ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА - ГИРОСТАТА. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В. А. Сарычев

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва

С.А. Гутник

Московский Физико-Технический Институт

Семинар «Компьютерная алгебра» МГУ, ВЦ РАН
24 апреля 2013 г. Москва

1. Уравнения движения

Уравнения движения спутника-гиростата относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2 (C - B)a_{32}a_{33} + \bar{H}_3 q - \bar{H}_2 r = 0,\\
&B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2 (A - C)a_{33}a_{31} + \bar{H}_1 r - \bar{H}_3 p = 0,\\
&C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2 (B - A)a_{31}a_{32} + \bar{H}_2 p - \bar{H}_1 q = 0;
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
&p = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + a_{21},\\
&q = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta}\sin\gamma = \bar{q} + a_{22},\\
&r = (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta}\cos\gamma = \bar{r} + a_{23}.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Здесь ***A, B, C*** главные центральные моменты инерции гиростата; $p, q, r, H_1 = \bar{H}_1 / \omega_0$, $H_2 = \bar{H}_2 / \omega_0$; $H_3 = \bar{H}_3 / \omega_0$; проекции абсолютной угловой скорости гиростата и проекции вектора гиростатического момента на оси Ox, Oy, Oz; α, β, γ - углы тангажа, рыскания и крена; a_{ij} - направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz, в орбитальной системе координат. ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника на круговой орбите.

2. Положения равновесия

Положив в (1) в (2) $\alpha = \alpha_0,\ \beta = \beta_0,\ \gamma = \gamma_0,$ (постоянные величины) получим стационарные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2 a_{13} + H_3 a_{12} = 0,\\
&(A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3 a_{11} + H_1 a_{13} = 0,\\
&(B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1 a_{12} + H_2 a_{11} = 0,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Здесь удобнее использовать эквивалентную систему

$$
\begin{aligned}
&Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} = 0,\\
&3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}) = 0,\\
&(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1 a_{21} + H_2 a_{22} + H_3 a_{23}) = 0,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

которая вместе с условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$
\begin{aligned}
&a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,\\
&a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,\\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

определяет все положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат когда $A, B. C, H_1, H_2, H_3$ заданы.

В общем случае имеем $A \neq B \neq C,\ h_1 \neq 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 \neq 0.$ После, введения безразмерных параметров $h_1 = \dfrac{H_1}{B-C},\ h_2 = \dfrac{H_2}{B-C},\ h_3 = \dfrac{H_3}{B-C},\ \nu = \dfrac{B-A}{B-C}.$ система (3), примет вид:

$$
\begin{aligned}
&-(\nu a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33}) + (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0,\\
&\nu a_{11}a_{31} + a_{13}a_{33} = 0,\\
&\nu a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} - (h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}) = 0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Система (5), (6) может быть разрешена относительно переменных $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{-4a_{32}a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{21} &= \frac{4[\nu a_{32}^2 - (1-\nu)a_{33}^2]a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}},\\
a_{12} &= \frac{4(1-\nu)a_{33}a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{22} &= \frac{-4(\nu a_{31}^2 + a_{33}^2)a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}},\\
a_{13} &= \frac{4\nu a_{31}a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{23} &= \frac{4[(1-\nu)a_{31}^2 + a_{32}^2]a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Подставляя решения (7) в (6), получим систему алгебраических уравнений от 3-х неизвестных a_{31}, a_{32}, a_{33}

$$16[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1-\nu)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2),$$

$$4\nu(1-\nu) a_{31} a_{32} a_{33} + [h_1 a_{32} a_{33} - h_2 (1-\nu) a_{33} a_{31} - h_3 \nu a_{31} a_{32}](h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \qquad (8)$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

Учитывая однородность первых двух уравнений (8), и вводя обозначения

$x = \dfrac{a_{31}}{a_{33}}, \; y = \dfrac{a_{32}}{a_{33}}$ получим алгебраическую систему:

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0,$$

$$b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 = 0. \qquad (9)$$

Здесь

$$a_0 = h_2 (h_1 - \nu h_3 x),$$

$$a_1 = h_1 h_3 + [4\nu(1-\nu) + h_1^2 - (1-\nu) h_2^2 - \nu h_3^2] x - \nu h_1 h_3 x^2,$$

$$a_2 = -(1-\nu) h_2 (h_1 x + h_3) x,$$

$$b_0 = h_2^2,$$

$$b_1 = 2 h_2 (h_1 x + h_3),$$

$$b_2 = (h_2^2 + h_3^2 - 16) + 2 h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 16\nu^2) x^2,$$

$$b_3 = 2 h_2 (h_1 x + h_3)(1 + x^2),$$

$$b_4 = (h_1 x + h_3)^2 (1 + x^2) - 16(1-\nu)^2 x^2.$$

Исключая из системы (9) y, с использованием понятие результанта, получим алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x

$$p_0x^{12}+p_1x^{11}+p_2x^{10}+p_3x^9+p_4x^8+p_5x^7+p_6x^6+ \qquad (10)$$
$$+p_7x^5+p_8x^4+p_9x^3+p_{10}x^2+p_{11}x+p_{12}=0,$$

где коэффициенты $p_i=p_i(h_1,h_2,h_3,\nu)$ имеют вид:

$$p_0=-h_1^4h_3^4\nu^6,$$
$$p_1=2h_1^3h_3^3\nu^5\left[2h_1^2-h_2^2(\nu-1)-2\nu\left(h_3^2+2\nu-2\right)\right],$$
$$p_2=-h_1^2h_3^2\nu^4\Big\{6h_1^4+h_2^4(\nu-1)^2-h_2^2(\nu-1)\left[16\left(\nu^3-\nu^2\right)+(\nu-1)+h_3^2(1-7\nu)\right]+$$
$$+h_1^2\left[\left(-25\nu^2+26\nu-1\right)+h_3^2\left(\nu^2-16\nu+1\right)+h_2^2\left(\nu^2-8\nu+7\right)\right]+$$
$$+2\nu^2\left[3h_3^4+8(\nu-1)^2-4h_3^2\left(2\nu^2-7\nu+5\right)\right]\Big\},$$
$$p_3=2h_1h_3\nu^3\Big\{2h_1^6+h_1^4\left[\left(-13\nu^2+14\nu-1\right)+2h_3^2\left(\nu^2-6\nu+1\right)+h_2^2\left(\nu^2-5\nu+4\right)\right]+$$
$$+h_3^2\Big[-h_2^4(\nu-1)^2(2\nu-1)+h_2^2(\nu-1)\nu\left[h_3^2(1-4\nu)+\left(16\nu^3-16\nu^2+\nu-1\right)\right]+$$
$$+2\nu^3\left[-h_3^4+8(\nu-1)^2(4\nu-5)+2h_3^2\left(7-11\nu+4\nu^2\right)\right]\Big]-$$
$$-h_1^2\Big[h_2^4(\nu-2)(\nu-1)^2+h_2^2(\nu-1)\left[\left(16\nu^3-16\nu^2+\nu-1\right)+h_3^2\left(3\nu^2-13\nu+3\right)\right]+$$
$$+2\nu\left[-2(\nu-1)^2(5\nu-1)+h_3^4\left(\nu^2-6\nu+1\right)+h_3^2\left(18\nu^3-53\nu^2+38\nu-3\right)\right]\Big]\Big\} \quad \ldots$$

3. Анализ положений равновесия

Численные исследования проводились при значениях $B > A > C$ $(0 < \nu < 1)$.

Для предельных значений параметров $\nu = 0$ и $\nu = 1$, возможно аналитически определить границы областей в пространстве параметров с равным числом действительных корней.

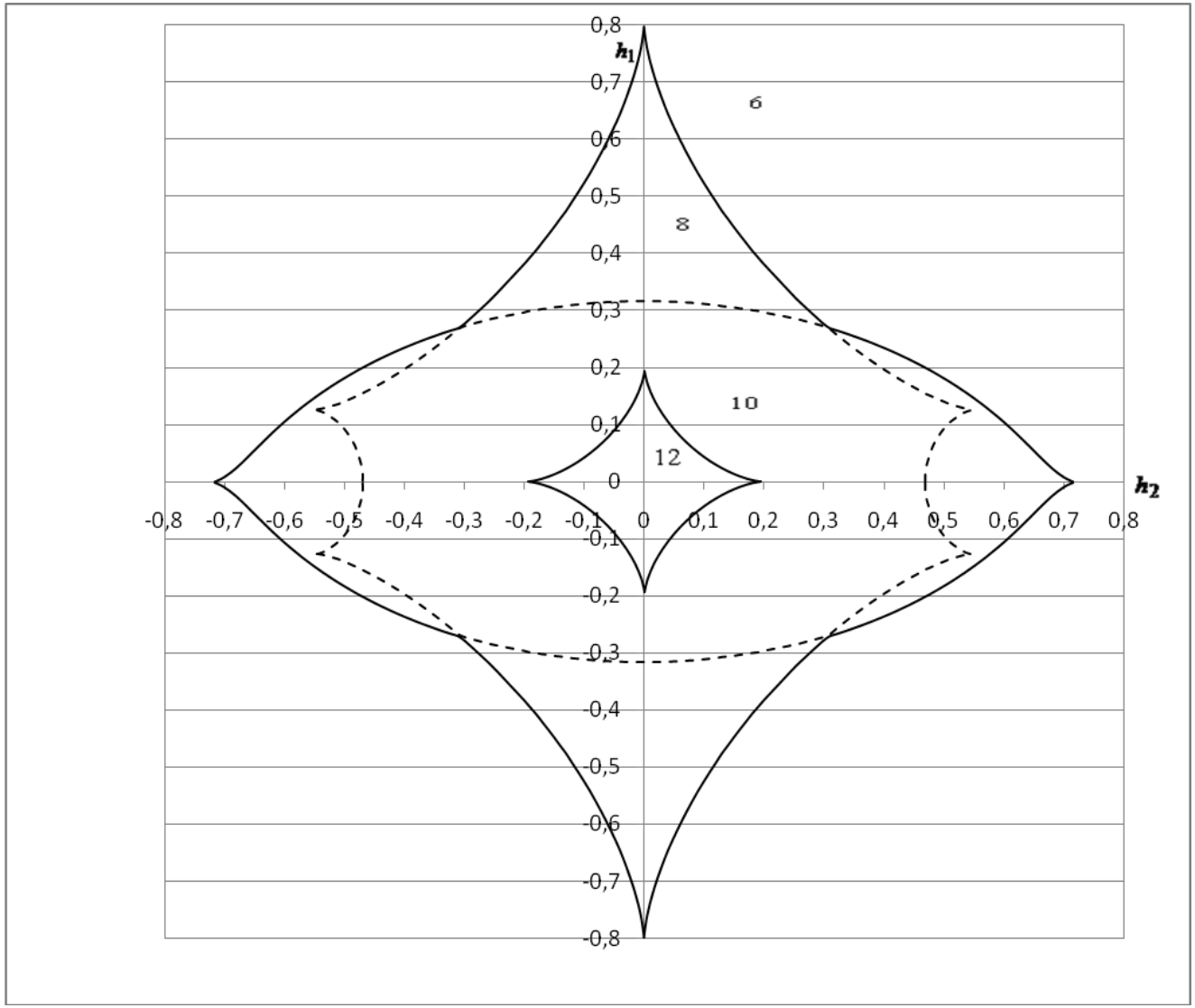
Для случая $\nu = 0$ $(A = B)$ граница имеет вид

$$h_1^2 + h_2^2 = (4^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \qquad (11)$$
$$h_1^2 + h_2^2 = (1 - h_3^{2/3})^3.$$

Для случая $\nu = 1$ $(A = C)$ граница имеет вид

$$h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 4^{2/3}, \qquad (12)$$
$$h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} = 1.$$

4. Численные результаты



v=0,2; h_3 = 0,25

4. Численные результаты

Regions of equilibria v	24/20	20/16	16/12	12/8
0,01	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,990	h_1=0,0065 h_2=0,0001 h_3=0,999	h_1=0,0001 h_2=0,0006 h_3=3,959	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,1	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,900	h_1=0,0740 h_2=0,0001 h_3=1,021	h_1=0,0001 h_2=0,0682 h_3=3,610	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,2	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,800	h_1=0,1400 h_2=0,0001 h_3=1,048	h_1=0,0001 h_2=0,1809 h_3=3,264	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,3	h_1=0,00001 h_2=0,0001 h_3=0,700	h_1=0,197 h_2=0,0001 h_3=1,082	h_1=0,0001 h_2=0,3154 h_3=2,950	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,4	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,600	h_1=0,231 h_2=0,0001 h_3=1,124	h_1=0,0001 h_2=0,4603 h_3=2,669	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,5	h_1=0,00001 h_2=0,0001 h_3=0,500	h_1=0,224 h_2=0,0001 h_3=1,182	h_1=0,0001 h_2=0,6132 h_3=2,412	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,6	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,400	h_1=0,1236 h_2=0,0001 h_3=1,186	h_1=0,0001 h_2=0,7778 h_3=2,167	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0

4. Численные результаты

Regions of equilibria v	24/20	20/16	16/12	12/8
0,7	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,300	h_1=0,0144 h_2=0,0001 h_3=1,105	h_1=0,0001 h_2=0,9675 h_3=1,915	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,8	h_1=0,00001 h_2=0,0001 h_3=0,200	h_1=0,0001 h_2=0,0155 h_3=0,909	h_1=0,0001 h_2=1,2107 h_3=1,629	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,9	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,100	h_1=0,0004 h_2=0,0989 h_3=0,676	h_1=0,0001 h_2=1,5915 h_3=1,245	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0
0,99	h_1=0,00001 h_2=0,00001 h_3=0,010	h_1=0,0001 h_2=0,2521 h_3=0,168	h_1=0,0030 h_2=0,0001 h_3=0,997	h_1=0,0001 h_2=0,0001 h_3=4,0

5. Анализ устойчивости положений равновесия

Для исследования достаточных условий устойчивости положений равновесия будем использовать обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(A\overline{p}^2 + B\overline{q}^2 + C\overline{r}^2) + \frac{1}{2}(B-C)\omega_0^2\{3[(1-\nu)a_{31}^2 + a_{32}^2] + \tag{13}$$
$$+(\nu a_{21}^2 + a_{23}^2) - 2(h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23})\} = const.$$

Представим $\psi = \psi_0 + \overline{\psi},\ \vartheta = \vartheta_0 + \overline{\vartheta},\ \varphi = \varphi_0 + \overline{\varphi},$ тогда интеграл энергии примет вид:

$$\frac{1}{2}(A\overline{p}^2 + B\overline{q}^2 + C\overline{r}^2) + \frac{1}{2}(B-C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\overline{\psi}^2 + A_{\vartheta\vartheta}\overline{\vartheta}^2 + A_{\varphi\varphi}\overline{\varphi}^2 + \tag{14}$$
$$+2A_{\psi\vartheta}\overline{\psi}\overline{\vartheta} + 2A_{\psi\varphi}\overline{\psi}\overline{\varphi} + 2A_{\vartheta\varphi}\overline{\vartheta}\overline{\varphi}) + \Sigma = const.$$

5. Анализ устойчивости положений равновесия

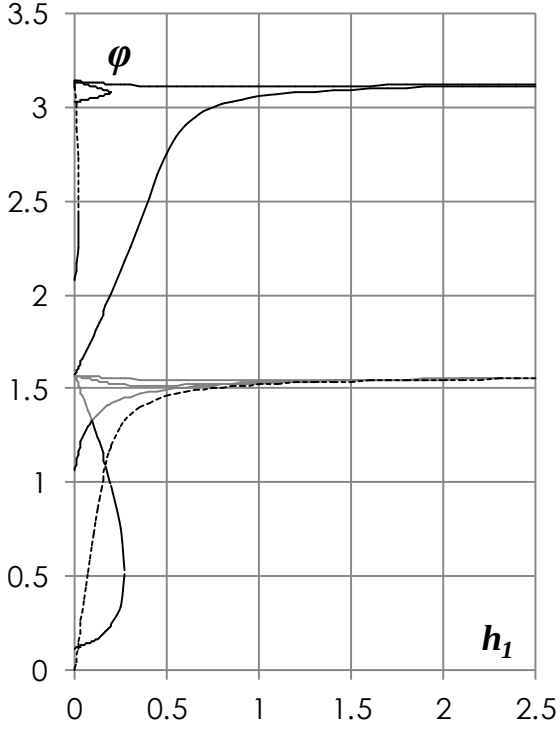
Где:

$$
\begin{aligned}
&A_{\psi\psi} = \nu(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (a_{13}^2 - a_{23}^2) + h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23},\\
&A_{\vartheta\vartheta} = (3 + \cos^2\psi_0)(1 - \nu\sin^2\varphi_0)\cos 2\vartheta_0 -\\
&-\frac{1}{4}\nu\sin 2\psi_0\cos\vartheta_0\sin 2\varphi_0 + (h_1\sin\varphi_0 + h_2\cos\varphi_0)\cos\psi_0\cos\vartheta_0 + h_3 a_{23},\\
&A_{\varphi\varphi} = \nu[(a_{22}^2 - a_{21}^2) - 3(a_{32}^2 - a_{31}^2)] + h_1 a_{21} + h_2 a_{22},\\
&A_{\psi\vartheta} = -\frac{1}{2}\sin 2\psi_0\sin 2\vartheta_0 + \nu(a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}) - \sin\psi_0(h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}),\\
&A_{\psi\varphi} = \nu(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) - h_1 a_{12} + h_2 a_{11},\\
&A_{\vartheta\varphi} = -\frac{3}{2}\nu\sin 2\vartheta_0\sin 2\varphi_0 + \nu(a_{21}\cos\varphi_0 + a_{22})a_{23} - (h_1\cos\varphi_0 - h_2\sin\varphi_0)a_{23}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

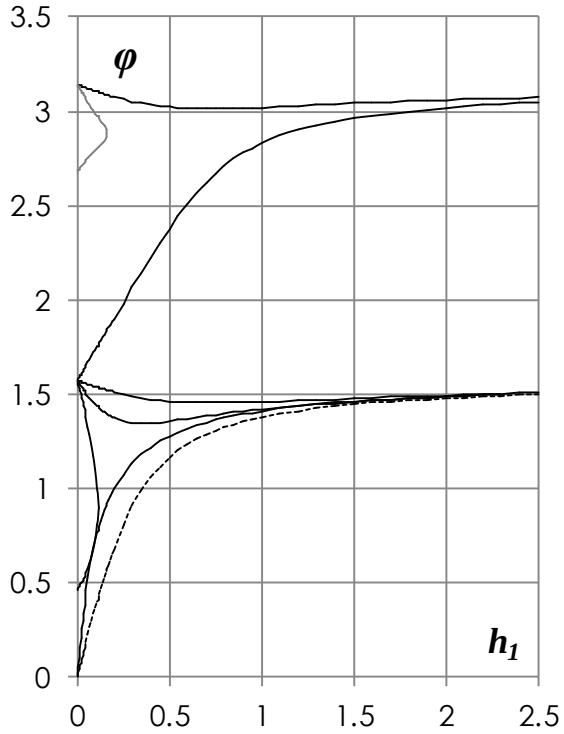
Из теоремы Ляпунова следует, что положения равновесия устойчивы, если квадратичная форма (14), (15) является положительно определенной, т.е. имеют место следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&A_{\psi\psi} > 0,\\
&A_{\psi\psi}A_{\vartheta\vartheta} - (A_{\psi\vartheta})^2 > 0,\\
&A_{\psi\psi}A_{\vartheta\vartheta}A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psi\vartheta}A_{\psi\varphi}A_{\vartheta\varphi} - A_{\psi\psi}(A_{\vartheta\varphi})^2 - A_{\vartheta\vartheta}(A_{\psi\varphi})^2 - A_{\varphi\varphi}(A_{\psi\vartheta})^2 > 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

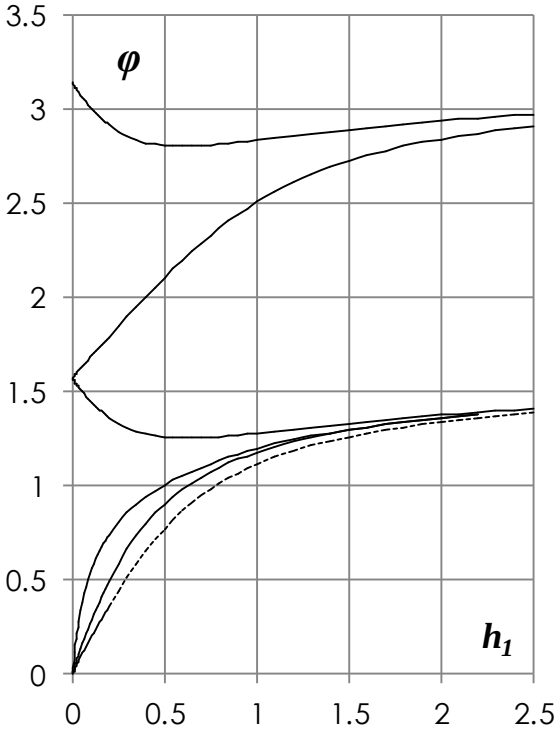
6. Численные результаты исследования устойчивости равновесий



$\boldsymbol{v}$ = 0.1, h_2 = 0.05, h_3 = 0.45



$\boldsymbol{v}$ = 0.1, h_2 = 0.2, h_3 = 0.45



$\boldsymbol{v}$ = 0.1, h_2 = 0.5, h_3 = 0.45

6. Численные результаты исследования устойчивости равновесий

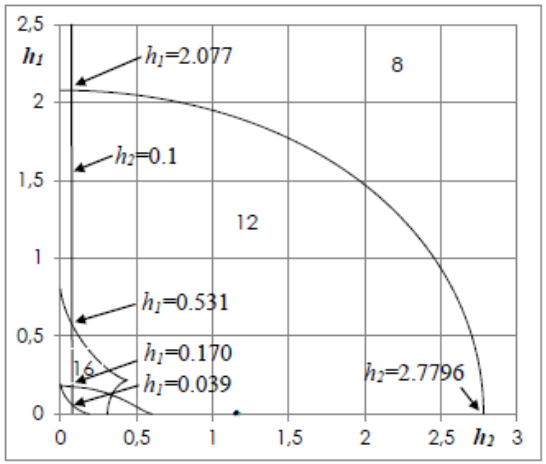


Fig. 25. ν=0.2, h_3 = 0.4

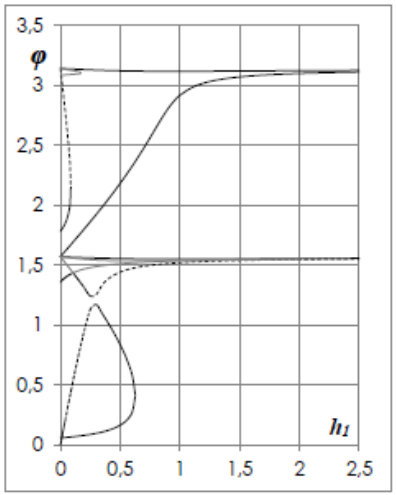


Fig. 26. ν=0.2, h_2 = 0.05, h_3 = 0.4
(24 equilibria, 4 stable)

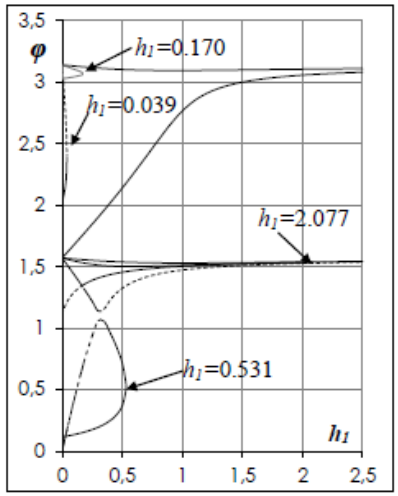


Fig. 27. ν=0.2, h_2 = 0.1, h_3 = 0.4
(24 equilibria, 4 stable)

6. Численные результаты исследования устойчивости равновесий

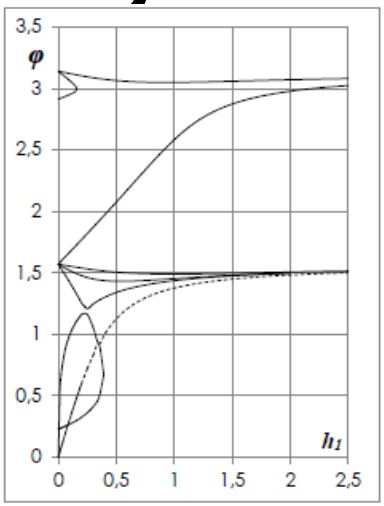


Fig. 28. ν=0.2, h_2 = 0.2, h_3 = 0.4
(20 equilibria, 2 stable)

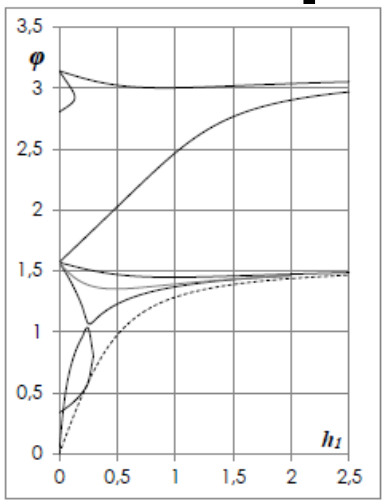


Fig. 29. ν=0.2, h_2 = 0.3, h_3 = 0.4
(20 equilibria, 2 stable)

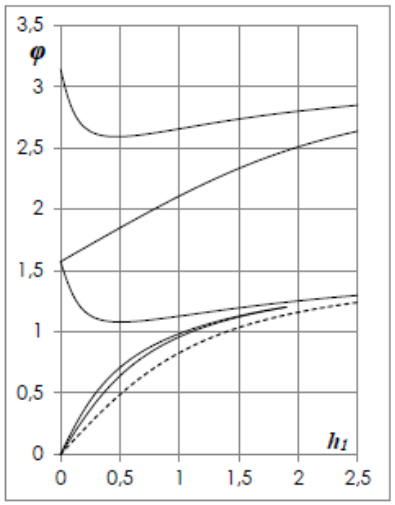


Fig. 32. ν=0.2, h_2 = 1.0, h_3 = 0.4
(12 equilibria, 2 stable)

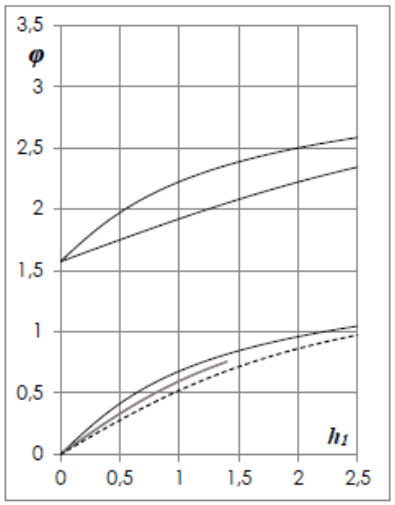


Fig. 33. ν=0.2, h_2 = 2.0, h_3 = 0.4
(12 equilibria, 2 stable)

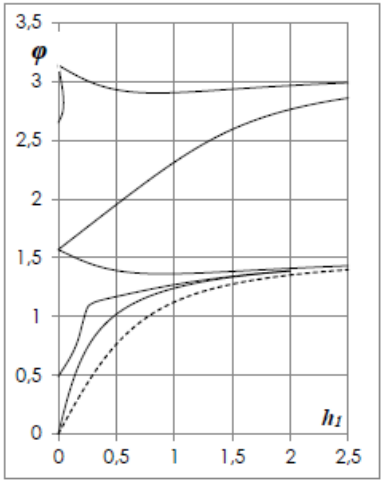


Fig. 30. ν=0.2, h_2 = 0.5, h_3 = 0.4
(16 equilibria, 2 stable)

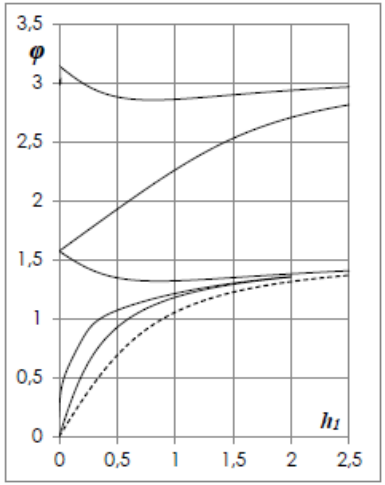


Fig. 31. ν=0.2, h_2 = 0.6, h_3 = 0.4
(12 equilibria, 2 stable)

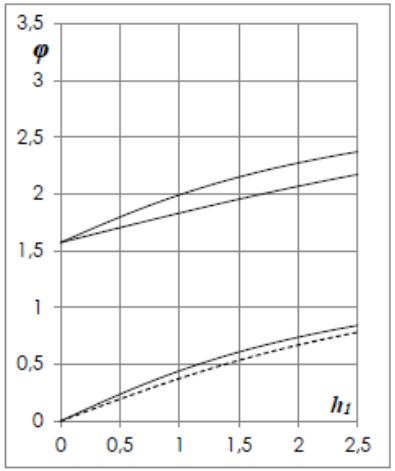


Fig. 34. ν=0.2, h_2 = 3.0, h_3 = 0.4
(8 equilibria, 2 stable)

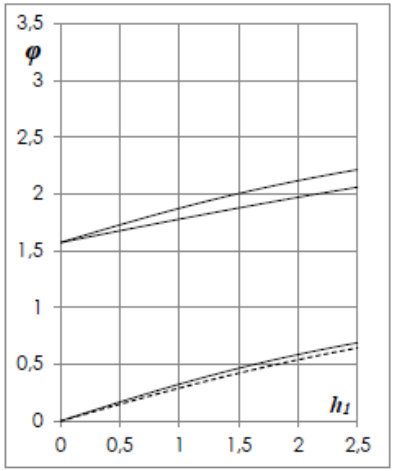


Fig. 35. ν=0.2, h_2 = 4.0, h_3 = 0.4
(8 equilibria, 2 stable)

7. Заключение

- Предложен численно-аналитический метод определения всех положений равновесия спутника-гиростата при $A \neq B \neq C,\ \ h_1 \neq 0,\ h_2 \neq 0,\ h_3 \neq 0.$
- Проведен численный анализ эволюции областей с постоянным числом положений равновесия в плоскости $(h_1,\ h_2)$ для различных значений параметров ν и h_3
- Показано что спутник-гиростат на круговой орбите по действием гравитационного момента может иметь не более 24 и не менее 8 положений равновесия;
- Показано, что число положений равновесия спутника-гиростата, для которых выполняются достаточные условия устойчивости, в общем случае изменяется при возрастании величины модуля гиростатического момента от 4 до 2.

6. Литература

- 1. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства», т.11, М.: ВИНИТИ, 1978
- 2. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космические исследования, 1984, т.22, № 3. *323–326*
- 3. *Sarychev V.A., Mirer S.A.* Relative equilibria of a gyrostat satellite with internal angular momentum along a principal axis// Acta Austronautica. 2001, V.49, № 11, P.*641-644*
- 4. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции// Космические исследования, 2008, т.46, № 1. *61–74*
- 5. *Сарычев В.А.* Динамика осесимметричного спутника-гиростата под действием гравитационного момента // Космические исследования, 2010, т.48, № 2. *192-197*
- 6. *В.А. Сарычев, С.А. Гутник.* Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Исследование положений равновесия и их устойчивости// Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011, №11, 32 с
- 7. *Сарычев В.А., Гутник С.А., Силва А., Сантуш Л.* Динамика спутника-гиростата под действием гравитационного момента. Исследование положений равновесия // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, № 63, 2012

Приложение. Численные результаты ν=0.01

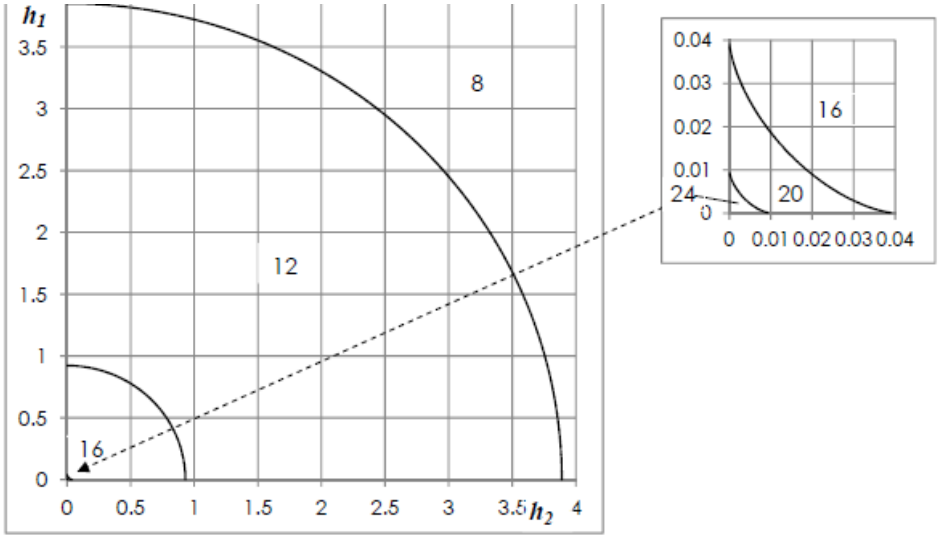


Fig. 1. ν=0.01, $h_3 = 0.01$

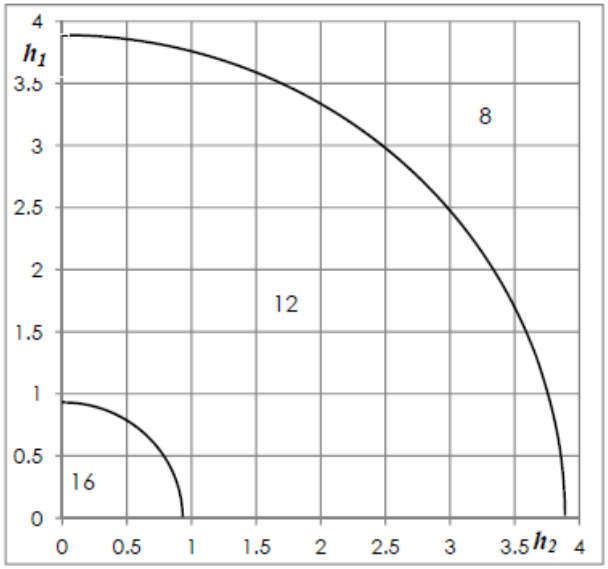


Fig. 2. ν=0, $h_3 = 0.01$

Численные результаты ν=0.01

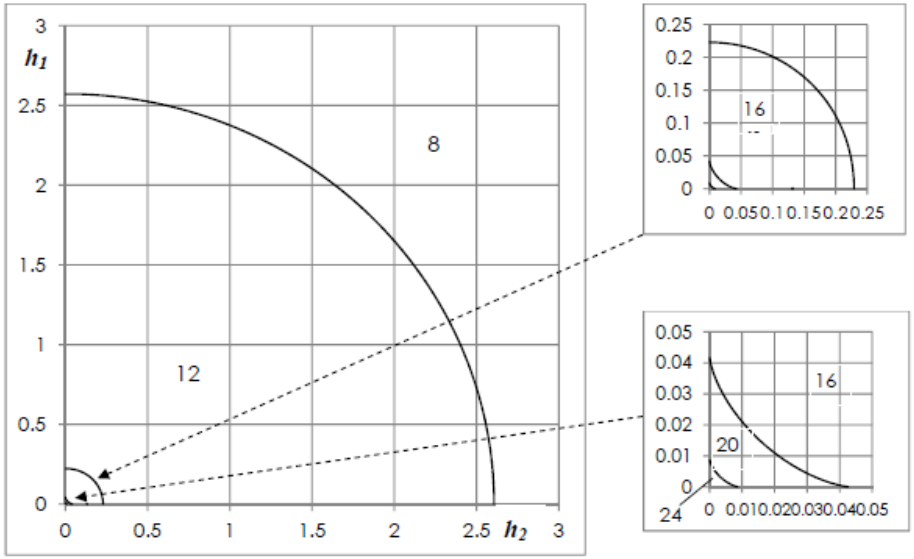


Fig. 3. ν=0.01, $h_3 = 0.495$

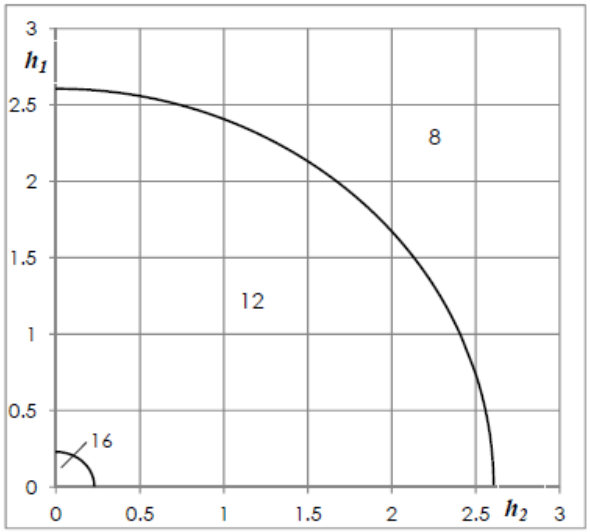


Fig. 4. ν=0, $h_3 = 0.495$

Численные результаты ν=0.01

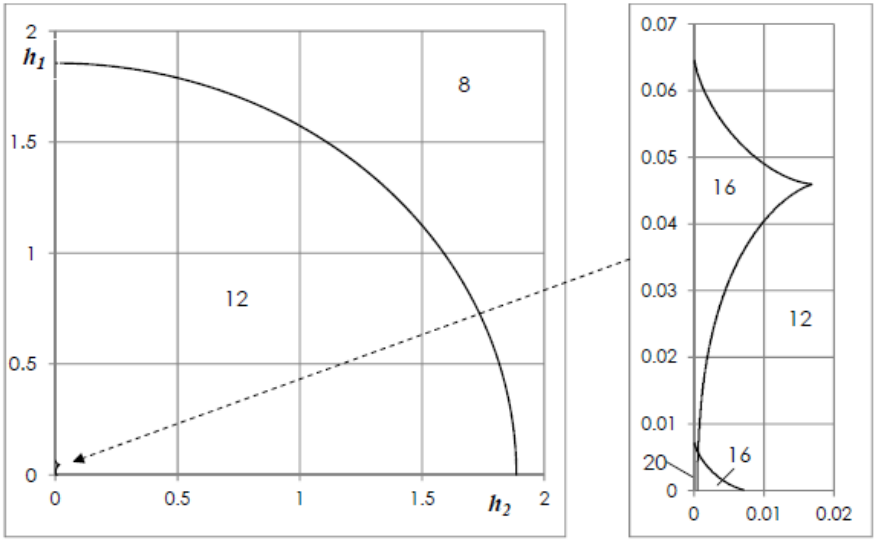


Fig. 5. ν=0.01, $h_3 = 0.99$

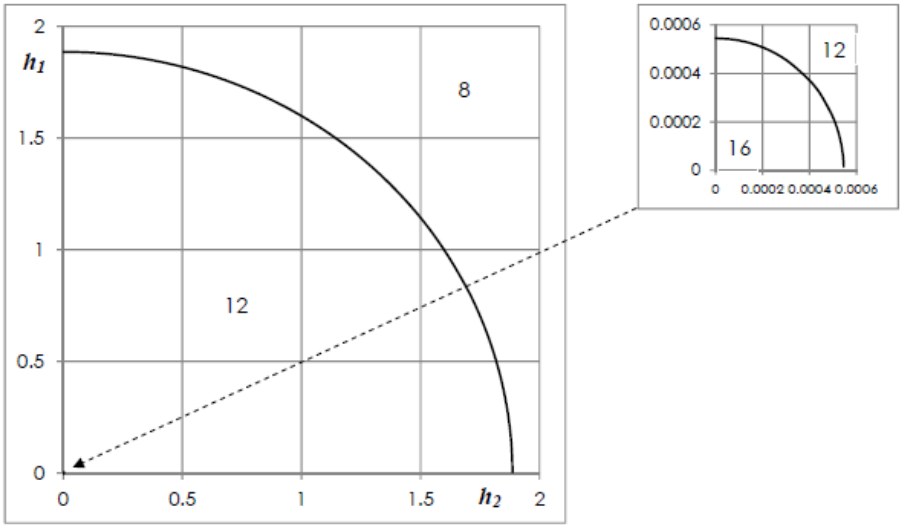


Fig. 6. ν=0, $h_3 = 0.99$

Численные результаты ν=0.1

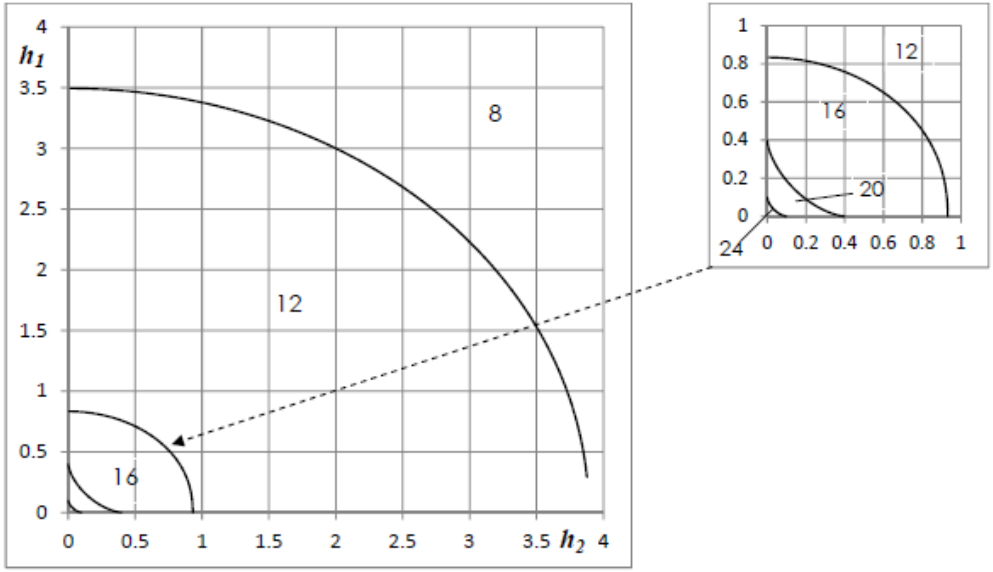


Fig. 7. ν=0.1, $h_3 = 0.01$

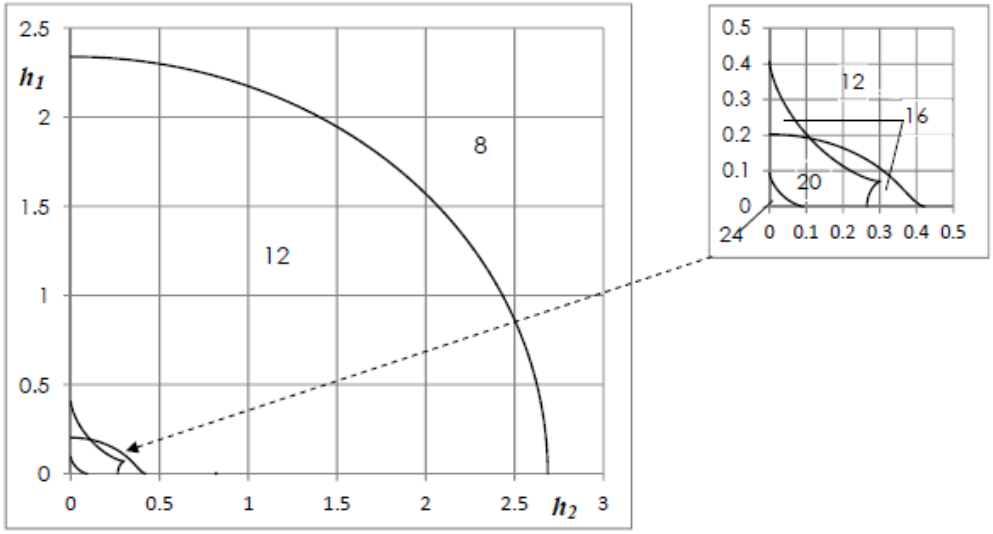


Fig. 8. ν=0.1, $h_3 = 0.495$

Численные результаты ν=0.1

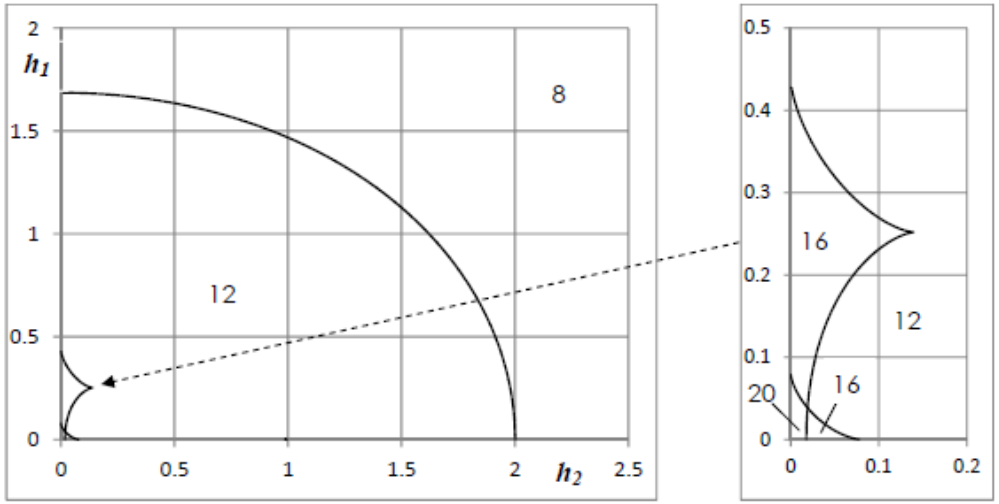


Fig. 9. ν=0.1, $h_3 = 0.9$

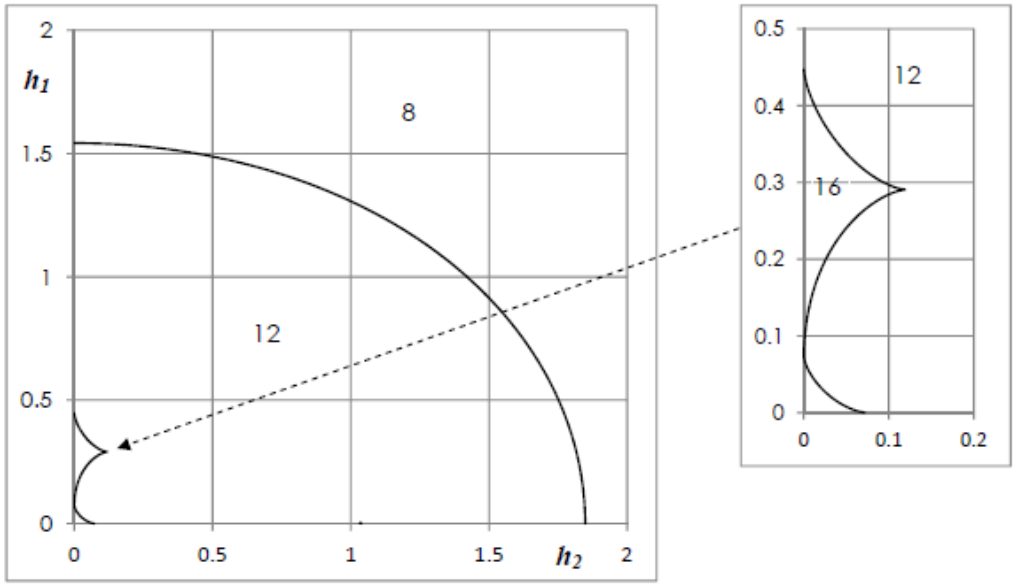


Fig. 10. ν=0.1, $h_3 = 1.021$

Численные результаты ν=0.1

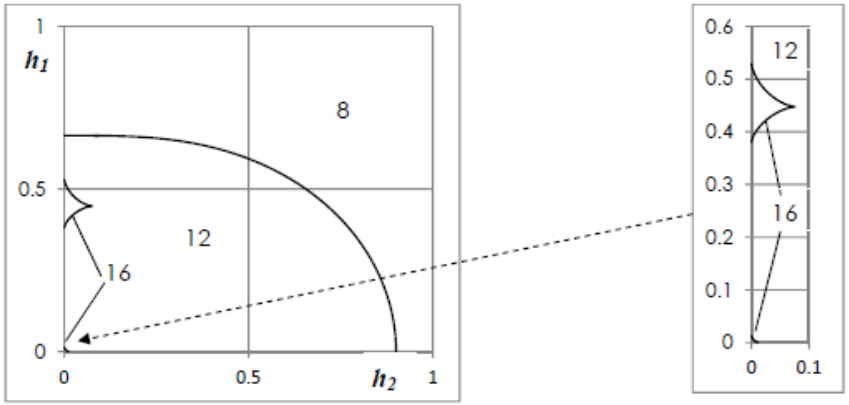


Fig. 11. ν=0.1, $h_3 = 2.0$

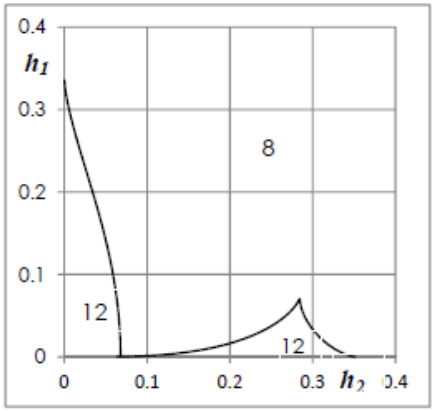


Fig. 12. ν=0.1, $h_3 = 3.61$

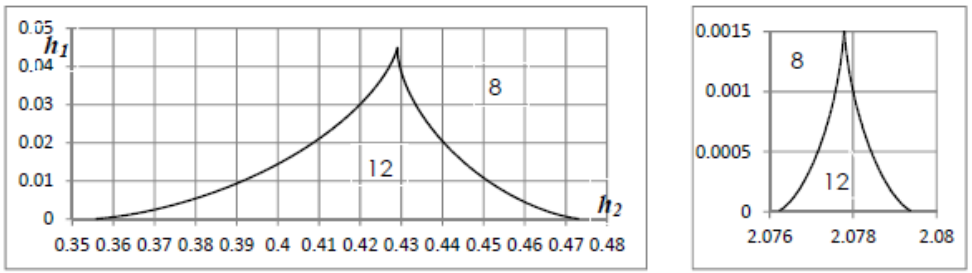


Fig. 13. ν=0.1, $h_3 = 4.0$

Численные результаты v=0.2

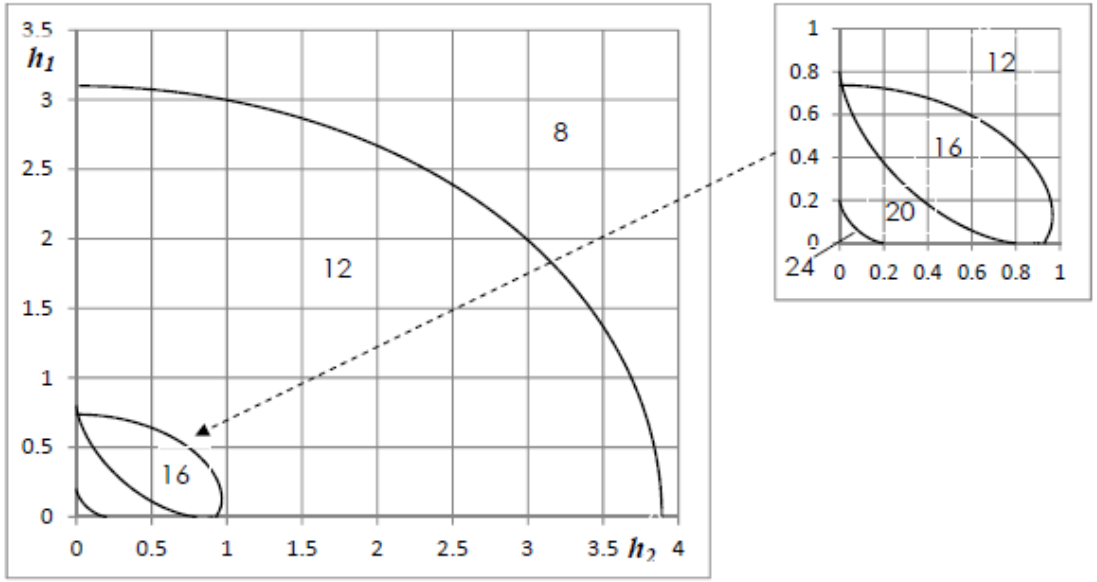


Fig. 14. v=0.2, $h_3 = 0.01$

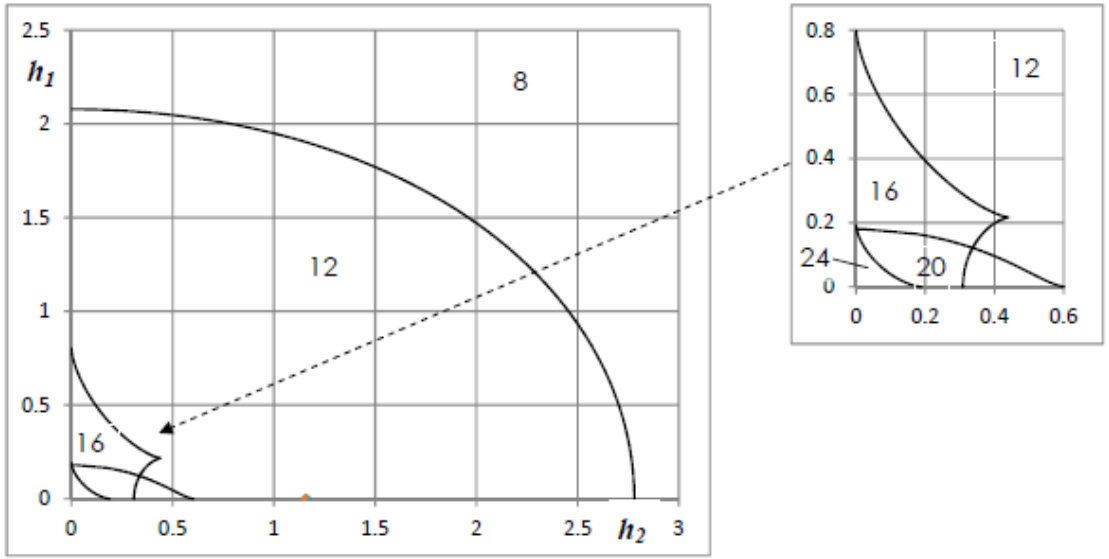


Fig. 15. v=0.2, $h_3 = 0.4$

Численные результаты v=0.2

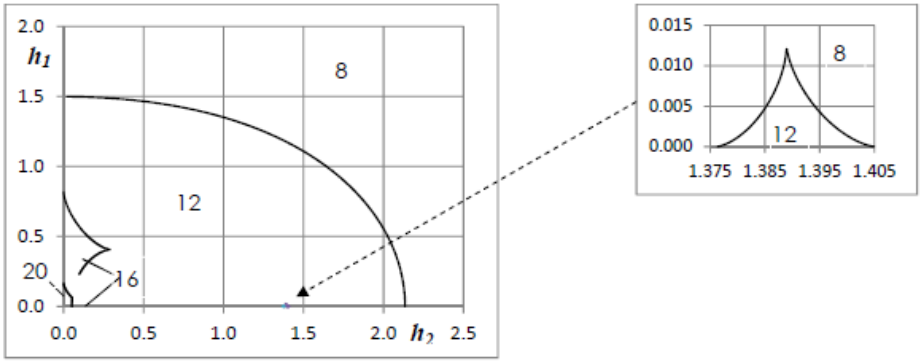


Fig. 16. v=0.2, $h_3 = 0.8$

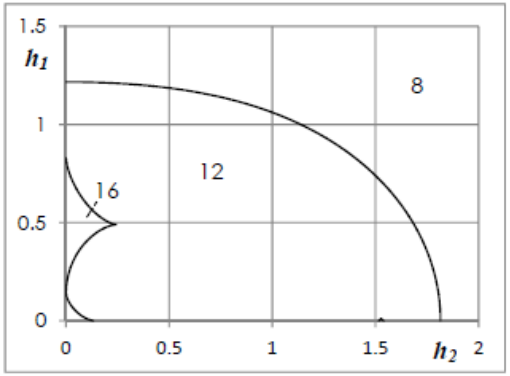


Fig. 17. v=0.2, $h_3 = 1.048$

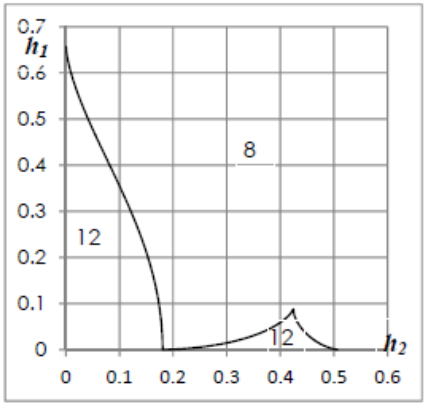


Fig. 18. v=0.2, $h_3 = 3.264$

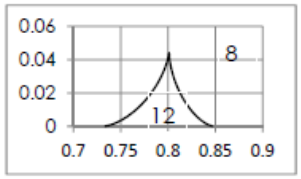


Fig. 19. v=0.2, $h_3 = 4$

Численные результаты ν=0.3

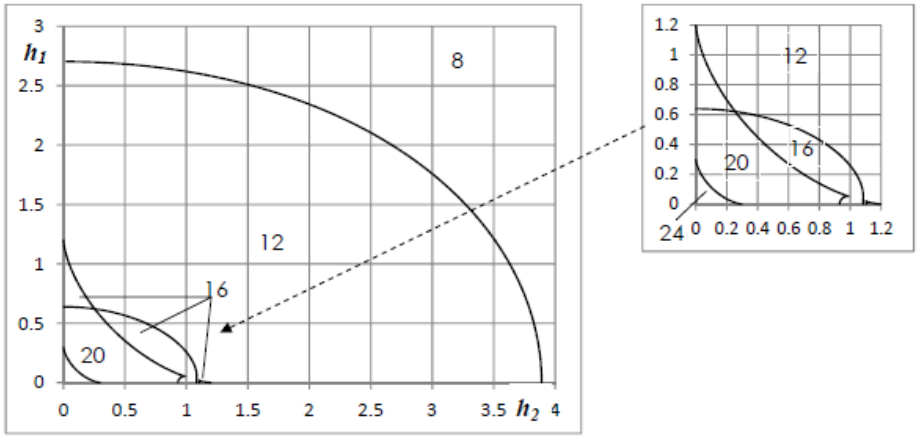


Fig. 20. ν=0.3, h_3 = 0.01

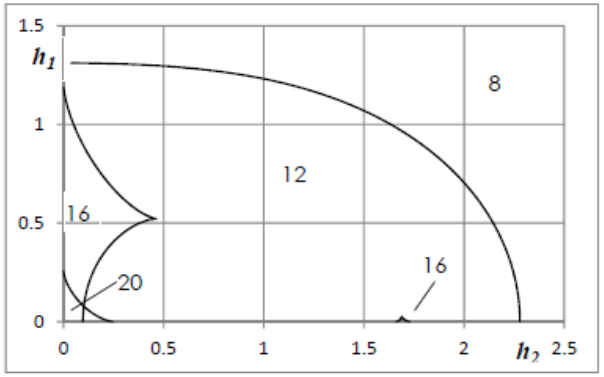


Fig. 21. ν=0.3, h_3 = 0.7

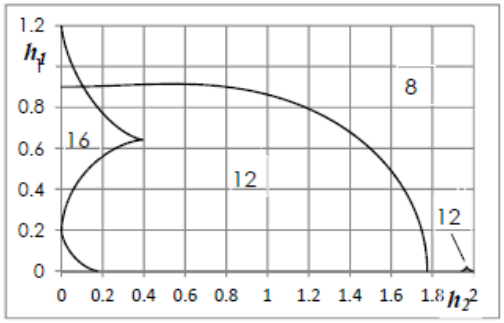


Fig. 22. ν=0.3, h_3 = 1.082

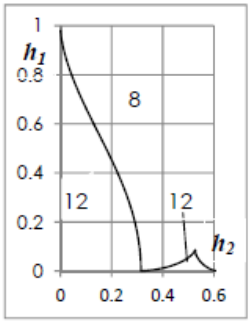


Fig. 23. ν=0.3, h_3 = 2.95

Численные результаты ν=0.4

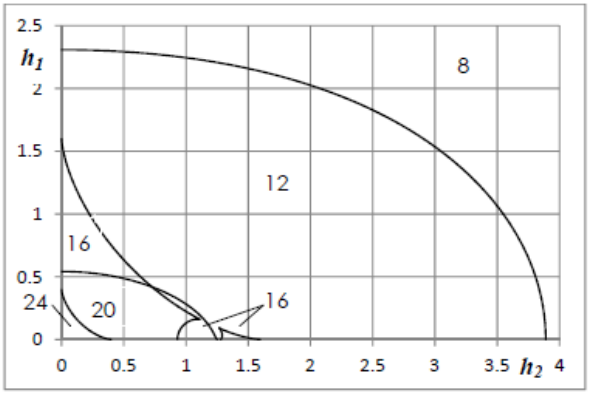


Fig. 24. ν=0.4, h_3 = 0.01

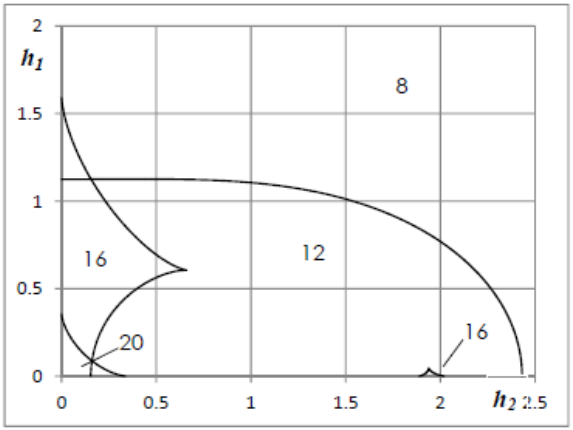


Fig. 25. ν=0.4, h_3 = 0.6

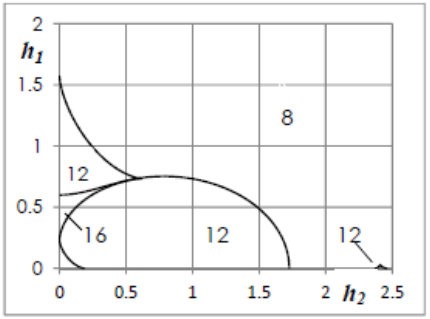


Fig. 26. ν=0.4, h_3 = 1.124

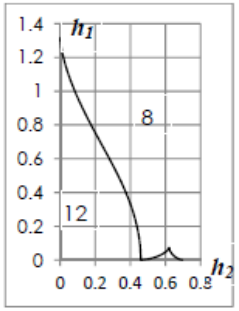


Fig. 27. ν=0.4, h_3 =2.7

Численные результаты v=0.5

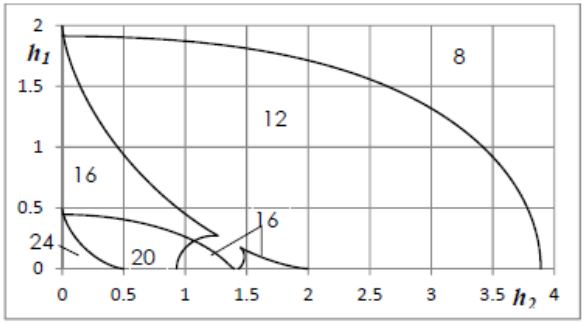


Fig. 28. v=0.5, h_3 = 0.01

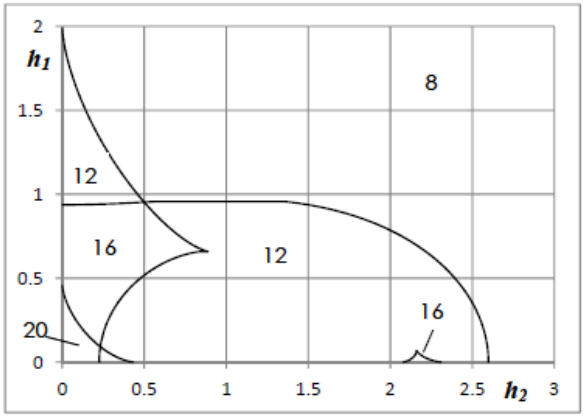


Fig. 29. v=0.5, h_3 = 0.5

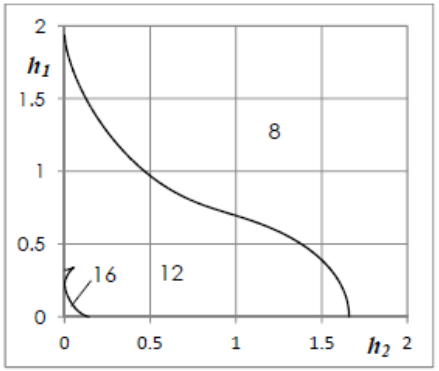


Fig. 30. v=0.5, h_3 =1.182

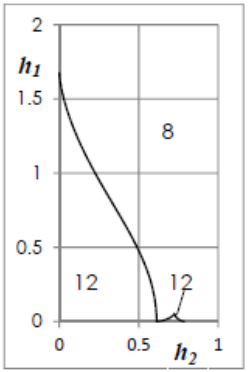


Fig.31. v=0.5, h_3=2.412

Численные результаты v=0.6

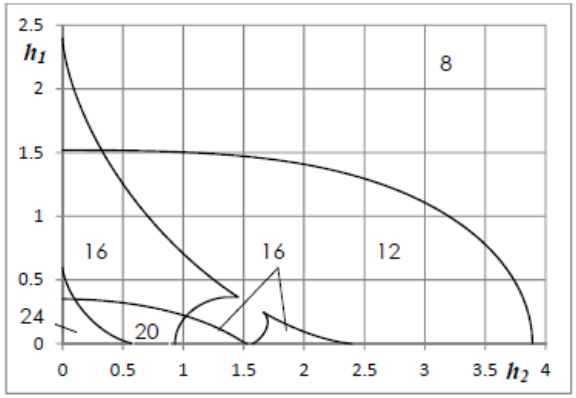


Fig. 32. v=0.6, h_3 = 0.01

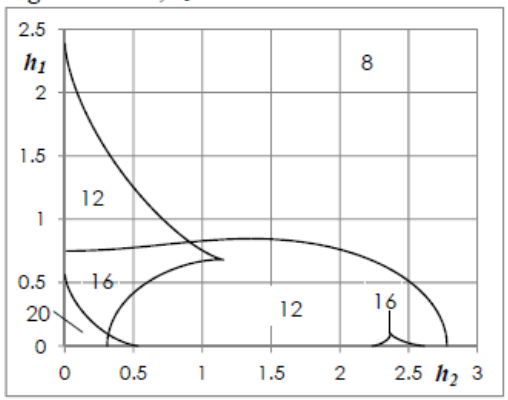


Fig. 33. v=0.6, h_3 = 0.4

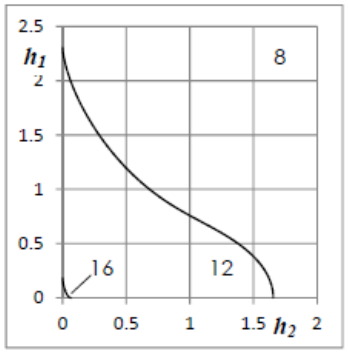


Fig. 34. v=0.6, h_3 = 1.186

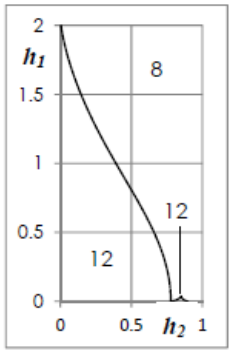


Fig. 35. v=0.6, h_3=2.167

Численные результаты v=0.7

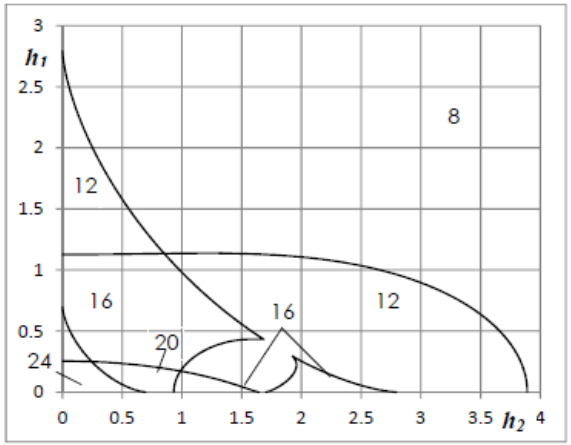
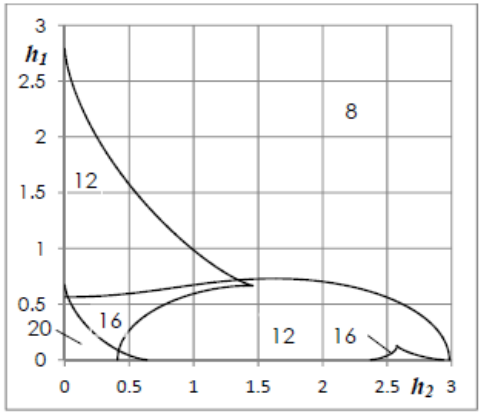


Fig. 36. v=0.7, h_3 = 0.01



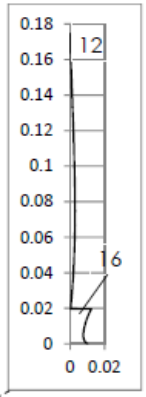


Fig. 37. v=0.7, h_3 = 0.3

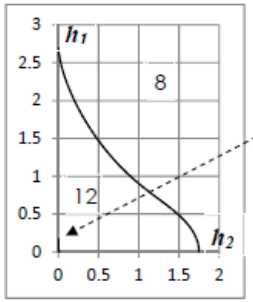


Fig. 38. v=0.7, h_3 = 1.105

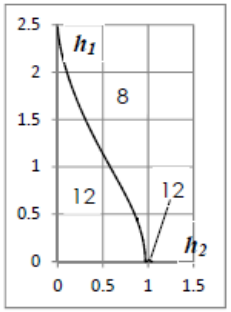


Fig. 39. v=0.7, h_3=1.915

Численные результаты ν=0.8

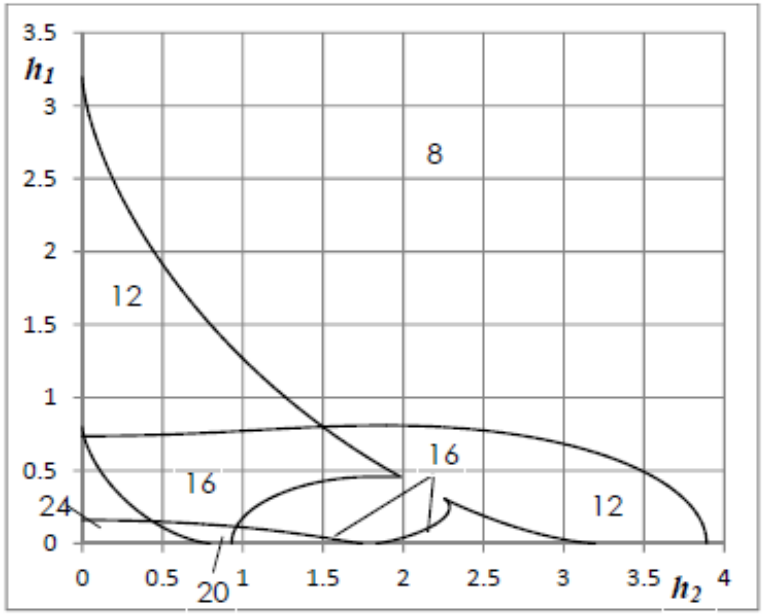


Fig. 40. ν=0.8, h_3 = 0.01

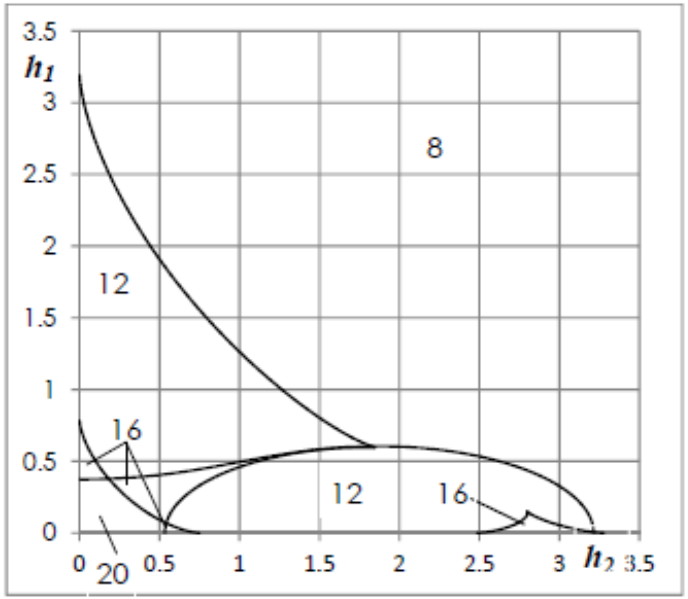


Fig. 41. ν=0.8, h_3 = 0.2

Численные результаты ν=0.8

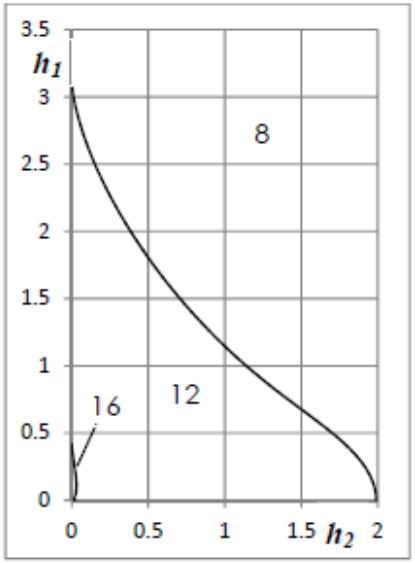


Fig. 42. ν=0.8, h_3 = 0.909

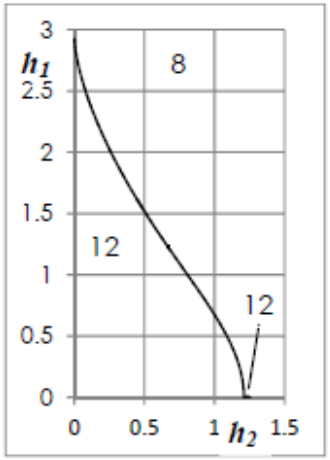


Fig. 43. ν=0.8, h_3=1.629

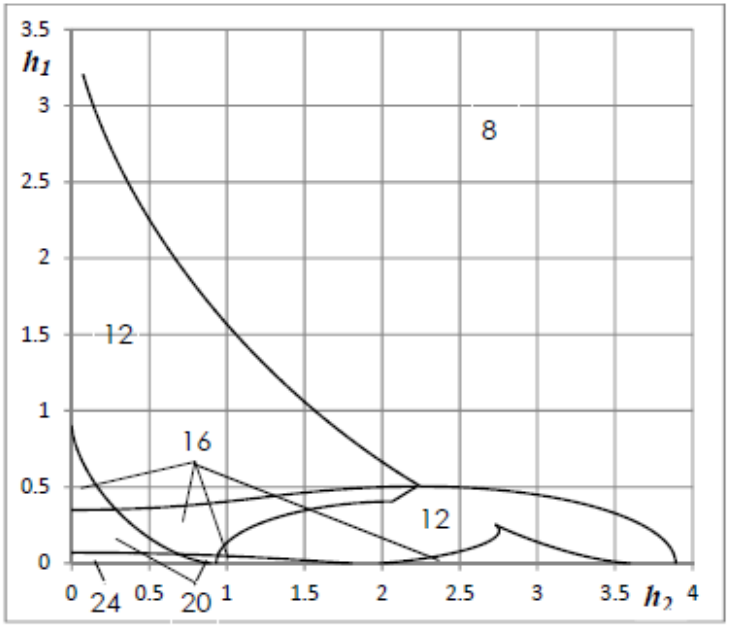


Fig. 44. ν=0.9, h_3 = 0.01

Численные результаты v=0.9

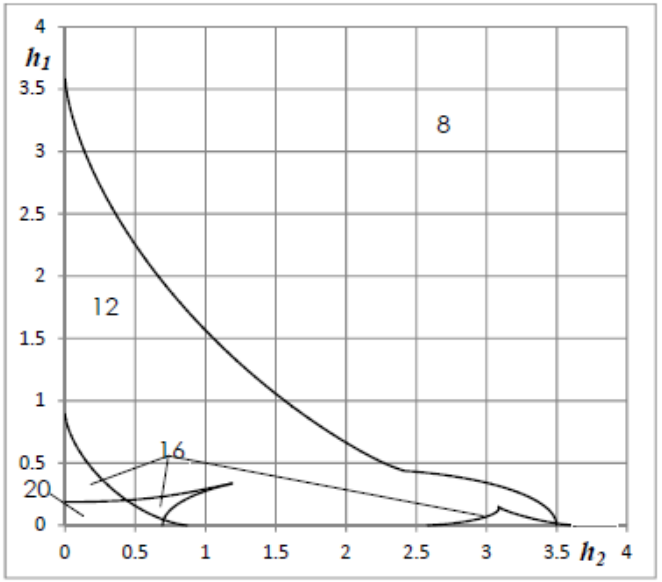


Fig. 45. v=0.9, h_3 = 0.1

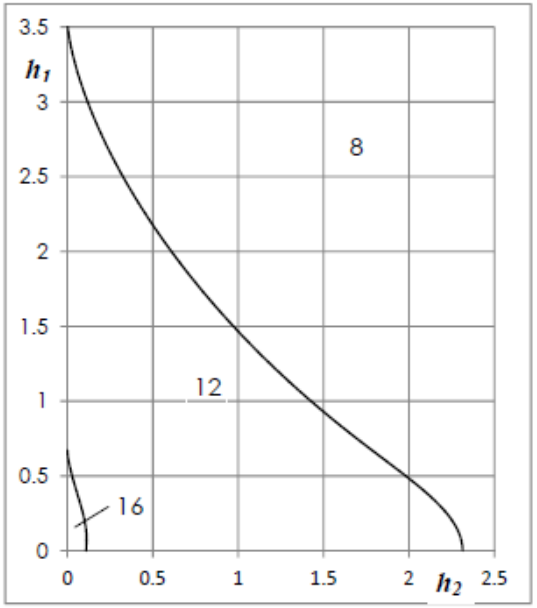


Fig. 46. v=0.9, h_3 = 0.676

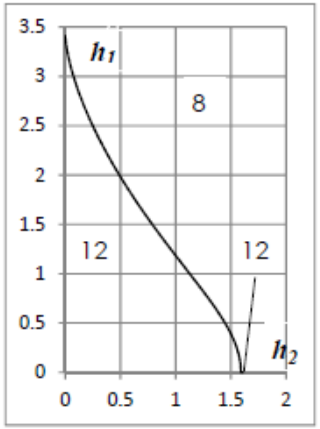


Fig. 47. v=0.9, h_3=1.245

Численные результаты v=0.9

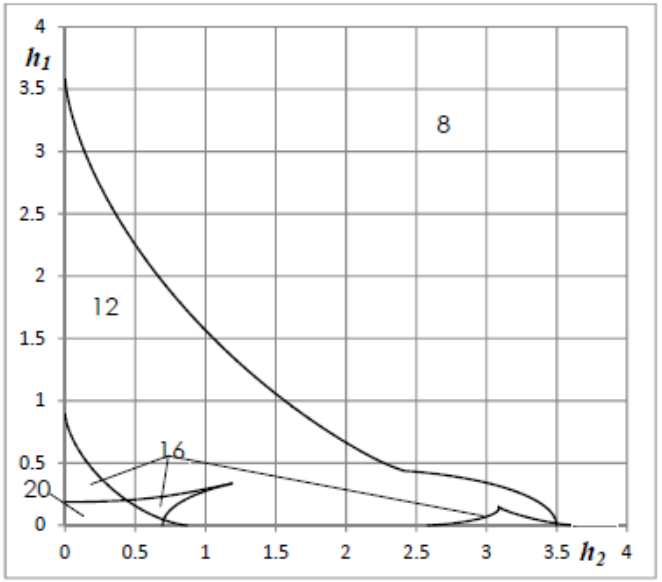


Fig. 45. v=0.9, h_3 = 0.1

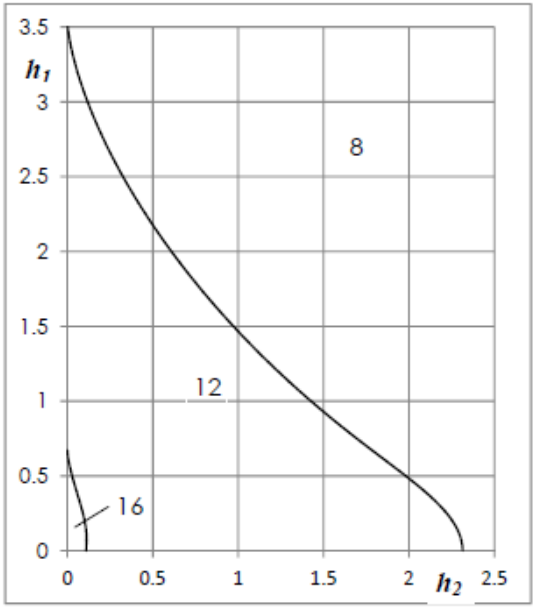


Fig. 46. v=0.9, h_3 = 0.676

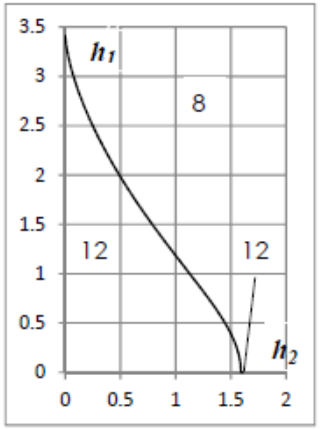


Fig. 47. v=0.9, h_3=1.245

Численные результаты ν=0.99

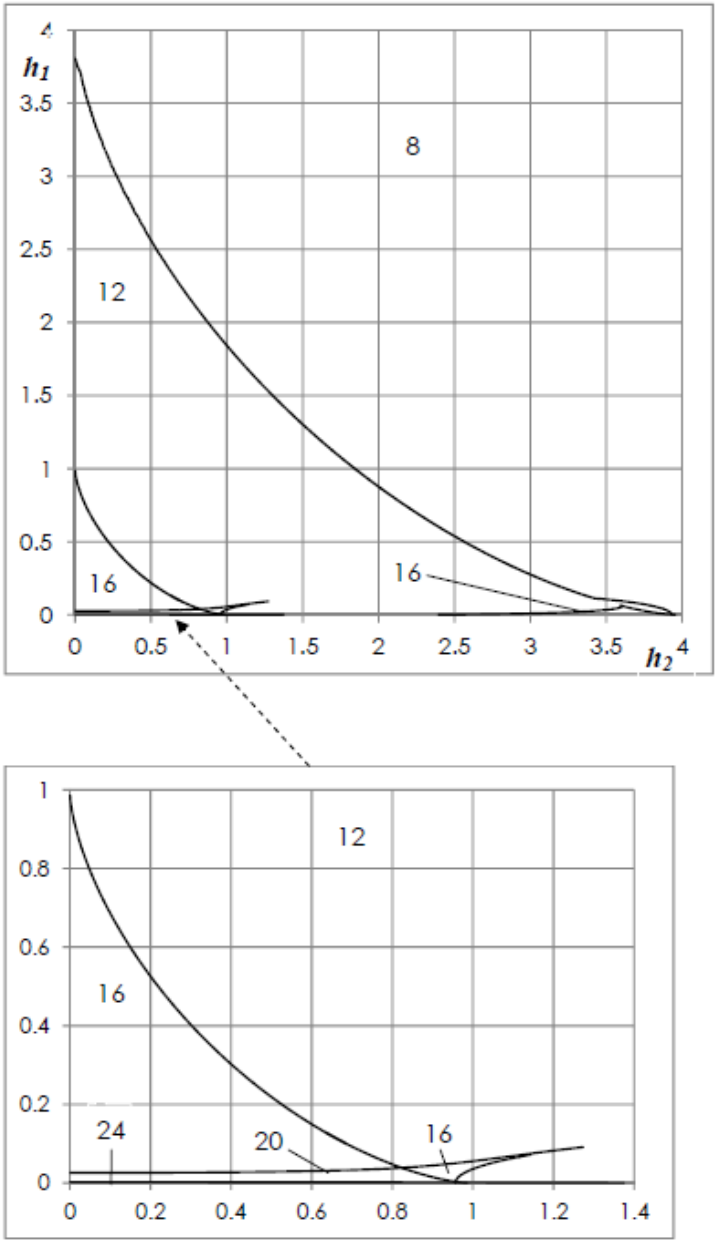
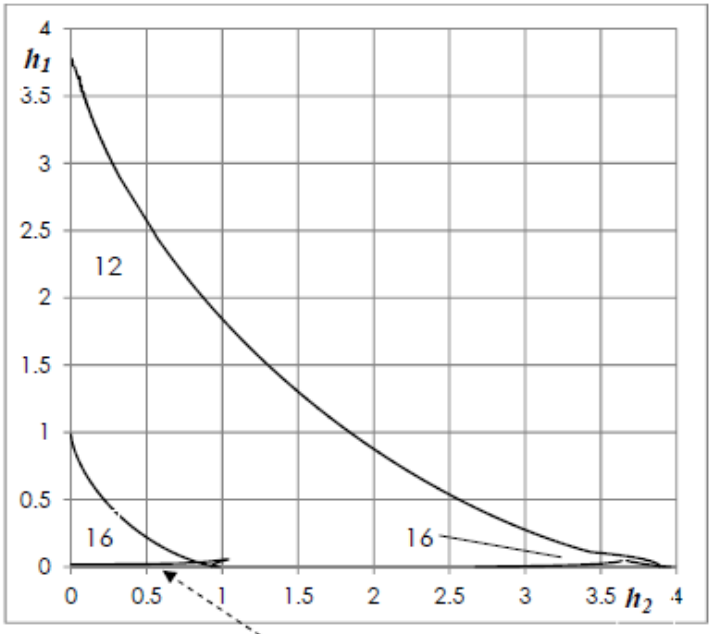


Fig.48. ν=0.99, h_3 = 0.005

Численные результаты ν=0.99



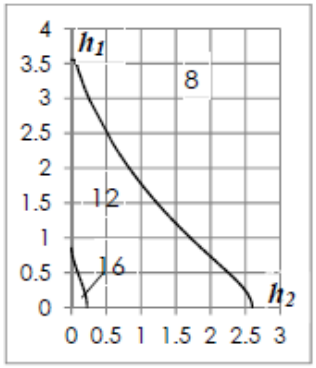


Fig. 50. ν=0.99, $h_3 = 0.5$

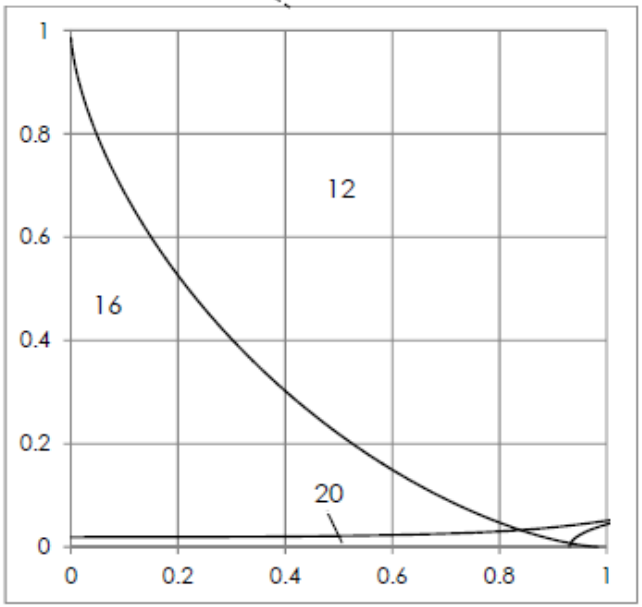


Fig. 49. ν=0.99, $h_3 = 0.01$

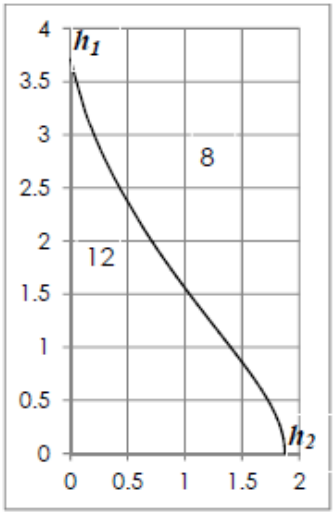


Fig. 51. ν=0.99, h_3=1.0

Численные результаты v=1.0

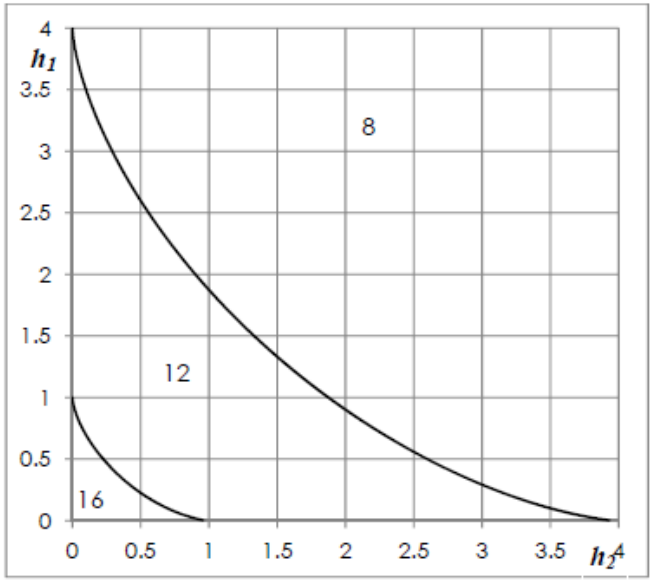


Fig. 52. v=1.0, h_3 = 0.005

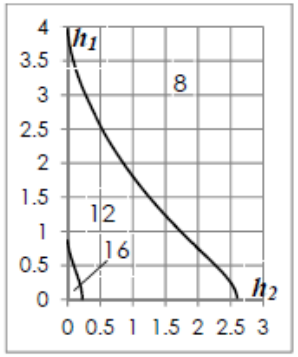


Fig. 53. v=1.0, h_3 =0.5

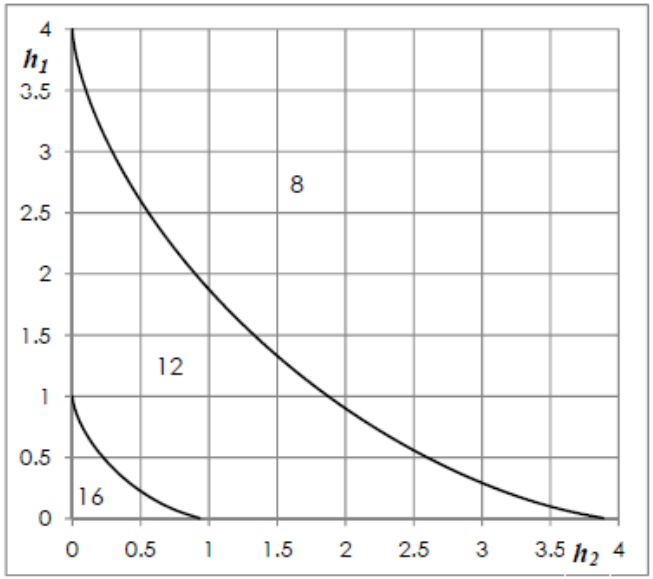


Fig. 54. v=1.0, h_3 = 0.01

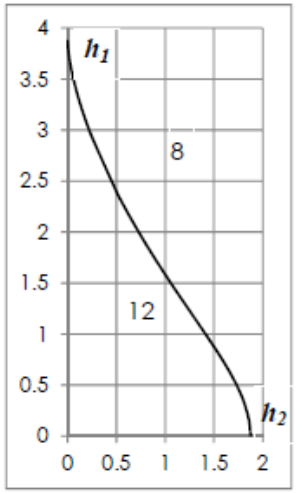


Fig. 55. v=1.0, h_3 = 1.0