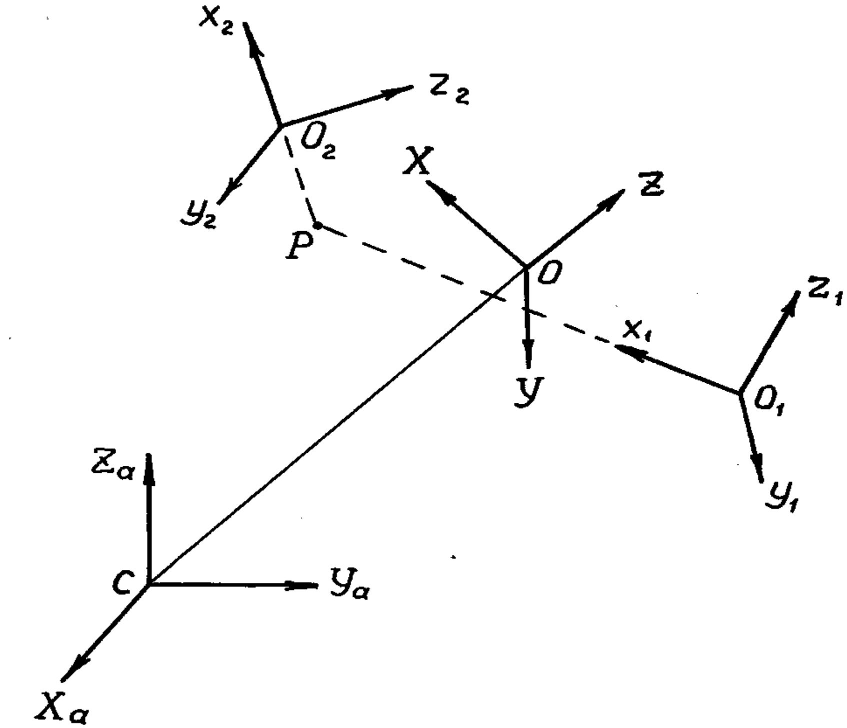
Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите

С.А. Гутник

Московский Физико-Технический Институт

Семинар СА 28 февраля 2018 ВМК МГУ г. Москва

Постановка задачи



Здесь (a_1, b_1, c_1) –координаты шарнира Р в системе координат $O_1x_1y_1z_1$

(a_2, b_2, c_2) – координаты шарнира Р в системе координат $O_2x_2y_2z_2$

1. Уравнения движения

Рассмотрим пространственные колебания системы двух соединенных сферическим шарниром тел. Выражения для кинетической энергии и силовой функции имеют вид :

$$2T=(M_1+M_2)(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)+\sum_{i=1}^{2}\Big[(A_i p_i^2+B_i q_i^2+C_i r_i^2)+M\mathbf{s}_i\mathbf{S}_i^T\mathbf{S}_i\mathbf{s}_i^T\Big]- \qquad (1)$$

$$-2M\mathbf{s}_1\mathbf{S}_1^T\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2\mathbf{S}_2\mathbf{s}_2^T,$$

$$U=\mu\frac{M_1+M_2}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\rho^3}\sum_{i=1}^{2}[(B_i+C_i-2A_i)a_{31}^{(i)2}+(C_i+A_i-2B_i)a_{32}^{(i)2}+ \qquad (2)$$

$$+(A_i+B_i-2C_i)a_{33}^{(i)2}-Ms_is_i^T]+\frac{\mu M}{\rho^3}\mathbf{s}_1\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2\mathbf{s}_2^T+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\mu M}{\rho^3}[(a_1a_{31}^{(1)}+b_1a_{32}^{(1)}+c_1a_{33}^{(1)})-(a_2a_{31}^{(2)}+b_2a_{32}^{(2)}+c_2a_{33}^{(3)})]^2.$$

$$\mathbf{S}_i=\begin{bmatrix}0 & -r_i & q_i\\ r_i & 0 & -p_i\\ -q_i & p_i & 0\end{bmatrix}$$

Здесь A_i, B_i, C_i главные центральные моменты инерции; $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ –самолетные углы и $a_{kj}^{(i)}$ - направляющие косинусы определяющие ориентацию ***i***-го тела в орбитальной системе координат, $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{q_i}$, $\boldsymbol{r_i}$ - проекции абсолютной угловой скорости ***i***-го тела на оси O_ix_i, O_iy_i, O_iz_i; x_0, y_0, z_0 – абсолютные координаты центра масс системы спутник-стабилизатор. $\boldsymbol{M_i}$ – масса ***i***-го тела, $\boldsymbol{M = M_1 M_2/(M_1+M_2)}$, , a_i, b_i, c_i - координаты шарнира ***P*** в системе координат $O_ix_iy_iz_i$, $\mathbf{s}_i=[a_i\ b_i\ c_i]$, $\mathbf{A}_n=[a_{kj}^{(i)}(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)]\ (i=1,2)$.

1. Уравнения движения

Уравнения движения системы спутник-стабилизатор на круговой орбите ($e=0,\ \frac{\mu}{\rho^3}=\omega_0^2$) в случае $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$ имеют вид:

$$A_1\dot{p}_1 + (C_1 - B_1)q_1 r_1 = 3\omega_0^2 (C_1 - B_1)a_{32}a_{33}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&(B_1 + Ma_1^2)\dot{q}_1 - Ma_1a_2(a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33})\dot{q}_2 + Ma_1a_2(a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32})\dot{r}_2 + \\
&+Ma_1a_2\{a_{13}[r_2(p_2b_{13} - r_2b_{11}) - q_2(q_2b_{11} - p_2b_{12})] + \\
&+a_{23}[r_2(p_2b_{23} - r_2b_{21}) - q_2(q_2b_{21} - p_2b_{22})] + \\
&+a_{33}[r_2(p_2b_{33} - r_2b_{31}) - q_2(q_2b_{31} - p_2b_{32})]\} + [(A_1 - C_1) - Ma_1^2]r_1p_1 = \\
&= 3\omega_0^2(A_1 - C_1)a_{33}a_{31} - Ma_1\omega_0^2[a_2(a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}) + 3a_{33}(a_1a_{31} - a_2b_{31})],
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&(C_1 + Ma_1^2)\dot{r}_1 + Ma_1a_2[(a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33})\dot{q}_2 - (a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32})]\dot{r}_2 + \\
&-Ma_1a_2\{a_{12}[r_2(p_2b_{13} - r_2b_{11}) - q_2(q_2b_{11} - p_2b_{12})] + \\
&+a_{22}[r_2(p_2b_{23} - r_2b_{21}) - q_2(q_2b_{21} - p_2b_{22})] + \\
&+a_{32}[r_2(p_2b_{33} - r_2b_{31}) - q_2(q_2b_{31} - p_2b_{32})]\} + [(B_1 - A_1) + Ma_1^2]p_1q_1 = \\
&= 3\omega_0^2(B_1 - A_1)a_{31}a_{32} + Ma_1\omega_0^2[a_2(a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}) + 3a_{32}(a_1a_{31} - a_2b_{31})],
\end{aligned} \tag{5}$$

1. Уравнения движения

$$A_2\dot{p}_2+(C_2-B_2)q_2r_2=3\omega_0^2(C_2-B_2)b_{32}b_{33}, \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}
&(B_2+Ma_2^2)\dot{q}_2-Ma_1a_2[(a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+a_{33}b_{33})\dot{q}_1-\\
&-(a_{12}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{32}b_{33})\dot{r}_1]+Ma_1a_2\{b_{13}[r_1(p_1a_{13}-r_1a_{11})-q_1(q_1a_{11}-p_1a_{12})]+\\
&+b_{23}[r_1(p_1a_{23}-r_1a_{21})-q_1(q_1a_{21}-p_1a_{22})]+b_{33}[r_1(p_1a_{33}-r_1a_{31})-q_1(q_1a_{31}-p_1a_{32})]\}+\\
&+[(A_2-C_2)-Ma_2^2]r_2p_2+Ma_2b_1\{b_{13}[p_1(q_1a_{11}-p_1a_{12})-r_1(r_1a_{12}-q_1a_{13})]+\\
&+b_{23}[p_1(q_1a_{21}-p_1a_{22})-r_1(r_1a_{22}-q_1a_{23})]+b_{33}[p_1(q_1a_{31}-p_1a_{32})-r_1(r_1a_{32}-q_1a_{33})]\}=\\
&=3\omega_0^2(A_2-C_2)b_{33}b_{31}-M\omega_0^2a_2[a_1(a_{11}b_{13}+a_{21}b_{23}+a_{31}b_{33})-3b_{33}(a_2b_{31}-a_1a_{31})],
\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}
&(C_2+Ma_2^2)\dot{r}_2+Ma_1a_2[(a_{13}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{32})\dot{q}_1-(a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{32})\dot{r}_1]+\\
&+[(B_2-A_2)+Ma_2^2]p_2q_2-Ma_1a_2\{b_{12}[r_1(p_1a_{13}-r_1a_{11})-q_1(q_1a_{11}-p_1a_{12})]+\\
&+b_{22}[r_1(p_1a_{23}-r_1a_{21})-q_1(q_1a_{21}-p_1a_{22})]+b_{32}[r_1(p_1a_{33}-r_1a_{31})-q_1(q_1a_{31}-p_1a_{32})]\}=\\
&=3\omega_0^2(B_2-A_2)b_{31}b_{32}+M\omega_0^2a_2[a_1(a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{32})+3b_{32}(a_2b_{31}-a_1a_{31})].
\end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь $a_{kj}^{(1)}=a_{kj}$, $a_{kj}^{(2)}=b_{kj}$ направляющие косинусы определяющие ориентацию первого и второго тела в орбитальной системе координат.

Для системы (3) –(8) справедлив интеграл энергии $T_2-T_0-U=h.$

2. Положения равновесия

Положив в (3) - (8) $\alpha_i = \mathrm{const}, \beta_i = \mathrm{const}, \gamma_i = \mathrm{const}$ получим стационарные уравнения:

$$
\begin{aligned}
& a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} = 0, \\
& m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) = 0, \\
& n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) = 0, \\
& b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} = 0, \\
& m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) = 0, \\
& n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) = 0, \\
& a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \qquad b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 = 1, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \qquad b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 1, \\
& a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, \qquad b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} = 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
m_1 = \frac{(A_1 - C_1) - Ma_1^2}{Ma_1a_2} \qquad n_1 = \frac{(B_1 - A_1) + Ma_1^2}{Ma_1a_2},
$$

$$
m_2 = \frac{(A_2 - C_2) - Ma_2^2}{Ma_1a_2}, \qquad n_2 = \frac{(B_2 - A_2) + Ma_2^2}{Ma_1a_2},
$$

Которые определяет положения равновесия системы спутник-стабилизатор в орбитальной системе координат.

Плоский случай. Рассмотрим плоские колебания системы двух, когда $\alpha_i \neq 0, \beta_i = 0, \gamma_i = 0.$ В этом случае имеем [2,3]:

$$a_{11}^2 = \cos^2\alpha_1, a_{12} = 0, a_{13}^2 = \sin^2\alpha_1; \quad b_{11}^2 = \cos^2\alpha_2, b_{12} = 0, b_{13}^2 = \sin^2\alpha_2,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22}^2 = 1, \quad a_{23} = 0; \qquad b_{21} = 0, \quad b_{22}^2 = 1, \quad b_{23} = 0,$$

$$a_{31}^2 = \sin^2\alpha_1, a_{32} = 0, a_{33}^2 = \cos^2\alpha_1; \quad b_{31}^2 = \sin^2\alpha_2, b_{32} = 0, b_{33}^2 = \cos^2\alpha_2.$$

Система (9) примет вид:

$$\begin{aligned} a_{33}(m_1 a_{31} + b_{31}) &= 0, \\ b_{33}(m_2 a_{31} + a_{31}) &= 0, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \cos\alpha_1(m_1 \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) &= 0, \\ \cos\alpha_2(\sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) имеет следующие 4 типа решений:

$$\sin\alpha_1 = 0, \quad \sin\alpha_2 = 0,$$

$$\cos\alpha_1 = 0, \quad \cos\alpha_2 = 0,$$

$$\cos\alpha_1 = 0, \ (\sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2) = 0,$$

$$\cos\alpha_2 = 0, \ (m_1 \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = 0.$$

При $|m_2| \geq 1 \ (|m_1| \geq 1)$ в зависимости от знаков параметров a_1, a_2 возможно существование 8 физически различных положений равновесия.

С использованием интеграла энергии в качестве функции Ляпунова получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Рассмотрена возможность обеспечения асимптотической устойчивости положений равновесия при наличии диссипации.

Пространственные решения. Случай 1. Уравнения 2, 3, 5 и 6 системы (9) образуют однородную подсистему относительно переменных $a_{21}, a_{31}, b_{21}, b_{31}$

$$\begin{aligned}
&(m_1 a_{23})a_{21} - (3m_1 a_{33})a_{31} + (a_{23})b_{21} - (3a_{33})b_{31} = 0,\\
&(n_1 a_{22})a_{21} - (3n_1 a_{32})a_{31} - (a_{22})b_{21} + (3a_{32})b_{31} = 0,\\
&(b_{23})a_{21} - (3b_{33})a_{31} + (m_2 b_{23})b_{21} - (3m_2 b_{33})b_{31} = 0,\\
&-(b_{22})a_{21} + (3b_{22})a_{31} + (n_2 b_{22})b_{21} - (3n_2 b_{32})b_{31} = 0.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Определитель которой имеет вид:

$$\Delta = (m_1 n_1 m_2 n_2 + 1)a_{11}b_{11} - (m_1 m_2 + n_1 n_2)(a_{22}b_{33} - a_{32}b_{23})(a_{33}b_{22} - a_{23}b_{32}) +$$
$$+(m_1 n_2 + m_2 n_1)(a_{22}b_{32} - a_{32}b_{22})(a_{23}b_{33} - a_{33}b_{23}).$$

Если $\Delta \neq 0$, то $a_{21} = a_{31} = b_{21} = b_{31} = 0$ и система (9) разделяется на две

$$\begin{aligned}
&a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} = 0, && b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} = 0,\\
&a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, && b_{22}^2 + b_{23}^2 = 1,\\
&a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, && b_{32}^2 + b_{33}^2 = 1,\\
&a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0; && b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} = 0.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Решения которых имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(1-4).\ a_{22}^2 = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0,\ a_{33}^2 = 1; \quad b_{22}^2 = 1, b_{23} = 0, b_{32} = 0, b_{33}^2 = 1\\
&(5-8).\ a_{22} = 0, a_{23}^2 = 1, a_{32}^2 = 1,\ a_{33} = 0; \quad b_{22} = 0, b_{23}^2 = 1, b_{32}^2 = 1, b_{33} = 0.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Случай 2. Уравнения 1 и 2 системы (9) образуют однородную подсистему относительно переменных a_{23}, a_{33}

$$\begin{aligned} &(a_{22})a_{23} - 3(a_{32})a_{33} = 0, \\ &(m_1 a_{21} + b_{21})a_{23} - 3(m_1 a_{31} + b_{31})a_{33} = 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Если $\Delta_1 = a_{22}b_{31} - a_{32}b_{21} - m_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \neq 0$, то $a_{23} = 0,\ a_{33} = 0.$

Уравнения 4 и 5 системы (9) образуют однородную подсистему относительно переменных b_{23}, b_{33}

$$\begin{aligned} &(b_{22})b_{23} - 3(b_{32})b_{33} = 0, \\ &(m_2 b_{21} + a_{21})b_{23} - 3(m_2 b_{31} + a_{31})b_{33} = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Если $\Delta_2 = b_{22}a_{31} - a_{21}b_{32} - m_2(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) \neq 0$, то $b_{23} = 0,\ b_{33} = 0$.

Если $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0,$ то $a_{23} = 0,\ a_{33} = 0.\ \ b_{23} = 0,\ b_{33} = 0$ и система (7) примет вид

$$\begin{aligned} &n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) = 0, \\ &n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) = 0, \\ &a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \qquad b_{21}^2 + b_{22}^2 = 1, \\ &a_{31}^2 + a_{32}^2 = 1, \qquad b_{31}^2 + b_{32}^2 = 1, \\ &a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0, \qquad b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Решения которой получено с использованием системы компьютерной алгебры

3. Анализ положений равновесия

Случай 2. Используя метод построения базисов Гребнера к системе полиномов (16) получим полином от одной переменной a_{32} в виде:

$$P_1(a_{32})P_2(n_1,n_2,a_{32})=0.$$

$$P_1(a_{32})=a_{32}(a_{32}^2-1), \tag{17}$$

$$P_2(n_1,n_2,a_{32})=64n_1^2(4n_1^2n_2^2-1)(n_1^2n_2^2-1)a_{32}^4-32(2n_1^2-1)(4n_1^2n_2^2-1)(n_1^2n_2^2-1)a_{32}^2+$$
$$+\left[(4n_1^2n_2^2-1)^2-9(n_1+n_2)^2\right].$$

Кроме того из построенного базиса Гребнера следуют соотношения

$$a_{21}^2=a_{32}^2,\ a_{22}^2=a_{31}^2;\quad b_{21}^2=b_{32}^2,\ b_{22}^2=b_{31}^2. \tag{18}$$

Система (16) с учетом (18) упрощается

$$\begin{aligned}&4n_1a_{21}a_{22}-b_{21}a_{22}-3b_{22}a_{21}=0,\\&4n_2b_{21}b_{22}-a_{21}b_{22}-3a_{22}b_{21}=0,\\&a_{21}^2+a_{22}^2=1,\\&b_{21}^2+b_{22}^2=1.\end{aligned} \tag{19}$$

Решение системы (19) сводится к решению биквадратного уравнения из (17).

Случай 2. Получим решения системы (16)

(I) $$(1-4).\ a_{32}=a_{33}=0,\ a_{31}^2=1;\quad b_{32}=b_{33}=0,\ b_{31}^2=1;$$

$$(5-8).\ a_{21}=a_{23}=0,\ a_{22}^2=1;\quad b_{21}=b_{23}=0,\ b_{22}^2=1; \tag{20}$$

$$\Delta_1=(b_{31}-m_1a_{31})\neq 0,\ (|m_1|\neq 1);\ \Delta_2=(a_{31}-m_2b_{31})\neq 0,\ (|m_2|\neq 1).$$

(II) $$(1-4).\ a_{31}=a_{33}=0,\ a_{32}^2=1;\quad b_{31}=b_{33}=0,\ b_{32}^2=1;$$

$$(5-8).\ a_{22}=a_{23}=0,\ a_{21}^2=1;\quad b_{22}=b_{23}=0,\ b_{21}^2=1; \tag{21}$$

$$\Delta_1=(b_{21}+n_1a_{21})\neq 0,\ (|n_1|\neq 1);\ \Delta_2=(a_{21}+n_2b_{21})\neq 0,\ (|n_2|\neq 1).$$

(III) $$a_{32}^2=\frac{(n_1^2-1)}{4n_1^2}\pm\frac{(8n_1^3n_2-5n_1(n_1+n_2)+2)\sqrt{(4n_1n_2-1)(n_1n_2-1)}}{8n_1^2(4n_1n_2-1)(n_1n_2-1)},$$

$$a_{31}^2=1-a_{32}^2,\quad a_{33}=0;\quad a_{21}^2=a_{32}^2,\ a_{22}^2=a_{31}^2,\ a_{23}=0; \tag{22}$$

$$b_{32}^2=\frac{(n_2^2-1)}{4n_2^2}\pm\frac{(8n_2^3n_1-5n_2(n_1+n_2)+2)\sqrt{(4n_1n_2-1)(n_1n_2-1)}}{8n_2^2(4n_1n_2-1)(n_1n_2-1)},$$

$$b_{31}^2=1-b_{32}^2,\quad b_{33}=0;\quad b_{21}^2=b_{32}^2,\ b_{22}^2=b_{31}^2,\ b_{23}=0.$$

При условии $\Delta_1\neq 0,\ \Delta_2\neq 0.$

Случай 3. Рассмотрим аналогично **случаю 2** уравнения 1 и 3 системы (9) относительно переменных a_{22}, a_{32} и 4 и 6 уравнения системы (9) относительно переменных b_{22}, b_{32}. Если $\Delta_3 = b_{21}a_{33} - a_{23}b_{31} + n_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \neq 0$ и

$$\Delta_4 = a_{21}b_{33} - b_{23}a_{31} + n_2(b_{23}b_{31} - b_{21}b_{33}) \neq 0,$$

то $a_{22} = a_{32} = b_{22} = b_{32} = 0$ и система (9) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) = 0, \\
&m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) = 0, \\
&a_{21}^2 + a_{23}^2 = 1, \qquad b_{21}^2 + b_{23}^2 = 1, \\
&a_{31}^2 + a_{33}^2 = 1, \qquad b_{31}^2 + b_{33}^2 = 1, \\
&a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} = 0, \qquad b_{21}b_{31} + b_{23}b_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Решения которой также как и в случае 2 получим с применением алгебраических методов построения базисов Гребнера к системе полиномов (23). Получим полином от одной переменной a_{33} в виде:

$$\begin{aligned}
&P_3(a_{33})P_4(m_1, m_2, a_{33}) = 0. \\
&P_3(a_{33}) = a_{33}(a_{33}^2 - 1), \\
&P_2(m_1, m_2, a_{33}) = 256m_1^2(2m_1m_2 + 1)^2 a_{32}^4 - \\
&-8(2m_1m_2 + 1)(64m_1^3m_2 + 32m_1(m_1 - m_2) - 25)a_{33}^2 + \left[(8m_1m_2 - 5)^2 - 36(m_1 - m_2)^2\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Из базиса Гребнера следуют соотношения.

$$a_{21}^2 = a_{33}^2, \; a_{23}^2 = a_{31}^2; \quad b_{21}^2 = b_{33}^2, \; b_{23}^2 = b_{31}^2.$$

Случай 3. Получим решения системы (23)

(I)

$$(1-4).\ a_{32}=a_{33}=0,\ a_{31}^2=1;\quad b_{32}=b_{33}=0,\ b_{31}^2=1;$$

$$(5-8).\ a_{21}=a_{22}=0,\ a_{23}^2=1;\quad b_{21}=b_{22}=0,\ b_{23}^2=1; \tag{25}$$

$$\Delta_3=(b_{31}-n_1a_{31})\neq 0,\ (|n_1|\neq 1);\ \Delta_4=(a_{31}-n_2b_{31})\neq 0,\ (|n_2|\neq 1).$$

(II)

$$(1-4).\ a_{31}=a_{32}=0,\ a_{33}^2=1;\quad b_{31}=b_{32}=0,\ b_{33}^2=1;$$

$$(5-8).\ a_{22}=a_{23}=0,\ a_{21}^2=1;\quad b_{22}=b_{23}=0,\ b_{21}^2=1; \tag{26}$$

$$\Delta_3=(b_{21}+n_1a_{21})\neq 0,\ (|n_1|\neq 1);\ \Delta_4=(a_{21}-n_2b_{21})\neq 0,\ (|n_2|\neq 1).$$

(III)

$$a_{33}^2=\frac{32m_1(2m_1^2m_2+m_1-m_2)-25\pm(8m_1^2-5)\sqrt{64m_1m_2(m_1m_2+1)+25}}{64m_1^2(2m_1m_2+1)},$$

$$a_{31}^2=1-a_{33}^2,\quad a_{32}=0;\quad a_{21}^2=a_{33}^2,\ a_{23}^2=a_{31}^2,\ a_{22}=0; \tag{26}$$

$$b_{33}^2=\frac{32m_2(2m_2^2m_1+m_2-m_1)-25\pm(8m_2^2-5)\sqrt{64m_1m_2(m_1m_2+1)+25}}{64m_2^2(2m_1m_2+1)},$$

$$b_{31}^2=1-b_{33}^2,\quad b_{32}=0;\quad b_{21}^2=b_{33}^2,\ b_{23}^2=b_{31}^2,\ b_{22}=0.$$

При условии $\Delta_3\neq 0,\ \Delta_4\neq 0.$

4. Заключение

- Предложен символьно-аналитический метод определения положений равновесия системы спутник-стабилизатор в случае $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$
- Проведен анализ условий существования положений равновесия для различных значений $m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2$ параметров системы
- Показано что на круговой орбите система двух тел спутник-стабилизатор соединенным сферическим шарниром могут существовать как плоские, так и пространственные положений равновесия
- Определены все положения равновесия при условии

$$\Delta \neq 0, \quad \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_3 \neq 0, \Delta_4 \neq 0.$$

5. Литература

- 1. Охоцимский Д.Е., *Сарычев В.А.* Система гравитационной стабилизации искусственных спутников // Сб. «Искусств. Спутники Земли», М.: изд. АН СССР, 1963, №16. 5–9
- 2. *Сарычев В.А.* Исследование динамики системы гравитационной стабилизации //Сб. «Искусств. Спутники Земли»,. М.: изд. АН СССР, 1963, №16. 10-33
- 3. *Сарычев В.А.* Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите// Космические исследования, 1967, т.5, №3. *360–364*
- 4. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства», т.11, М.: ВИНИТИ, 1978
- 5. *Сарычев В.А.* Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите// Космические исследования, 1999, т.37, №2. *176–181*