

О неформальных решениях уравнения Малера

И. В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
РАН

Доклад подготовлен на основе совместной работы с
Р. Р. Гонцовым, ИППИ РАН

Некоторые понятия

Аналитическим уравнением Малера будем называть уравнение вида

$$F(x, y(x), y(x^\ell), \dots, y(x^{\ell^n})) = 0, \quad \ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad (1)$$

где $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ – аналитическая функция в окрестности $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$.

Эквивалентная запись уравнения (1):

$$F(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y) = 0,$$

с использованием **оператора Малера** $\mu : y(x) \mapsto y(x^\ell)$.

Функциональный ряд, члены которого можно описать и упорядочить, но про его сходимость ничего неизвестно, называется **формальным** рядом.

Если предположить правомерность операций возведения формальных рядов в степень, однократного или многократного применения к ним функциональных операторов, умножения их на функции, умножения и (бесконечного) сложения результатов этих действий между собой, то такие ряды можно подставлять в аналитические функциональные уравнения.

Формальный степенной ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\lambda_k}, \quad c_k, \lambda_k \in \mathbb{C},$$

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_0 \leq \operatorname{Re} \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

называется (формальным) **обобщенным** степенным рядом. Число показателей λ_k с одинаковой вещественной частью у такого ряда конечно.

Будем говорить, что подстановка обобщенного степенного ряда в аналитическое функциональное уравнение корректна, если в результате подстановки получается новый обобщенный степенной ряд.

А также будем говорить, что обобщенный степенной ряд **формально** удовлетворяет аналитическому функциональному уравнению $F = 0$ (или является **формальным** решением уравнения $F = 0$), если в результате подстановки в левой части уравнения получается обобщенный степенной ряд с нулевыми коэффициентами.

Функция $f(x)$, которая является решением линейного уравнения Малера

$$b(x) + a_0(x)y + a_1(x)\mu y + \cdots + a_n(x)\mu^n y = 0,$$

где $\mu : y(x) \mapsto y(x^\ell)$, $b, a_i \in \mathbb{C}(x)$, называется **ℓ -функцией Малера**.

Предисловие

Как известно, комплексные (и, в частности, вещественные) числа можно разделить на **алгебраические** и **трансцендентные**. Алгебраические числа определяются тем, что являются корнями многочленов с целыми коэффициентами, неалгебраические числа называются трансцендентными.

В 1844 году **Лиувиль** доказал существование трансцендентных чисел и привел пример такого числа: $\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ (число Лиувилля).

Отметим, что есть много способов записать вещественное число x . Например,

- в виде **p -ичной дроби** $x = x_n \dots x_0, x_{-1}x_{-2} \dots,$
- в виде **числового ряда** $x = \sum_{j=-n}^{+\infty} x_{-j}p^{-j},$

где $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_{-j} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Для произвольной p -ичной дроби с бесконечным числом знаков после запятой определить, является ли она алгебраическим числом или трансцендентным, — это довольно сложная задача теории чисел. То же самое относится к комплексным числам, содержащим такие дроби в вещественной или мнимой частях.

Введение

Имеется много разных методов исследования комплексных чисел на трансцендентность. Один из них придумал Малер в 1929 году. Он предложил рассматривать не числовые ряды, а функциональные, к которым можно применять результаты теории функции комплексного переменного (ТФКП) и аналитической теории функциональных уравнений. Например, с помощью ТФКП им была доказана следующая теорема.

Теорема Малера. Пусть α – произвольное алгебраическое число с $0 < |\alpha| < 1$, и имеется сходящийся степенной ряд

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

с единичным радиусом сходимости, удовлетворяющий функциональному уравнению

$$f(x^\ell) = R(x, f(x)),$$

где $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, R – рациональная функция двух переменных с рациональными коэффициентами. Тогда $f(\alpha)$ – трансцендентное число.

Доказательство теоремы Малера состояло из двух частей: 1) доказательство того, что решением уравнения $f(x^\ell) = R(x, f(x))$ является трансцендентная функция $f(x)$, 2) доказательство трансцендентности значения $f(\alpha)$. Метод доказательства, используемый во второй части, сейчас называется методом Малера.

Покажем на конкретном примере, как Малер применял методы ТФКП к доказательству трансцендентности функции (на самом деле, Малер получил сначала утверждение теоремы для этого примера).

Рассмотрим уравнение

$$f(x^2) = \frac{f(x)}{1-x}$$

с формальным решением

$$f(x) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{a_k} x^k, \quad (2)$$

где $a_k \in \{0, 1\}$, a_k – это элементы апериодической последовательности Пруэ–Туэ–Морса. Покажем, что $f(x)$ – это трансцендентная функция.

Для этого нам понадобится теорема Пойя-Карлсона из ТФКП.

Теорема Пойя-Карлсона. Если сходящийся в $E = \{|x| < 1\}$ степенной ряд $f(x)$ имеет целые коэффициенты, то либо 1) E – это область голоморфности функции $f(x)$, либо 2) $f(x) = p(x)/(1 - x^m)^n$, $p(x)$ – полином, $m, n \in \mathbb{N}$.

Согласно теореме **Пойя-Карлсона** ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{a_k} x^k$ попадает в один из этих случаев. Подставив рациональную функцию $p(x)/(1 - x^m)^n$ в уравнение $f(x^2) = \frac{f(x)}{1-x}$, получим, что она не может быть решением этого уравнения.

Действительно, после подстановки $p(x)/(1-x^m)^n$ в уравнение $f(x^2) = \frac{f(x)}{1-x}$ получается уравнение $(1-x)p(x^2) = (1+x^m)^n p(x)$, из которого следует, что $\deg p(x) = mn-1$. Если $n > 1$, то коэффициенты разложения функции $p(x)/(1-x^m)^n$ будут целыми и по модулю большими 1, чего не может быть, так как коэффициенты ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{a_k} x^k$ равны ± 1 . Если $n = 1$, то единичные по модулю коэффициенты разложения функции $p(x)/(1-x^m)^n$, начиная с некоторого момента, образуют периодическую последовательность, чего быть не может, поскольку последовательность Пруэ-Туэ-Морса является апериодической.

Из этого следует, что функция $f(x)$ с разложением

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{a_k} x^k$$

не продолжается голоморфно вне E и поэтому является трансцендентной функцией. Далее Малер с помощью своего метода доказал, что значение $f(\alpha)$ с алгебраическим α , $0 < |\alpha| < 1$, является трансцендентным числом.

Таким образом, результаты ТФКП и аналитической теории функциональных уравнений используются при решении задач теории чисел.

Отметим также, что в начале 80-ых годов Мендес способствовал возрождению интереса к линейным уравнениям Малера по причине их связи с теорией автоматов*, а именно с автоматными последовательностями.† Отметим, что ранее упомянутая последовательность Пруэ-Туэ-Морса является автоматной. Что касается аналитических уравнений Малера, то уже в начале 20-го века Малер рассматривал их в своих работах по теории чисел. Также они являются новым источником специальных функций. Например, среди этих спецфункций есть функции, которые через такое понятие как сюрреалистические числа связаны с теорией игр.

*В 1968 году Кобхэм установил эту связь.

†В частности, коэффициенты разложений функций Малера образуют автоматные последовательности.

В 1994 году **Безивен** получил следующий результат.

Теорема Безивена. Формальный степенной ряд $y(x)$, удовлетворяющий уравнению $P(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y) = 0$, где $P(x, y_0, \dots, y_n)$ — полином, имеет ненулевой радиус сходимости.

Отметим также результат **Нишиоки** 1997 года.

Теорема Нишиоки. Если многочлен $P(x, y_0, y_1)$ удовлетворяет условиям

$$P(0) = 0, \quad P'_{y_0}(0) \neq 0,$$

то уравнение $P(x, y, \mu y) = 0$ имеет и при том единственное голоморфное решение $y = y(x)$, $y(0) = 0$.

Обобщением теоремы Нишиоки будет следующая теорема:

Теорема 1. Если аналитическая функция $F(x, y_0, \dots, y_n)$ удовлетворяет условиям $F(0) = 0$, $F'_{y_0}(0) \neq 0$, то уравнение Малера $F(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y) = 0$ имеет и при том единственное решение $y = y(x)$, голоморфное в точке $x = 0$ и такое, что $y(0) = 0$.

Обобщением теоремы Безивена будет следующая теорема:

Теорема 2. Формальный степенной ряд $y(x)$, удовлетворяющий уравнению $F(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y) = 0$, где $F(x, y_0, \dots, y_n)$ — аналитическая в окрестности $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$ функция, имеет ненулевой радиус сходимости.

Приведём пример применения теоремы 1 к следующему уравнению Малера:

$$y(x^\ell) = f(y(x)), \quad y(0) = 0,$$

где $f(x) = ax^\ell + \dots$, $a \in \mathbb{C}^*$, — росток голоморфной неоднолистной ($\ell \geq 2$) в окрестности нуля функции. Существование биголоморфного решения $y(x)$ этой задачи означает, что росток f сопряжением приводится к своей главной части $\tilde{f}(x) = x^\ell$, т.е.

$$y^{-1} \circ f \circ y(x) = x^\ell.$$

Теорема 1 не может быть применена непосредственно к данному уравнению, поскольку $F'_{y_0}(0) = f'(0) = 0$, где $F(x, y_0, y_1) = y_1 - f(y_0)$. Поэтому для доказательства существования y сделаем замену $y = cx + xu$ зависимой переменной, где c — один из корней уравнения $c^{\ell-1} = a^{-1}$. Получим уравнение Малера относительно неизвестной u ,

$$cx^{\ell} + x^{\ell}u(x^{\ell}) = ax^{\ell}(c + u(x))^{\ell} + \dots$$

После упрощения последнее уравнение принимает вид

$$u(x^\ell) = \ell u(x) + h(x, u(x)), \quad u(0) = 0, \quad (*)$$

где h — голоморфная функция около $0 \in \mathbb{C}^2$ и $h'_u(0) = 0$.

Таким образом, из теоремы 1, применённой к уравнению (*), следует, что росток f сопряжением приводится к своей главной части $\tilde{f}(x) = x^\ell$, при этом y , удовлетворяющий условию $y'(0) = c$, единственен.

Дальнейшим обобщением теоремы Безивена является теорема 3.

Теорема 3. Если обобщенный степенной ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\lambda_k},$$

удовлетворяет уравнению

$$F(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y) = 0, \quad (1)$$

$F(x, y_0, \dots, y_n)$ – аналитическая в окрестности $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$ функция и

$$F'_{y_0}(x, \varphi, \mu\varphi, \dots, \mu^n \varphi) = A_0 x^{\nu_0} + o(x^{\nu_0}), \quad \nu_0 \in \mathbb{C}, \quad A_0 \neq 0,$$

то он сходится в некотором открытом секторе с вершиной в нуле достаточно малого радиуса и раствора.*

*Отметим, что здесь $o(x^{\nu_0})$ обозначает формальный обобщенный степенной ряд, начинающийся со степени ν_1 , $\operatorname{Re} \nu_1 > \operatorname{Re} \nu_0$.

Основные шаги доказательства

1. Доказывается **лемма**: В условиях теоремы 3, найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что преобразование $y = \sum_{k=1}^N c_k x^{\lambda_k} + x^{\lambda_N} u$ приводит уравнение (1) к виду

$$u = M(x, u, \mu u, \dots, \mu^n u),$$

где $M(x, u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}} a_{\mathbf{p}}(x) u_0^{p_0} u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n}$ — голоморфная по переменным u_j функция, представимая рядом с коэффициентами $a_{\mathbf{p}}$ — обобщёнными степенными рядами с ненулевым радиусом сходимости, показатели степени которых принадлежат конечнопорожденной аддитивной полугруппе $\Gamma = \{m_1 r_1 + \dots + m_s r_s, \operatorname{Re} r_i > 0, m_i \in \mathbb{Z}_+, m_1 + \dots + m_s > 0\}$.

2. Доказывается, что $u = \psi$,

$$\psi = \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k x^{\lambda_k - \lambda_N} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^s, |\mathbf{m}| > 0} c_{\mathbf{m}} x^{m_1 r_1 + \dots + m_s r_s},$$

$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s)$, $\operatorname{Re} r_i > 0$, при этом $r_1, \dots, r_s$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$.

3. Далее полагая $x^{r_i} = x_i$, переходим к рядам Тейлора многих переменных и аналитическому уравнению многих переменных.

4. Применяем к ним метод мажорант.

Отметим, что из доказательства теоремы 3 следует, существование формального решения в виде обобщенного степенного ряда для уравнений вида

$$y = M(x, y, \mu y, \dots, \mu^n y),$$

где $M(x, y_0, \dots, y_n)$ – голоморфная в окрестности нуля по переменным $y_0, \dots, y_n$ функция с коэффициентами, являющимися сходящимися обобщенными степенными рядами в некотором открытом секторе с вершиной в нуле.

Также отметим, что в отличие от аналитических разностных, q -разностных и дифференциальных уравнений, аналитические уравнения Малера могут иметь формальные решения в виде степенных рядов, множества показателей степени которых имеют точки накопления.

Пример 1. Линейное уравнение Малера первого порядка

$$ay(x^\ell) - y = x,$$

$a \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, имеет формальное решение $y = \varphi(x)$ в виде ряда Хана

$$\varphi(x) = \sum_{k \geq 1} (1/a)^k x^{1/\ell^k},$$

сходящегося при $a > 1$ и расходящегося при $a \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{C}^*$. Множество показателей степени этого ряда $\{1/\ell^k : k \in \mathbb{N}\}$ имеет точку накопления 0.

Пример 2. Нелинейное уравнение Малера первого порядка

$$x^{2\ell}(y(x) - 1)y(x^\ell) = xy(x)(y(x^\ell) - 1),$$

$\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, имеет формальное решение $y = \varphi(x)$ в виде ряда Хана

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x \sum_{k \geq 1} x^{1/\ell^k} \right)^i.$$

Множество показателей степени этого ряда $\{i + j/\ell^k : i, j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N}\}$ имеет точки накопления в каждой точке множества $\mathbb{N}$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y^4 - (\mu y)^2 - x^4 = 0, \quad \mu : y(x) \mapsto y(x^2).$$

Оно имеет решение в виде сходящегося (в силу теоремы 3) обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+} c_{m_1, m_2} x^{r + m_1(1-r) + m_2 r},$$

где коэффициент $c_{0,0} \neq 0$ – произвольный, остальные коэффициенты $c_{m_1, m_2} \in \mathbb{C}$ – однозначно определены, показатель степени $r \in \mathbb{C}$ – произвольный с $0 < \operatorname{Re} r < 1$.