ;   
 $(a_{32} = 0)$   $(5-8)$ .  $a_{21} = a_{23} = 0$ ,  $a_{22}^2 = 1$ ;  $b_{21} = b_{23} = 0$ ,  $b_{22}^2 = 1$ ;  $\Delta_1 = (b_{31} - m_1 a_{31}) \neq 0$ ,  $(|m_1| \neq 1)$ ;  $\Delta_2 = (a_{31} - m_2 b_{31}) \neq 0$ ,  $(|m_2| \neq 1)$ . (5.10)

(II) 
$$(1-4)$$
.  $a_{31} = a_{33} = 0$ ,  $a_{32}^2 = 1$ ;  $b_{31} = b_{33} = 0$ ,  $b_{32}^2 = 1$ ;   
( $a_{32}^2 = 1$ )  $(5-8)$ .  $a_{22} = a_{23} = 0$ ,  $a_{21}^2 = 1$ ;  $b_{22} = b_{23} = 0$ ,  $b_{21}^2 = 1$ ;  $\Delta_1 = (b_{21} + n_1 a_{21}) \neq 0$ ,  $(|n_1| \neq 1)$ ;  $\Delta_2 = (a_{21} + n_2 b_{21}) \neq 0$ ,  $(|n_2| \neq 1)$ . (5.11)

(III) 
$$a_{32}^{2} = \frac{(2n_{1}^{2} - 1)}{4n_{1}^{2}} \pm \frac{(8n_{1}^{3}n_{2} - 5n_{1}(n_{1} + n_{2}) + 2)\sqrt{(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)}}{8n_{1}^{2}(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)}$$

$$a_{31}^{2} = 1 - a_{32}^{2}, \quad a_{33} = 0; \quad a_{21}^{2} = a_{32}^{2}, \quad a_{22}^{2} = a_{31}^{2}, \quad a_{23} = 0;$$

$$b_{32}^{2} = \frac{(2n_{2}^{2} - 1)}{4n_{2}^{2}} \pm \frac{(8n_{2}^{3}n_{1} - 5n_{2}(n_{1} + n_{2}) + 2)\sqrt{(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)}}{8n_{2}^{2}(4n_{1}n_{2} - 1)(n_{1}n_{2} - 1)},$$

$$b_{31}^{2} = 1 - b_{32}^{2}, \quad b_{33} = 0; \quad b_{21}^{2} = b_{32}^{2}, \quad b_{22}^{2} = b_{31}^{2}, \quad b_{23} = 0.$$

$$(5.12)$$

При условии  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0.$ 

#### Случай 3. Рассматривая аналогично случаю 2 подсистему (5.7)

относительно переменных  $a_{22}, a_{32}, b_{22}, b_{32}$  получим решения

(I) 
$$(1-4)$$
.  $a_{32} = a_{33} = 0$ ,  $a_{31}^2 = 1$ ;  $b_{32} = b_{33} = 0$ ,  $b_{31}^2 = 1$ ;   
( $a_{33} = 0$ )  $(5-8)$ .  $a_{21} = a_{22} = 0$ ,  $a_{23}^2 = 1$ ;  $b_{21} = b_{22} = 0$ ,  $b_{23}^2 = 1$ ;  $\Delta_3 = (b_{31} - n_1 a_{31}) \neq 0$ ,  $(|n_1| \neq 1)$ ;  $\Delta_4 = (a_{31} - n_2 b_{31}) \neq 0$ ,  $(|n_2| \neq 1)$ . (5.13)

(II) 
$$(1-4). \ a_{31} = a_{32} = 0, \ a_{33}^2 = 1; \quad b_{31} = b_{32} = 0, \ b_{33}^2 = 1;$$

$$(a_{33}^2 = 1) \quad (5-8). \ a_{22} = a_{23} = 0, \ a_{21}^2 = 1; \quad b_{22} = b_{23} = 0, \ b_{21}^2 = 1;$$

$$\Delta_3 = (b_{21} + n_1 a_{21}) \neq 0, (|n_1| \neq 1); \Delta_4 = (a_{21} - n_2 b_{21}) \neq 0, (|n_2| \neq 1).$$

$$(5.14)$$

(III) 
$$a_{33}^2 = \frac{32m_1(2m_1^2m_2 + m_1 - m_2) - 25 \pm (8m_1^2 - 5)\sqrt{64m_1m_2(m_1m_2 + 1) + 25}}{64m_1^2(2m_1m_2 + 1)},$$

$$a_{31}^2 = 1 - a_{33}^2, \quad a_{32} = 0; \quad a_{21}^2 = a_{33}^2, \quad a_{23}^2 = a_{31}^2, \quad a_{22} = 0;$$

$$b_{33}^2 = \frac{32m_2(2m_2^2m_1 + m_2 - m_1) - 25 \pm (8m_2^2 - 5)\sqrt{64m_1m_2(m_1m_2 + 1) + 25}}{64m_2^2(2m_1m_2 + 1)},$$

$$b_{31}^2 = 1 - b_{33}^2, \quad b_{32} = 0; \quad b_{21}^2 = b_{33}^2, \quad b_{23}^2 = b_{31}^2, \quad b_{22} = 0.$$

При условии  $\Delta_3 \neq 0, \Delta_4 \neq 0.$ 

# В диссертации получены следующие основные новые результаты, которые выносятся на защиту:

- 1. Разработаны аналитические и символьно-численные методы исследования положений равновесия и стационарных движений спутника. Предложены методы разбиения пространства параметров на однородные области, соответствующие равному числу положений равновесия. Получено полное решение задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиростатического момента и выполнено исследование достаточных условий их устойчивости на круговой орбите. Определены области существования положений равновесия.
- Решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений вектора гиростатического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.
- 3. Решение задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из трех плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей.

79

- 4. Решение задачи о положениях равновесия спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента и исследование достаточных условий их устойчивости.
- 5. Решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического момента для произвольных значений вектора аэродинамического момента и инерционных параметров; исследованы положения равновесия спутника и достаточные условия их устойчивости.
- 6. Решение прямой задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента во всех случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено исследование изменения областей с одинаковым числом положений равновесия спутника.
- 7. Решение задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного момента в связанной со спутником системе координат. Проведено символьное исследование изменения областей с одинаковым числом положений равновесия. 80

- 8. Метод исследования положений равновесия спутника, на который кроме гравитационного момента действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Проведены анализ условий асимптотической устойчивости положения равновесия спутника и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.
- 9. Решение задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента.
- 10. Разработан алгоритм определения равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

### Основные выводы диссертации:

- 1. Разработанные в диссертации символьно-численные методы дают в сочетании с теоремами Ляпунова и Рауса сравнительно простые и эффективные алгоритмы исследования положений равновесия спутника и их устойчивости на круговой орбите при действии гравитационного, гиростатического, аэродинамического, постоянного и управляющего моментов.
- 2. Использование маховиков, влияние аэродинамических и постоянных моментов, в системах пассивной стабилизации дает возможность соответствующим подбором параметров получить более широкий диапазон устойчивых стационарных движений в сравнении со спутником-твердым телом.
- 3. Применение активного управляющего момента, зависящего от проекций угловой скорости позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите.
- 4. Использование активных управляющих моментов в позволяет обеспечить стационарные вращения осесимметричного спутника. Получены соотношения, определяющие зависимость изменения ориентации оси симметрии спутника в орбитальной системе координат от параметров управляющего момента для широкого диапазона значений.
- 5. Составная схема спутник-стабилизатор, состоящая из двух соединенных сферическим шарниром тел, позволяет решать задачу ориентации при любых параметрах спутника и обеспечить гравитационно-устойчивые пространственные конфигурации системы.

## Основные результаты диссертации опубликованы в работах

- 1. Сарычев В.А., Гутник С.А. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космич. исслед. 1984. T.22. № 3. C.323-326. (Scopus/WoS)
- Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems // Mathematics and Computers in Simulation. 2001. V. 57. P.211-215. (Scopus).
- 3. Гутник С.А., Сарычев В.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость // Прикладная математика механика (ПММ). 2014. Т. 78. Вып. 3. C.356-368. (Scopus/WoS)
- 4. Гутник С.А., Сарычев В.А. Символьно численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата // Программирование. 2014. № 3. С. 49-58. (Scopus/WoS)
- Гутник С. А., Сантуш Л., Сарычев В. А., Силва А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость //Известия РАН. Теория и системы управления. (ТИСУ) 2015. №3. С.142-155. (Scopus/WoS)

- 6. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic-Numerical investigation of gyrostat satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Berlin Heidelberg. 2013. V. 8136. P. 169–178. (Scopus /WoS)
- 7. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата //Программирование. 2017.Т.43 № 2. С.35–44.(Scopus/WoS)
- 8. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Heidelberg. 2011. Vol. 6885. P. 192-199. (Scopus)
- 9. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Космич. исслед. 2012. Т. 50. № 5. С. 394-402. (Scopus/WoS)
- 10. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 6. С.488-496.
- 11. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование устойчивости положений равновесия // Космич. исслед. 2016. Т.54. №5. С.415-426. (Scopus/WoS)

- 12. Sarychev V.A., Gutnik S.A. On the Different Types of Equilibria of Satellite Subject to Gravitational and Aerodynamic Torques in a Circular Orbit //Published in: Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems International Conference (Pyatnitskiy's Conference). 2016. IEEE Xplore. (Scopus/WoS).
- 13. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A Symbolic investigation of the influence of aerodynamic forces on satellite equilibria // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer. Cham. 2016. V. 9890. P. 243–254. (Scopus)
- 14. Gutnik S.A. Application of Computer Algebra to Investigation of the Relative Equilibria of a Satellite //In: Proc. of Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation. ACM ISSAC'93. ACM Press, New York, 1993. P. 63-64.(Scopus)
- 15. Сарычев В.А., Гутник С.А. Равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Космич. исслед. 1994. Т.32. № 4-5. С. 43-50.
- 16. Gutnik S.A., Guerman A., Sarychev V.A. Application of Computer Algebra Methods to Investigation of Influence of Constant Torque on Stationary Motions of Satellite// Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Cham. 2015. V. 9301. P. 198–209. (Scopus)

- 17. Герман А. Д., Гутник С. А., Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Известия. РАН. Теория и системы управления. 2017. Т. 56. №1. С. 128-140.
- 18. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A symbolic study of the satellite dynamics subject to damping torques // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Cham. 2017. V. 10490. P. 167–182. (Scopus)
- 19. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Satellite dynamics under the influence of gravitational and damping torques //Advances in the Astronautical Sciences, Publisher: Univelt Inc. 2017, V.161, Article number Code 213319. P. 3-12. (Scopus)
- 20. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика гравитационно-ориентированного спутника при действии активных демпфирующих моментов // Космич. исслед. 2018. Т. 56. №1. С. 77-84. (Scopus/WoS)
- 21. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов символьных вычислений для исследования стационарных движений осесим-метричного спутника // Программирование. 2018. Т. 44 № 2. С. 94–99. (Scopus/WoS)
- 22. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите // Программирование. 2019. Т. 45 № 2. С. 32–40. (Scopus)