Описание аппарата геометрической алгебры и его реализации в системе ко мпьютерной алгебры SymPy

Геворкян Мигран Нельсонович

23 марта 2022

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Мотивация изучения геометрической алгебры

- Геометрическая алгебра — реализация алгебры Клиффорда. Основы восходят к 19 веку, а основные исследования — 21 век.
- Характер исследований в основном прикладной: физика и математические основы компьютерной графики.
- Аппарат геометрической алгебры — частный случай тензорного формализма. Специализация упрощает математический аппарат так как подстраивает его под ряд задач.
- С помощью геометрической алгебры описывается спиновое пространство, повороты и бусты в СТО, ряд релятивистских эффектов: преобразования Лоренца, сложение скоростей, прецессия Томаса, фаза Берри, эффект Ааронова–Бома.
- В области компьютерной графики — универсальный способ описания отражений и вращений.
- Обобщение алгебр комплексных чисел, кватернионов, гиперболических чисел, дуальных чисел и т.д.

Модуль galgebra для SymPy

На сайте bivector.net собран список библиотек, реализующих операции геометрической алгебры.

- Clifford — библиотека для языка Python.
- Ganja.js — библиотека для JavaScript, поддерживает визуализацию.
- Garamon — библиотека C++ для генерации кода для конкретных размерностей пространства L.
- Grassmann.jl — библиотека для Julia.
- Klein, Versor — библиотека для C++.

Символьные вычисления поддерживаются:

- Grassmann.jl — ограниченная поддержка, есть ошибки.
- galgebra — модуль для Python, основанный на SymPy http://galgebra.readthedocs.io.

Основные понятия

- Линейное пространство L (евклидово или псевдоевклидово) с ортонормированным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.
- Контравариантные кососимметричные тензоры валентности $(0, p)$ называются p-векторами или поливекторами.
- Пространство p-векторов и операция внешнего произведения $\wedge$ образуют внешнюю алгебру т.е. ассоциативную алгебра над полем $\mathbb{R}$, реализацию абстрактной алгебры Грассмана).
- Объекты, состоящие из формальной суммы всех возможных p-векторов, называются мультивекторами и образуют градуированную алгебры (геометрическую алгебру, реализацию алгебры Клиффорда) относительно операции геометрического произведения.

Внешнее произведение векторов

Внешним произведением векторов из линейного пространства L называется операция $\wedge$, которая для любых векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ из L обладает следующими свойствами:

1. $1 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge 1$, где $1 \in \mathbb{R}$;
2. $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ — ассоциативность;
4. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ — правая дистрибутивность;
5. $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ — левая дистрибутивность;
6. $\mathbf{u} \wedge (\alpha\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$;
7. $\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}}$ — антикоммутативность (антисимметричность, кососимметричность).

Свойство антисимметричности равносильно следующему:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0.$$

Внешние алгебры над L с $\dim L = 2$

Для двумерного линейного пространства L можно построить следующие внешние алгебры:

p	$\Lambda^p(L)$	Базис	Элемент	Ранг
0	$\mathbb{R}$	1	$a = a \cdot 1$	1
1	L	$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$	$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$	2
2	$\Lambda^2(L)$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{a} = a^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	1
3	$\Lambda^3(L)$	0	$\mathbf{a} = 0$	0

Из таблицы видно, что максимальный ранг (grade) p внешней алгебры $\Lambda^p(L)$ зависит от размерности пространства L равной n и он не может быть выше, чем n.

Внешние алгебры над L с $\dim L = 2$ в galgebra

С помощью пакета galgebra можно все возможные p-векторы в двумерном пространстве задать следующим образом:

```
xy = (x, y) = sp.symbols('1 2', real=True)
o2d = Ga('e_1 e_2', g=[1, 1], coords=xy)
```

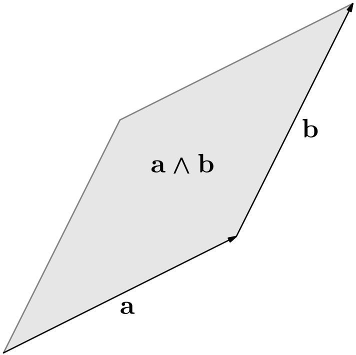
Ввод [25]:

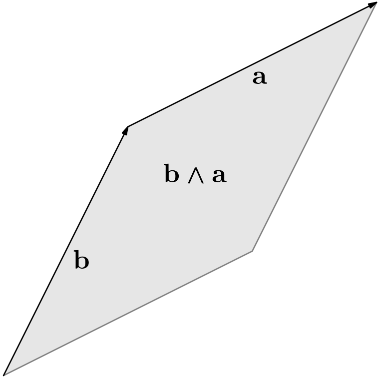
```
a_scalar = o2d.mv('a', 0)
a_vect = o2d.mv('a', 1)
a_bivect = o2d.mv('a', 2)

a_scalar, a_vect, a_bivect
```

Out[25]: $\left(a,\ a^{1}\boldsymbol{e}_1 + a^{2}\boldsymbol{e}_2,\ a^{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2\right)$

Бивектор, как ориентированная площадь





$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

Внешнее произведение в galgebra

Внешнее произведение двух векторов в двухмерном пространстве дает бивектор с единственной компонентой, равной ориентированной площади параллелограмма:

Ввод [28]:

```
a = o2d.mv('a', 1)
b = o2d.mv('b', 1)

a^b
```

Out[28]: $\left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Внешние алгебры над L с $\dim L = 3$

Увеличим теперь размерность L до трех и составим такую же таблицу:

p	$\Lambda^p(L)$	Базис	Элемент	Ранг
0	$\mathbb{R}$	1	$a = a \cdot 1$	1
1	L	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$	3
2	$\Lambda^2(L)$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$	3
3	$\Lambda^3(L)$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a^{123}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	1

Ввод [9]:

```
o3d = Ga('e_1 e_2 e_3', g=[1, 1, 1], coords=xyz)
a, b, c = o3d.mv('a', 1), o3d.mv('b', 1), o3d.mv('c', 1)
```

Векторное и смешанное произведения galgebra

- Внешнее произведение $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ дает бивектор с тремя компонентами, соответствующими компонентам вектора из векторного произведения.
- Внешнее произведение $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ дает тривектор, с одной компонентой, равной ориентированному объему (смешанное произведение).

Ввод [7]:

```
bv = a ^ b
tv = a ^ b ^ c
bv, tv
```

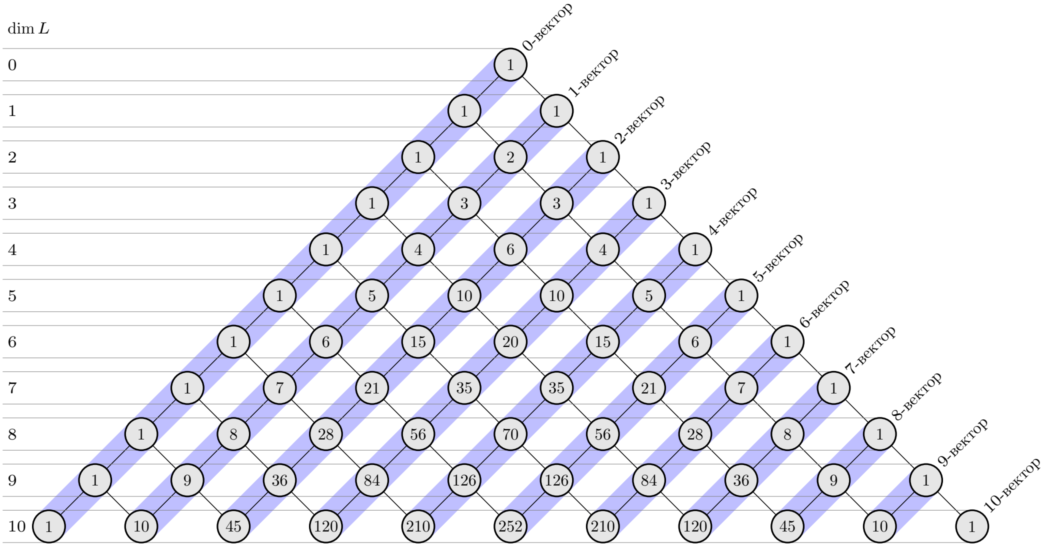
Out[7]:

$$\left(\left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \left(a^1 b^3 - a^3 b^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,\right.$$
$$\left.\left(a^1 b^2 c^3 - a^1 b^3 c^2 - a^2 b^1 c^3 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^1 c^2 - a^3 b^2 c^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3\right)$$

Базисные p-векторы

$\dim L$	rank	$\dim \Lambda^p$	Базис
0	Скаляр	1	1
1	Скаляр	1	1
	Вектор	1	$\mathbf{e}$
2	Скаляр	1	1
	Вектор	2	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
	Бивектор	1	$\mathbf{e}_{12}$
3	Скаляр	1	1
	Вектор	3	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
	Бивектор	3	$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$
	Тривектор	1	$\mathbf{e}_{123}$
4	Скаляр	1	1
	Вектор	4	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$
	Бивектор	6	$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}$
	Тривектор	4	$\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{134}, \mathbf{e}_{234}$
	Квадривектор	1	$\mathbf{e}_{1234}$

Внешние алгебры вплоть до $n = 10$



Разложимый p-вектор

Разложимым называют такой p-вектор $\mathbf{A}$, который выражается через внешнее произведение p различных векторов из L:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$$

Также использую термин простой (simple) вектор и blade (лезвие).

Не всякий p-вектор разложим, однако в трехмерном пространстве L все p-векторы разложимы.

p-вектор максимального ранга называется элементом единичного объема и обозначается как:

$$\boxed{\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_{123\ldots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n}$$

Мультивектор

Рассмотрим объект, состоящий из элементов различного ранга:

$$\mathbf{M} = a + \mathbf{u} + \underset{2}{\mathbf{V}} + \underset{3}{\mathbf{W}} + \ldots$$

Число под буквой указывает на ранг объекта то есть:

- a — скаляр (действительное число);
- $\mathbf{u}$ — вектор из $\Lambda^1(L) = L$;
- $\underset{2}{\mathbf{V}}$ — бивектор из $\Lambda^2(L)$;
- $\underset{3}{\mathbf{W}}$ — тривектор из $\Lambda^3(L)$;
- и так далее.

Данный объект называется мультивектором или реже числом Клиффорда. Пространство мультивекторов обозначим как $\Lambda(L)$.

Геометрическое произведение. Аксиоматическое определение

Геометрическим произведением двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ назовем отображение $L \times L \to L$, которое имеет следующие свойства.

- Геометрическое умножение двух скаляров сводится к обычному умножению, определенному в поле этих скаляров.
- Геометрическое умножение скаляра на вектор из L сводится к обычному умножению, определенному в L.
- Геометрическое произведение вектора $\mathbf{u}$ самого на себя равно скаляру, значения которого равно норме вектора (норме):
$$\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$
- Дистрибутивность: $\mathbf{u}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}$. В силу того, что $\mathbf{u}$ может быть скаляром, из дистрибутивности следует линейность.
- Ассоциативность: $\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\mathbf{u})\mathbf{w}$.

Коммутативность или антикоммутативность явным образом не требуется. Геометрическое произведение никак не обозначается.

Геометрическое произведение. Конструктивное определение

Геометрическое произведение двух векторов можно определить так:

$$\mathbf{uv} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

Ввод [9]:

```
u = o2d.mv('u', 1)
v = o2d.mv('v', 1)
u*v
```

Out[9]: $\left(u^1 v^1 + u^2 v^2\right) + \left(u^1 v^2 - u^2 v^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Ввод [10]:

```
u = o3d.mv('u', 1)
v = o3d.mv('v', 1)
u*v
```

Out[10]: $\left(u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3\right) + \left(u^1 v^2 - u^2 v^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \left(u^1 v^3 - u^3 v^1\right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \left(u^2 v^3 - u^3 v^2\right) \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$

Обратный элемент

Можно определить обратный вектор $\mathbf{u}^{-1} = \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$ относительно геометрического произведения:

$$\mathbf{u}\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = 1,$$

Ввод [11]:

```
u.inv()
```

Out[11]:

$$\frac{u^1}{\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{u^2}{\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{u^3}{\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2}\boldsymbol{e}_3$$

Геометрическое произведение и ортонормированный базис

Рассмотрим ортонормированный базис евклидова пространства $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и найдем как на векторы $\mathbf{e}_i$ действует геометрическое произведение:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \delta_{ij} + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.$$

При $i \neq j$ получим:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i.$$

При $i = j$ получим в силу антисимметричности $\wedge$ и ортонормированности базиса:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + \underbrace{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i}_{=0} = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1.$$

В результате:

$$\boxed{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i,\ i \neq j \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1}$$

Кроме того, если $i \neq j$, то $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, то есть базис бивекторов можно выразить через геометрическое произведение. В общем случае:

$$\mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$$

Базисы для разных размерностей

$\dim L$	rank	$\dim \Lambda^p$	Базис
0	Скаляр	1	1
1	Скаляр	1	1
	Вектор	1	$\mathbf{e}$
2	Скаляр	1	1
	Вектор	2	$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2$
	Бивектор	1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
3	Скаляр	1	1
	Вектор	3	$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$
	Бивектор	3	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$
	Тривектор	1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$
4	Скаляр	1	1
	Вектор	4	$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$
	Бивектор	6	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$
	Тривектор	4	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$
	Квадривектор	1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$

Геометрическое произведение произвольных мультивекторов

Теперь мы можем применить геометрическое произведение к любым мультивекторам, достаточно знать разложение по базисным p-векторам. Например:

$$(3 + 5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)(4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + 20\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - 20\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_2$$

Это справедливо, так как:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 \underbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2}_{1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1} \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \underbrace{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}_{=1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2.$$

- Геометрическое умножение похоже на обычное, но нельзя менять сомножители местами.
- Переставлять местами можно только базисные векторы, меняя при этом знак.

Геометрическое произведение произвольных мультивекторов

Ввод [26]:
```
M1 = o3d.mv('u', 0) + o3d.mv('u', 1) + o3d.mv('u', 3)
M2 = o3d.mv('v', 1) + o3d.mv('v', 2)
M1, M2
```

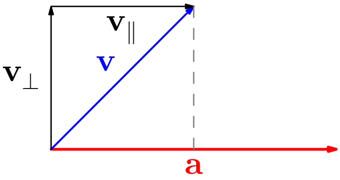
Out[26]: $\left(u + u^{1}e_1 + u^{2}e_2 + u^{3}e_3 + u^{123}e_1\wedge e_2\wedge e_3,\ v^{1}e_1 + v^{2}e_2 + v^{3}e_3 + v^{12}e_1\wedge e_2 + v^{13}e_1\wedge e_3 + v^{23}e_2\wedge e_3\right)$

Ввод [27]:
```
M1 * M2
```

Out[27]:

$$\begin{gathered}\left(u^{1}v^{1} + u^{2}v^{2} + u^{3}v^{3}\right) + \left(uv^{1} - u^{123}v^{23} - u^{2}v^{12} - u^{3}v^{13}\right)e_1 + \left(uv^{2} + u^{1}v^{12} + u^{123}v^{13} - u^{3}v^{23}\right)e_2 \\ + \left(uv^{3} + u^{1}v^{13} - u^{123}v^{12} + u^{2}v^{23}\right)e_3 + \left(uv^{12} + u^{1}v^{2} + u^{123}v^{3} - u^{2}v^{1}\right)e_1\wedge e_2 \\ + \left(uv^{13} + u^{1}v^{3} - u^{123}v^{2} - u^{3}v^{1}\right)e_1\wedge e_3 + \left(uv^{23} + u^{123}v^{1} + u^{2}v^{3} - u^{3}v^{2}\right)e_2\wedge e_3 \\ + \left(u^{1}v^{23} - u^{2}v^{13} + u^{3}v^{12}\right)e_1\wedge e_2\wedge e_3\end{gathered}$$

Параллельная и ортогональная части вектора v относительно a



Вывод формулы для проекции вектора выводится чисто алгебраически:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel\mathbf{a}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbf{a}}.$$

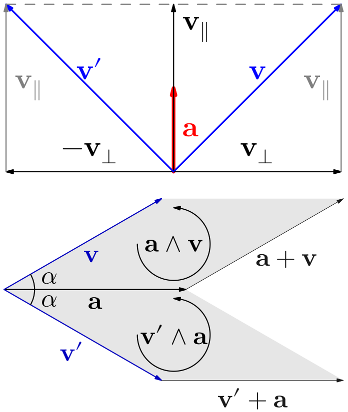
$$\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{a}} \text{ и } \mathbf{v}_{\perp\mathbf{a}}\mathbf{a} = -\mathbf{a}\mathbf{v}_{\perp\mathbf{a}},$$

$$\mathbf{v}\mathbf{a} = (\mathbf{v}_{\parallel}+\mathbf{v}_{\perp})\mathbf{a} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a}+\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{a} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a}-\mathbf{a}\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a}-\mathbf{a}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\parallel}) =$$
$$= \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{a}\mathbf{v},$$

$$\mathbf{v}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{v}_{\parallel} = 2\mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{a})$$

$$\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{a})}{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_{\perp\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{a}}.$$

Отражения



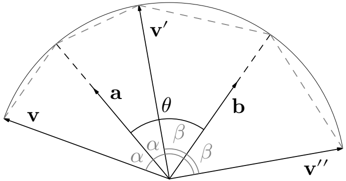
Вывод формулы для отражения вектора:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel \mathbf{a}} - \mathbf{v}_{\perp \mathbf{a}}.$$

$$\mathbf{a}\mathbf{v}' = \mathbf{a}\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{a}} - \mathbf{a}\mathbf{v}_{\perp \mathbf{a}} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{a} + \mathbf{v}_{\perp \mathbf{a}}\mathbf{a} = (\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{a}} + \mathbf{v}_{\perp \mathbf{a}})\mathbf{a} = \mathbf{v}\mathbf{a}.$$

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{v}' = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}}$$

Вращения



Вращение можно представить как композицию двух отражений. Следовательно:

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{b}\mathbf{v}'\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{v}(\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1},$$

или

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{v}'\mathbf{b} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}\mathbf{b} = (\mathbf{a}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}\mathbf{b}.$$

Мультивектор $\mathbf{ba}$ называют ротором. Он состоит из скалярной и бивекторной частей:

$$\mathbf{R} = \mathbf{b}\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Случай двумерного евклидова пространства

В двумерном декартовом пространстве мультивектор в общем виде будет записываться как:

$$\mathbf{U} = u^0 + \underbrace{u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2}_{\mathbf{u}} + \underbrace{u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{\mathbf{U}},$$

- u^0 — скаляр,
- $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$ — вектор,
- $\mathbf{U} = u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ — бивектор,
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — базисные векторы,
- $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ — базисные бивекторы.

Базисный бивектор в E^2 обладает свойством мнимой единицы (эллиптической):

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}$$

так как $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{ii} = -1$.

Изоморфность комплексным числам

Мультивекторы следующего вида

$$\mathbf{V} = a + b\mathbf{i} \in \Lambda(L), \quad \dim L = 2$$

изоморфны комплексным числам $z = a + bi$ относительно геометрического произведения.

Ввод [19]:
```python
u = o2d.mv('u', 0) + o2d.mv('u', 2)
v = o2d.mv('v', 0) + o2d.mv('v', 2)
u, v
```

Out[19]: $\left(u + u^{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,\ v + v^{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2\right)$

Ввод [20]:
```python
u + v
```

Out[20]: $(u + v) + \left(u^{12} + v^{12}\right)\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Ввод [21]:
```python
u * v
```

Out[21]: $\left(uv - u^{12}v^{12}\right) + \left(uv^{12} + u^{12}v\right)\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Ввод [22]:
```python
u / v
```

Out[22]: $\dfrac{uv + u^{12}v^{12}}{v^2 + \left(v^{12}\right)^2} + \dfrac{-uv^{12} + u^{12}v}{v^2 + \left(v^{12}\right)^2}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Вращения в двумерном пространтве

Ввод [23]:
```
e1, e2 = o2d.mv()
e1, e2
```
Out[23]: $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$

Ввод [25]:
```
r = sp.cos(sp.pi/4) + sp.sin(sp.pi/4)*(e1^e2)
r
```
Out[25]: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Ввод [26]:
```
v = e1 + e2
r * v
```
Out[26]: $\sqrt{2}\boldsymbol{e}_1$

Ввод [27]:
```
v * r
```
Out[27]: $\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2$

Ввод [30]:
```
(sp.pi/4 * (e1^e2)).exp()
```
Out[30]: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$

Случай трехмерного евклидова пространства

Рассмотрим теперь случай трехмерного евклидова пространства L с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В этом случае $\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L)$ и на нем определены p-векторы четырех рангов:

- скаляр (действительное число) $u^0 \in \Lambda^0(L)$;
- вектор с тремя компонентами $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u} \in \Lambda^1(L)$;
- бивектор с тремя компонентами $\underset{2}{\mathbf{U}} = u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u^{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + u^{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{U} \in \Lambda^2(L)$.
- тривектор с одной компонентой u^{123}, который выражается через элемент единичного объема: $\underset{3}{\mathbf{U}} = u^{123}\mathbf{E}_3 = u^{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

В самом общем виде мультивектор для трехмерного пространства записывается следующим образом:

$$\mathbf{U} = u^0 + \underbrace{u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3}_{\text{вектор}} + \underbrace{u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u^{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + u^{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3}_{\text{бивектор}} + \underbrace{u^{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}_{\text{тривектор}}$$

Изоморфность кватернионам

Обозначим

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3.$$

Данные бивекторы ведут себя точно также как и мнимые единицы кватернионов. Можно составить «таблицу умножения»:

	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
1	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-1	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	-1	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-1

Кроме того $\mathbf{ijk} = -1$.

Таким образом в трехмерном пространстве множество мультивекторов вида

$$\mathbf{V} = v^0 + \underset{2}{\mathbf{v}}$$

изоморфно множеству кватернионов. Стоит обратить внимание, что в двухмерном пространстве мультивекторы такого вида были изоморфны множеству комплексных чисел.

Кватернионное умножение

Ввод [35]:
```
u = o3d.mv('u', 0) + o3d.mv('u', 2)
v = o3d.mv('v', 0) + o3d.mv('v', 2)
Math(fr"\begin{{align}} u &= {latex(u)} \\ v &= {latex(v)}\end{{align}}")
```

Out[35]:
$$\begin{aligned} u &= u + u^{12} e_1 \wedge e_2 + u^{13} e_1 \wedge e_3 + u^{23} e_2 \wedge e_3 \\ v &= v + v^{12} e_1 \wedge e_2 + v^{13} e_1 \wedge e_3 + v^{23} e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Ввод [36]:
```
u * v
```

Out[36]:
$$\left(uv - u^{12}v^{12} - u^{13}v^{13} - u^{23}v^{23}\right) + \left(uv^{12} + u^{12}v - u^{13}v^{23} + u^{23}v^{13}\right) e_1 \wedge e_2 + \left(uv^{13} + u^{12}v^{23} + u^{13}v - u^{23}v^{12}\right) e_1 \wedge e_3 \\ + \left(uv^{23} - u^{12}v^{13} + u^{13}v^{12} + u^{23}v\right) e_2 \wedge e_3$$

Вращения в трехмерном пространтве

Ввод [75]:
```
e1, e2, e3 = o3d.mv()
a = e1 + e2 + 2*e3
b = e1 + e2 + 3*e3

R = b*a
R, R.inv()
```

Out[75]:
$$\left(8 - e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_3,\ \frac{4}{33} + \frac{1}{66} e_1 \wedge e_3 + \frac{1}{66} e_2 \wedge e_3\right)$$

Ввод [76]:
```
# Косинус угла
cosθ = (a | b) / (a.norm()*b.norm())
2*cosθ**2 - 1
```

Out[76]:
$$\frac{31}{33}$$

Ввод [77]:
```
v = e1 + 2*e2 + 3*e3
v_rot = R*v*R.inv()
v_rot
```

Out[77]:
$$\frac{2}{11} e_1 + \frac{13}{11} e_2 + \frac{39}{11} e_3$$

Ввод [79]:
```
(v | v_rot) / (v.norm()*v_rot.norm()) - (2*cosθ**2 - 1)
```

Out[79]:
$$\frac{1}{462}$$

Случай двумерного псевдоевклидова пространства

Двумерное псевдоевклидово пространство $E^2_{1,1}$ с базисом $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \rangle$ и сигнатурой $(+,-)$. Общий вид мультивектора:

$$\mathbf{U} = u^0 + \underbrace{u^0\mathbf{e}_0 + u^1\mathbf{e}_1}_{\text{вектор}} + \underbrace{u^{01}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1}_{\text{бивектор}} .$$

Базисный бивектор $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ обозначим буквой $\mathbf{j}$, так как он обладает свойствами гиперболической мнимой единицы относительно геометрического умножения:

$$\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{j}^2 = +1.$$

Изоморфность гиперболическим числам

Мультивектор, содержащий лишь скалярную и бивекторную части, можно записать в виде:

$$\mathbf{u} = a + b\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = a + b\mathbf{j}.$$

Множество мультивекторов такого вида, изоморфно относительно геометрического произведения множеству комплексных чисел гиперболического типа:

- $(a + b\mathbf{j}) + (c + d\mathbf{j}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{j}$,
- $(a + b\mathbf{j})(c + d\mathbf{j}) = (a + bd) + (ad + bc)\mathbf{j}$,
- Сопряжение: $\mathbf{u}^* = a + b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0 = a - b\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = a - b\mathbf{j}$,
- Норма $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{u}\mathbf{u}^* = a^2 - b^2$.
- Обратный элемент: $\mathbf{u}^{-1} = \dfrac{\mathbf{u}^*}{\mathbf{u}\mathbf{u}^*} = \dfrac{a}{a^2 - b^2} - \dfrac{b}{a^2 - b^2}\mathbf{j}$, в частности $\mathbf{j}\mathbf{j} = 1 \Rightarrow \mathbf{j}^{-1} = \mathbf{j}$.

Гиперболическая экспонента

Для гиперболических чисел справедлив аналог формулы Эйлера

$$e^{\mathbf{j}\theta} = \operatorname{ch}\theta + \mathbf{j}\operatorname{sh}\theta, \theta \in \mathbb{R},$$

которую можно доказать с помощью формального разложения в ряд экспоненты $e^{\mathbf{j}\theta}$:

$$e^{\mathbf{j}\theta} = 1 + \frac{\mathbf{j}\theta}{1!} + \frac{(\mathbf{j}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{j}\theta)^3}{3!} + \ldots$$

Используя свойства $\mathbf{j}^2 = 1$, $\mathbf{j}^3 = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}^4 = 1$, $\mathbf{j}^5 = \mathbf{j}$ и т.д. получим:

$$e^{\mathbf{j}\theta} = \underbrace{\left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right)}_{\operatorname{ch}\theta} + \mathbf{j}\underbrace{\left(\frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right)}_{\operatorname{sh}\theta} = \operatorname{ch}\theta + \mathbf{j}\operatorname{sh}\theta.$$

Преобразования Лоренца

Рассмотрим мультивектор следующего вида $\mathbf{u} = \exp\{\theta \mathbf{j}\} = \operatorname{ch}\theta + \mathbf{j}\operatorname{sh}\theta$ и умножим его на произвольный вектор $\mathbf{x} = x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{ux} &= (\operatorname{ch}\theta + \mathbf{j}\operatorname{sh}\theta)(x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1) = \operatorname{ch}\theta x^0\mathbf{e}_0 + \operatorname{ch}\theta x^1\mathbf{e}_1 + \operatorname{sh}\theta x^0\mathbf{j}\mathbf{e}_0 + x^1\operatorname{sh}\theta\mathbf{j}\mathbf{e}_1 = \\ &= \operatorname{ch}\theta x^0\mathbf{e}_0 - \operatorname{sh}\theta x^1\mathbf{e}_0 + \operatorname{ch}\theta x^1\mathbf{e}_1 - \operatorname{sh}\theta x^0\mathbf{e}_1 = (\operatorname{ch}\theta x^0 - \operatorname{sh}\theta x^1)\mathbf{e}_0 + (-\operatorname{sh}\theta x^0 + \operatorname{ch}\theta x^1)\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

Мы получили преобразование Лоренца:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}$$

где $\operatorname{ch}\theta$ равен коэффициенту Лоренца γ:

$$\operatorname{ch}\theta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{th}\theta = \frac{v}{c}.$$

Релятивистское сложение скоростей

Релятивистскую формулу соложения скоростей можно получить выполнив преобразования Лоренца два раза подряд:

$$\mathbf{x}' = \exp(\theta_2 \mathbf{j}) \exp(\theta_1 \mathbf{j}) \mathbf{x} = \exp\left((\theta_1 + \theta_2)\mathbf{j}\right) \mathbf{x} \Rightarrow \theta_3 = \theta_1 + \theta_2.$$

Так как $\operatorname{th}\theta = \frac{v}{c}$, то $\operatorname{th}\theta_3 = \operatorname{th}(\theta_1 + \theta_2)$ и по формуле тангенса суммы:

$$\operatorname{th}(\theta_3) = \frac{\operatorname{th}\theta_1 + \operatorname{th}\theta_2}{1 - \operatorname{th}\theta_1 \operatorname{th}\theta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Сложение скоростей свелось к сложению гиперболических углов.

Псевдоевклидово пространство в galgebra

Ввод [16]:

```
tx = (t, x) = sp.symbols('0 1', real=True)
θ = sp.Symbol('θ', real=True)
θ1 = sp.Symbol('θ_1', real=True)
θ2 = sp.Symbol('θ_2', real=True)

m2d = Ga('e_0 e_1', g=[1, -1], coords=tx)
```

Ввод [17]:

```
e0, e1 = m2d.mv()
```

Ввод [18]:

```
u = (θ*e0^e1).exp()
x = m2d.mv('x', 1)
```

Ввод [19]:

```
u*x
```

Out[19]: $\left(x^{0} \cosh\left(\theta\right) - x^{1} \sinh\left(\theta\right)\right) \boldsymbol{e}_{0} + \left(-x^{0} \sinh\left(\theta\right) + x^{1} \cosh\left(\theta\right)\right) \boldsymbol{e}_{1}$

Ввод [20]:

```
u1 = (θ1*e0^e1).exp()
u2 = (θ2*e0^e1).exp()
```

Ввод [21]:

```
u1*u2*x
```

Out[21]: $\left(x^{0} \cosh\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right) - x^{1} \sinh\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right)\right) \boldsymbol{e}_{0} + \left(-x^{0} \sinh\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right) + x^{1} \cosh\left(\theta_{1} + \theta_{2}\right)\right) \boldsymbol{e}_{1}$

Заключение

- Рассмотрены основы математического аппарата геометрической алгебры.
- Рассмотрено применение геометрической алгебры к задачам отражения и вращения в евклидовом пространстве.
- Изложение сопровождалось примерами использования модуля для SymPy `galgebra`.
- Аппарат геометрической алгебры может быть также использован для решения задач электромагнетизма, аналитической механики и описания пространства Галилея (проективного пространства).