АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛЮБОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА МНОГОЧЛЕН ОТ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРОИЗВОДНЫХ

Александр Брюно
e-mail: abruno@keldysh.ru
http://brunoa.name

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Аннотация

Разработано исчисление [Bruno, 2023], позволяющее вычислять асимптотические разложения решений для уравнений, являющихся многочленами от переменных и производных, а также для систем таких уравнений. Это исчисление применимо к уравнениям любого типа: алгебраическим, обыкновенным дифференциальным (ОДУ) и в частных производных, а также – к системам таких уравнений. Исчисление основано на алгоритмах степенной геометрии: (а) выделение укороченных уравнений, состоящих из всех ведущих слагаемых, а также из (б) степенных, (в) логарифмических и (г) нормализующих преобразований координат. Требуемое при этом программное обеспечение в основной части уже реализовано в системах компьютерной алгебры.

1. Введение

2. Одно алгебраическое уравнение

3. Одно ОДУ

4. Одно уравнение в частных производных

5. Уровни степенной геометрии

1. Введение (1)

Для одного уравнения последовательность вычислений такова:

А. Сначала выделяются укороченные уравнения и указываются области, где они являются первыми приближениями исходного уравнения.

Б. Затем каждое укороченное уравнение упрощается с помощью степенных и логарифмических преобразований координат, возможно, неоднократных, до уравнения, имеющего простое решение.

В. Оно дополняется до решения укороченного уравнения.

Г. Если его возмущение в полном уравнении имеет линейную часть, то посредством нормализующего преобразования получаем решение исходного уравнения.

Д. Если это возмущение не имеет линейной части, то для него повторяем этот процесс, т.е. снова выделяем укороченные уравнения и упрощаем их, пока не придём к ситуации Г, т.е. к возмущению с линейной частью, для которой находим решение.

1. Введение (2)

Ниже дано описание методов применения этого исчисления в уравнениях разных типов.

В статье [Bruno, 2023] изложены объекты и последовательности вычислений для:

1. Одного алгебраического уравнения.
2. Одного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) порядка n.
3. Автономной системы n ОДУ.
4. Одного уравнения в частных производных.

Там же дан краткий обзор приложений.

Здесь приводим алгоритмы нелинейного анализа для случаев одного уравнения и обсуждаем уровни степенной геометрии.

1. Введение

2. Одно алгебраическое уравнение

3. Одно ОДУ

4. Одно уравнение в частных производных

5. Уровни степенной геометрии

2. Одно алгебраическое уравнение (1)

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, тогда $X^Q = x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$, $\|Q\| = |q_1| + \ldots + |q_n|$.

2. Одно алгебраическое уравнение (2)

Теорема 1.

Пусть

$$f(X,\varepsilon,T) = \Sigma a_{Q,r}(T) X^Q \varepsilon^r,$$

где $0 \leqslant Q \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leqslant r \in \mathbb{Z}$, *сумма конечна и* $a_{Q,r}(T)$ *– некоторые функции от* $T = (t_1, \ldots, t_m)$, *причём* $a_{00}(T) \equiv 0$, $a_{01}(T) \not\equiv 0$. *Тогда решение уравнения* $f(X,\varepsilon,T) = 0$ *имеет вид* $\varepsilon = \Sigma b_R(T) X^R \stackrel{\mathrm{def}}{=} b(T,X)$, *где* $0 \leqslant R \in \mathbb{Z}^n$, $0 < \|R\|$, *коэффициенты* $b_R(T)$ *– функции от* T, *которые являются полиномами от* $a_{Q,r}(T)$ *с* $\|Q\| + r \leqslant \|R\|$, *делёнными на* $a_{01}^{2\|R\|-1}$. *Разложение* $b(T,X)$ *единственное. Пусть* $\varepsilon = b(T,X) + \delta$ *и*

$$g(X,\delta,T) = f(X,\delta + b(T,X),T),$$

тогда $g(X,\delta,T) \equiv \delta h(X,\delta,T)$. *Здесь* $\delta h(X,\delta,T)$ *– это нормальная форма функции* $f(X,\delta,T)$.

2. Одно алгебраическое уравнение (3)

Пусть точка $X = X^0 = 0$ является особой. Запишем многочлен в виде $f(X) = \Sigma a_Q X^Q$, где $a_Q = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, или $\mathbb{C}$. Пусть $\mathbf{S}(f) = \{Q : a_Q \neq 0\}$. Множество $\mathbf{S}$ называется ***носителем*** многочлена $f(X)$. Пусть оно состоит из точек $Q_1, \ldots, Q_k$. Выпуклая оболочка носителя $\mathbf{S}(f)$ является множеством

$$\Gamma(f) = \left\{ Q = \sum_{j=1}^{k} \mu_j Q_j, \mu_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1 \right\},$$

которое называется ***многогранником Ньютона***.

2. Одно алгебраическое уравнение (4)

Его граница $\partial\Gamma(f)$ состоит из обобщённых граней $\Gamma_j^{(d)}$, где d – её размерность $0 \leqslant d \leqslant n-1$, а j – номер. Каждой (обобщённой) грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют свои:

- ***граничное подмножество*** $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$,
- ***укороченный многочлен*** $\hat{f}_j^{(d)}(X) = \Sigma a_Q X^Q$ по $Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}$,
- и ***нормальный конус*** $\mathbf{U}_j^{(d)}$, который состоит из всех нормалей $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_*^n$ к грани $\Gamma_j^{(d)}$, внешних для Γ. При этом, пространство $\mathbb{R}_*^n$ – пространство сопряжённое (двойственное) к пространству $\mathbb{R}^n$, содержащему векторные показатели степени Q.

2. Одно алгебраическое уравнение (5)

Пусть $\ln X \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$. Линейное преобразование логарифмов координат

$$(\ln y_1, \dots, \ln y_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln Y = (\ln X)\alpha, \tag{1}$$

где α – невырожденная квадратная n-матрица, называется ***степенным преобразованием***. С помощью степенного преобразования (1) моном X^Q преобразуется в моном Y^R, где $R = Q\left(\alpha^*\right)^{-1}$, а звёздочка обозначает транспонирование.

Матрица α называется ***унимодулярной***, если все ее элементы целые числа и $\det \alpha = \pm 1$. Для унимодулярной матрицы α ее обратная α^{-1} и транспонированная α^* также являются унимодулярными.

2. Одно алгебраическое уравнение (6)

Теорема 2.

Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ *существует степенное преобразование* (1) *с унимодулярной матрицей* α*, которое приводит укороченную сумму* $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ *к сумме* d *координат, то есть* $\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^S \hat{g}_j^{(d)}(Y)$*, где* $\hat{g}_j^{(d)}(Y) = \hat{g}_j^{(d)}(y_1, \ldots, y_d)$ *- многочлен. Здесь* $S \in \mathbb{Z}^n$*. Дополнительные координаты* $y_{d+1}, \ldots, y_n$ *являются локальными (малыми).*

2. Одно алгебраическое уравнение (7)

В статье [Брюно, Азимов, 2023] указан алгоритм вычисления унимодулярной матрицы α теоремы 2. Пусть $\Gamma_j^{(d)}$ – грань многогранника Ньютона $\Gamma(f)$. Пусть полное уравнение $f(X) = 0$ меняется на уравнение $g(Y) = 0$ после степенного преобразования теоремы 2. Таким образом, $\hat{g}_j^{(d)}(y_1, \ldots, y_d) = g(y_1, \ldots, y_d, 0, \ldots, 0)$. Пусть многочлен $\hat{g}_j^{(d)}$ является произведением нескольких неприводимых многочленов

$$\hat{g}_j^{(d)} = \prod_{k=1}^{m} h_k^{l_k}(y_1, \ldots, y_d), \qquad (2)$$

где $0 < l_k \in \mathbb{Z}$. Пусть полином h_k является одним из них. Возможны три случая.

2. Одно алгебраическое уравнение (8)

Случай 1

Уравнение $h_k = 0$ имеет полиномиальное решение $y_d = \varphi(y_1, \ldots, y_{d-1})$. Тогда в полный полином $g(Y)$ подставим координату $y_d = \varphi + z_d$, для полученного полинома $h(y_1, \ldots, y_{d-1}, z_d, y_{d+1} \ldots, y_n)$ снова построим многогранник Ньютона, выделим укороченные многочлены и т.д.

2. Одно алгебраическое уравнение (9)

Случай 2

Уравнение $h_k = 0$ не имеет полиномиального решения, но имеет параметризацию решений $y_j = \varphi_j(T)$, $j = 1, \ldots, d$, $\quad T = (t_1, \ldots, t_{d-1})$. Тогда в полный полином $g(Y)$ подставляем координаты

$$y_j = \varphi_j(T) + \beta_j \varepsilon, j = 1, \ldots, d, \tag{3}$$

где $\beta_j = \mathrm{const}$, $\Sigma\,|\beta_j| \neq 0$, и из полного полинома $g(Y)$ мы получаем полином

$$h = \Sigma a_{Q'',r}(T) Y''^{Q''} \varepsilon^r, \tag{4}$$

где $Y'' = (y_{d+1}, \ldots, y_n)$, $0 \leqslant Q'' = (q_{d+1}, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^{n-d}$, $0 \leqslant r \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $a_{00}(T) \equiv 0$, $a_{01}(T) = \sum\limits_{j=1}^{d} \beta_j \partial \hat{g}_j^{(d)} / \partial y_j(T)$.

2. Одно алгебраическое уравнение (10)

Если в разложении (2) $l_k = 1$, то $a_{01} \not\equiv 0$. По теореме 1 все решения уравнения $h = 0$ имеют вид $\varepsilon = \Sigma b_{Q''}(T) Y''^{Q''}$, т.е., согласно (3) решения уравнения $g = 0$ имеют вид $y_j = \varphi_j(T) + \beta_j \Sigma b_{Q''}(T) Y''^{Q''}$, $j = 1, \ldots, d$. Подобные вычисления были предложены в [Брюно, 2019a].

Если в (2) $l_k > 1$, то в (4) $a_{01}(T) \equiv 0$ и для полинома (4) от Y'', ε строим многогранник Ньютона по носителю $\mathbf{S}(h) = \left\{Q'', r : a_{Q'',r}(T) \not\equiv 0\right\}$, отделяем укорочения и так далее.

Случай 3

Уравнение $h_k = 0$ не имеет ни полиномиального, ни параметрического решения. Тогда, используя многогранник Адамара [Брюно, 2019a], можно вычислить кусочно-приближенное параметрическое решение уравнения $h_k = 0$ и искать приближенное параметрическое разложение.

2. Одно алгебраическое уравнение (11)

Аналогично можно исследовать положение ветвей алгебраического многообразия в бесконечности.

В [Bruno, Azimov, 2023; 2024] этим методом были получены параметрические разложения многообразия трёх параметров вырожденных потоков Риччи [Abiev (и др.), 2014], изучаемых в астрофизике.

1. Введение

2. Одно алгебраическое уравнение

3. Одно ОДУ

4. Одно уравнение в частных производных

5. Уровни степенной геометрии

3.Одно ОДУ. Постановка задачи (1)

Здесь мы рассматриваем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{5}$$

где x – независимая переменная, y – зависимая переменная, $y' = dy/dx$, а f – многочлен от аргументов.

Вблизи $x^0 = 0$ или ∞ мы ищем решения уравнения (5) в виде асимптотического ряда

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{s_k}, \tag{6}$$

где b_k – функции от $\log x$ и $\omega s_k > \omega s_{k+1}$ с

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x^0 = 0, \\ 1, & \text{если } x^0 = \infty. \end{cases} \tag{7}$$

3.Одно ОДУ. Постановка задачи (2)

Положим $X=(x,y)$. Под дифференциальным мономом $a(x,y)$ мы понимаем произведение обычного монома

$$cx^{r_1}y^{r_2} \stackrel{\text{def}}{=} cX^R, \tag{8}$$

и конечного числа производных $d^l y/dx^l$. Их сумма называется ***дифференциальной суммой***. В уравнении (5) многочлен f является дифференциальной суммой.

Каждому дифференциальному моному $a\left(X\right)$ соответствует его (векторный) ***показатель степени*** $Q(a)=(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2$ по следующим правилам:

- для монома вида (8) $Q\left(cX^R\right)=R$, то есть $Q\left(cx^{r_1}y^{r_2}\right)=(r_1,r_2)$;
- для производной $Q\left(d^l y/dx^l\right)=(-l,1)$;
- при умножении дифференциальных мономов их показатели суммируются как векторы: $Q\left(a_1a_2\right)=Q\left(a_1\right)+Q\left(a_2\right)$.

3.Одно ОДУ. Постановка задачи (3)

- Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей $Q\,(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$ в дифференциальной сумме называется ***носителем*** суммы $f\,(X)$. Очевидно, что $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$.
- Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется ***многоугольником суммы*** $f(X)$.
- Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и рёбер $\Gamma_j^{(1)}$. Эти объекты называются (обобщёнными) ***гранями*** $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает на размерность грани, а нижний – её номер.
- Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует ***граничное подмножество*** $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$ множества $\mathbf{S}$ и ***укороченная сумма***

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \quad \text{по} \quad Q\,(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)}. \tag{9}$$

3.Одно ОДУ. Постановка задачи (4)

Пусть $\mathbb{R}^2_*$ — плоскость, сопряжённая с плоскостью $\mathbb{R}^2$ так, что внутреннее (скалярное) произведение $\langle P, Q\rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1q_1 + p_2q_2$ определяется для любых $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_*$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$. Любой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют её ***нормальный конус***

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{P : \langle P, Q\rangle = \left\langle P, Q'\right\rangle, \langle P, Q\rangle > \left\langle P, Q''\right\rangle, Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, Q'' \in \mathbf{S}(f)\backslash\mathbf{S}_j^{(d)}\right\}$$

и укороченная сумма (9). Все эти конструкции применимы к уравнению (5), где f – дифференциальная сумма.

Пусть $x \to 0$ или $x \to \infty$ и предположим, что решение уравнения (5) имеет вид

$$y = c_r x^r + o\left(|x|^{r+\varepsilon}\right), \tag{10}$$

где c_r – коэффициент, $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, показатели r и ε находятся в $\mathbb{R}$, и $\varepsilon\omega < 0$.

3.Одно ОДУ. Постановка задачи (5)

Тогда мы говорим, что выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \tag{11}$$

даёт ***степенную асимптотику*** решения (10). Таким образом, любой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}_*^2$ и укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0. \tag{12}$$

Теорема 3.

Если уравнение $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ имеет решение вида $y = c_r x^r + o\left(|x|^{r+\varepsilon}\right)$ и если $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укорочение $y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0$ этого решения является решением укороченного уравнения $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$.

3. Одно ОДУ. Решение укороченного уравнения (1)

Здесь мы рассматриваем отдельно два случая:

- вершину $\Gamma_j^{(0)}$ и
- ребро $\Gamma_j^{(1)}$.

Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (12) с одноточечным носителем Q и с $d = 0$. Зададим $g(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(X)$. Тогда решение (9), (12) удовлетворяет уравнению $g(X) = 0$.

3. Одно ОДУ. Решение укороченного уравнения (2)

Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, мы видим, что $g\left(x, cx^r\right)$ не зависит от x, c и является полиномом от r, то есть, $g\left(x, cx^r\right) \equiv \chi(r)$, где $\chi(r)$ – ***характеристический многочлен*** дифференциальной суммы $\hat{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, в решении (11) уравнения (12) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \overset{\text{def}}{=} g\left(x, x^r\right) = 0, \tag{13}$$

а коэффициент c_r произвольный.

Среди корней r_i уравнения (13) нужно выделить только те, для которых один из векторов $\omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$, принадлежит нормальному конусу $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. В этом случае значение ω однозначно определено. Соответствующие выражения суммы с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (5).

3. Одно ОДУ. Решение укороченного уравнения (3)

Более того, по (7), если $\omega = -1$, то $x \to 0$, а если $\omega = 1$, то $x \to \infty$. Комплексные корни r характеристического уравнения (13) могут приводить к ***экзотическим разложениям*** решений (6), где коэффициенты b_k являются степенными рядами по $x^{\alpha i}$ с действительными $\alpha \in \mathbb{R}$ и $i^2 = -1$.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (12) с $d = 1$, нормальный конус которого $\mathbf{U}_j^{(1)}$ является лучом $\{\lambda N_j, \lambda > 0\}$. Если $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$, то это условие однозначно определяет показатель r укороченного решения (11) и значение $\omega = \pm 1$ в (7).

Чтобы найти коэффициент c_r, нужно подставить выражение (11) в укороченное уравнение (12). После сокращения на степень x, мы получим алгебраическое ***определяющее уравнение*** для коэффициента c_r : $\tilde{\tilde{f}}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0$.

3. Одно ОДУ. Решение укороченного уравнения (4)

Каждому корню $c_r = c_r^{(i)} \neq 0$ этого уравнения соответствует выражение вида (11), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения (5). Более того, по (7), если $p_1 < 0$ в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$, то $x \to 0$, а если $p_1 > 0$, то $x \to \infty$.

Если в укороченном уравнении (12) мы сделаем ***степенное преобразование*** $y = x^p z$ и ***логарифмическое преобразование*** $\xi = \log x$, тогда получим ОДУ

$$\varphi(\xi, z) = 0, \tag{14}$$

где φ – дифференциальная сумма, т.е. имеет вид (5).

3. Одно ОДУ. Решение укороченного уравнения (5)

Если уравнение (14) имеет решение в виде $z = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^{r_j}, \quad r_j > r_{j+1}$, тогда в разложении (6) коэффициенты b_k являются функциями от $\log x$. Если $b_1 = \mathrm{const}$, то это ***степенно-логарифмическое разложение***, где остальные b_k – многочлены от $\log x$. Если b_1 зависит от $\log x$, то все b_k являются степенными рядами по $\log x$ и разложение (6) является ***сложным***.

3. Одно ОДУ. Решение уравнения (5) в виде разложения (6) (1)

Из многоугольника Γ исходного уравнения (5) берём вершину или ребро $\Gamma_j^{(d)}$. Затем находим степенное решение $y = b_1 x^{p_1}$ укороченного уравнения $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$, как это было описано выше, положим $y = b_1 x^{p_1} + z$ и получим новое уравнение $g(x, z) = 0$.

Построим многоугольник ${}_1\Gamma$ для нового уравнения, возьмём вершину или ребро ${}_1\Gamma_k^{(\mathrm{e})}$, решим укороченное уравнение $\hat{g}_k^{(\mathrm{e})}(x, z) = 0$, и получаем второй член $b_2 x^{p_2}$ разложения (6) и так далее. В [Брюно, 2004] указаны некоторые свойства, которые упрощают вычисления.

Получив решение $y = Cx^\alpha$ укороченного уравнения, в полное уравнение $f(x, y) = 0$ делаем подстановку $y = Cx^\alpha + z$, получаем уравнение $g(x, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x, Cx^\alpha + z) = 0$. Если оно не имеет линейного члена по y, то продолжаем вычисления до получения уравнения с линейно частью по y. Его приводим к нормальной форме по теореме 4 (ниже).

3. Одно ОДУ. Решение уравнения (5) в виде разложения (6) (2)

Условие 1.

Точка $(v, 1)$ является вершиной многоугольника $\Gamma(f)$. В сумме $f(x, y)$ ей соответствует слагаемое $\mathcal{L}(x)y$ и только оно. Здесь $\mathcal{L}(x)$ – это линейный оператор без логарифмов.

Теорема 4.

Если уравнение (5) удовлетворяет условию 1, то оно имеет формальное решение $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k(\ln x)x^{s_k}$*, где* $\beta_k(\ln x)$ *суть многочлены от* $\ln x$*,* $\omega s_k > \omega s_{k+1}$*,* $|s_k| \to \infty$ *при* $k \to \infty$*.*

3. Одно ОДУ. Решение уравнения (5) в виде разложения (6) (3)

Таким образом, мы получаем 2 вида разложений (6) решений уравнения (5):

1. ***Степенные***: когда все $b_k = \mathrm{const}$ [Брюно, 2004];
2. ***Степенно-логарифмические***: когда $b_1 = \mathrm{const}$ и остальные b_k полиномиальны по $\log x$ [Брюно, 2004].

Другие виды разложений решений:

3. ***Сложные***: когда все b_k являются степенными рядами по $\log x$ [Брюно, 2006];
4. ***Экзотические***: когда все b_k являются степенными рядами по $x^{i\alpha}$ [Брюно, 2007].

Кроме них существуют ***экспоненциальные разложения*** $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x) \exp\left[k\varphi(x)\right]$, где $b_k(x)$ и $\varphi(x)$ – степенные ряды по x [Брюно, 2012b] и многие другие. Также существуют решения в виде трансрядов [Брюно, 2019b].

1. Введение

2. Одно алгебраическое уравнение

3. Одно ОДУ

4. Одно уравнение в частных производных

5. Уровни степенной геометрии

4. Одно УрЧП. Носитель [Брюно, 1998, Гл. 6] (1)

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ – независимые переменные $(n > 1)$, а $y \in \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ – зависимое.

Рассмотрим $Z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, y)$. ***Дифференциальным мономом*** $a(Z)$ называется произведение обыкновенного монома $cZ^R = cz_1^{r_1} \dots z_{n+1}^{r_{n+1}}$, где $c = \mathrm{const}$, и конечного числа производных следующего вида

$$\frac{\partial^l y}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial^{l_n} x_n} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial^l y}{\partial X^L}, \ 0 \leqslant l_j \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^{n} l_j = l, \ L = (l_1, \dots, l_n)\,.$$

Векторный ***показатель степени*** $Q(a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ соответствует дифференциальному моному $a(Z)$, он строится по следующим правилам:

$$Q(c) = 0, \text{если } c \neq 0, \quad Q\left(Z^R\right) = R, \quad Q\left(\partial^l y_j / \partial X^L\right) = (-L, 1).$$

4. Одно УрЧП. Носитель [Брюно, 1998, Гл. 6] (2)

Произведению мономов соответствует сумма их векторных показателей степеней:

$$Q(ab) = Q(a) + Q(b).$$

Дифференциальная сумма – это сумма дифференциальных мономов.

$$f(Z) = \sum a_k(Z). \tag{15}$$

Если $f(Z)$ не имеет подобных членов, то множество $\mathbf{S}(f) = \{Q(a_k)\}$ называется ***носителем*** суммы (15).

4. Одно УрЧП. Резонансные мономы

Пусть носитель $\mathbf{S}(f)$ дифференциальной суммы $a(Z)$ состоит из одной точки $E_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Тогда подстановка

$$y = cX^P, \quad P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \tag{16}$$

в дифференциальную сумму $a(Z)$ даёт моном $c\omega_P(P)X^P$, где $\omega_P\,(P)$ – полином от P, коэффициенты которого зависят от P.

Моном (16) будет называться ***резонансным*** для $a(Z)$, если для него $\omega_P(P) = 0$.

4. Одно УрЧП. Нормальная форма (1)

Для дифференциальной суммы $f(Z)$ обозначим через $f_k(Z)$ сумму всех дифференциальных мономов в $f(Z)$, у которых $n+1$ координата q_{n+1} векторных степенных показателей $Q = (q_1, \dots, q_n, q_{n+1})$ равна k: $q_{n+1} = k$. Обозначим $\mathbb{Z}_+^n = \{P : 0 \leqslant P \in \mathbb{Z}^n\}$.

Рассмотрим УрЧП

$$f(Z) = 0. \tag{17}$$

4. Одно УрЧП. Нормальная форма (2)

Теорема 5.

Пусть $f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(Z)$, *где все* $\mathbf{S}(f_k) \subset \mathbb{Z}_+^n \times \{q_{n+1} = k\}$. *Предположим, что*

1. $f_0(Z) = \varphi(X)$ *– степенной ряд по* X *без свободного члена,*
2. $f_1(Z) = a(Z) + b(Z)$, *где* $\mathbf{S}(a) = E_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$, $\mathbf{S}(b) \subset \left(\mathbb{Z}_+^{n+1} \backslash 0\right) \times \{q_{n+1} = 1\}$.

Тогда существует подстановка $y = \zeta + \psi(X)$, *где* $\psi(X)$ *– степенной ряд по* X *без свободного члена, которая приводит уравнение* (17) *к* ***нормальной форме***

$$g(X, \zeta) = 0, \tag{18}$$

где $g_0(X) = \sum c_P X^P$ *– степенной ряд без свободного члена с* $P \in \mathbb{Z}_+^n$, *содержащий только резонансные мономы* $c_P X^P$ *для суммы* $a(Z)$.

4. Одно УрЧП. Многогранник и укороченные уравнения (1)

Выпуклая оболочка

$$\mathbf{\Gamma}(f) = \left\{ Q = \sum \lambda_j Q_j, Q_j \in \mathbf{S}, \lambda_j \geqslant 0, \sum \lambda_j = 1 \right\}$$

носителя $\mathbf{S}(f)$ называется ***многогранником суммы*** $f(Z)$.

Граница $\partial\mathbf{\Gamma}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f)$ состоит из обобщённых граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, где $d = \dim \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$.

4. Одно УрЧП. Многогранник и укороченные уравнения (2)

Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует ***нормальный конус***

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P \in \mathbb{R}_*^{n+1} : \left\langle P, Q' \right\rangle = \left\langle P, Q' \right\rangle > \left\langle P, Q' \right\rangle, \text{ где } Q, Q' \in \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}, Q' \in \mathbf{\Gamma} \backslash \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \right\},$$

где пространство $\mathbb{R}_*^{n+1}$ является сопряжённым к пространству $\mathbb{R}^{n+1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, и ***укороченная сумма*** $\hat{f}_j^{(d)}(Z) = \sum a_k(Z)$ по $Q(a_k) \in \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \bigcap \mathbf{S}$.

4. Одно УрЧП. Степенные преобразования (1)

Чтобы упростить укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(Z) = 0$, удобно использовать степенное преобразование.

Пусть α – квадратная вещественная невырожденная блочная матрица размерности $n+1$ вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где α_{11} и α_{22} – квадратные матрицы размерности n и 1, соответственно.

Обозначим $\ln Z = (\ln z_1, \ldots, \ln z_{n+1})$, а звёздочкой * обозначим транспонирование. Замена переменных

$$\ln W = (\ln Z)\,\alpha \tag{20}$$

называется ***степенным преобразованием***.

4. Одно УрЧП. Степенные преобразования (2)

Теорема 6 ([Брюно, 1998]).

Степенное преобразование (18) *приводит дифференциальный моном* $a(Z)$ *с показателем степени* $Q(a)$ *к дифференциальной сумме* $b(W)$ *с показателем степени* $Q(b)$*:*

$$R = Q(b) = Q(a)\alpha^{-1*}.$$

4. Одно УрЧП. Степенные преобразования (3)

Теорема 7.

Для укороченного уравнения

$$\hat{f}_j^{(d)}(Z) = 0$$

существует степенное преобразование (20) *и моном* Z^T*, переводящие уравнение указанное выше в уравнение*

$$g(W) = Z^T \hat{f}_j^{(d)}(Z) = 0,$$

где $g(W)$ *– дифференциальная сумма, носитель которой имеет* $n + 1 - d$ *нулевых координат. При этом в* (19) *блок* α_{11} *– унимодулярная матрица и* $\alpha_{22} = \pm 1$*.*

4. Одно УрЧП. Логарифмическое преобразование

Пусть z_j – одна из координат x_k или y. ***Преобразование*** $\zeta_j = \ln z_j$ называется ***логарифмическим***.

Теорема 8.

Пусть $f(Z)$ – дифференциальная сумма такая, что у всех ее мономов j-я компонента q_j векторного показателя степени $Q = (q_1, \dots, q_{m+1})$ равна нулю, тогда логарифмическое преобразование приводит дифференциальную сумму $f(Z)$ к дифференциальной сумме от $z_1, \dots, \zeta_j, \dots, z_n$.

Если нас интересуют только решения с ограничениями на их порядки $P = (p_1, \dots, p_{n+1})$, то допустимые порядки решений образуют ***конус задачи*** K. Например, если $x_i \to 0$, то в K координата $p_i \leqslant 0$, а если $|x_i| \to \infty$, то $p_i \geqslant 0$ в K.

4. Одно УрЧП. Вычисление асимптотик решений

Обычно граничные и начальные условия позволяют найти конус задачи K. Пусть с K пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_{jl}^{(d_l)}$, $l = 1, \ldots, k$. Тогда для каждого укороченного уравнения $\hat{f}_{jl}^{(d_l)} = 0$ берём его решения. Если оно не решается, то следует выполнить степенное преобразование теоремы 7, а затем логарифмическое преобразование теоремы 8. Это даёт уравнение с многогранником размерности $n+1$. Его укороченные уравнения проще, чем его собственное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(Z) = 0$. Если это новое укороченное уравнение снова не разрешимо, то вышеописанная процедура повторяется до тех пор, пока мы не получим разрешимое уравнение. Имея его решения, мы можем вернуться к исходным координатам, выполнив обратные преобразования координат. Таким образом получаем решения, записанные в исходных координатах, которые являются асимптотиками решений исходного уравнения (17).

Этим методом в [Bruno, Batkhin, 2023] были вычислены асимптотики решений системы двух уравнений, описывающих модель турбулентных всплесков.

1. Введение

2. Одно алгебраическое уравнение

3. Одно ОДУ

4. Одно уравнение в частных производных

5. **Уровни степенной геометрии**

5. Уровни степенной геометрии (1)

Все, что было рассказано, относится к нулевому уровню степенной геометрии, ибо там было «запаяно», что

$$\operatorname{ord} y' = \operatorname{ord} y - 1.$$

Но это не всегда так. Отказываясь от этого свойства, получаем более широкое множество решений. Обсудим это подробнее.

В алгебраическом уравнении

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_Q X^Q = 0,$$

с $X \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ каждому моному $a_Q X^Q$ можно поставить точку $\check{Q} = \{Q, \ln|a_Q|\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Их множество образует ***сверхноситель*** $\check{S}(f)$, а его выпуклая оболочка $\check{H}(f)$ – это ***многогранник Адамара*** [Брюно, 2019a].

5. Уровни степенной геометрии (2)

По его граням строим укороченные уравнения. Они проще, чем укороченные уравнения, соответствующие граням многогранника Ньютона, и позволяют исследовать случаи, где многогранник Ньютона не даёт результата.

Для одного ОДУ можно искать решения, у которых $\operatorname{ord} y - \operatorname{ord} y' \neq 1$, вводя для порядка производной y' новую координату. Это было сделано в [Bruno, 2015] и позволило получить решения в виде степенных разложений, коэффициентами которых являются тригонометрические или эллиптические функции.

Можно рассматривать решения, у которых $\operatorname{ord} y^{(k)} - \operatorname{ord} y^{(k+1)}$ произвольная величина, или несколько таких разностей произвольны, и получать новые типы решений. Подробнее см. [Bruno, 2012; Bruno, Parusnikova, 2012; Брюно, 2012a].

Аналогично можно поступать с УрЧП, но это пока не сделано.

Литература (1)

- *Abiev N. A.* [et al.]. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces. // Differential Geometry and its Applications. 2014. Vol. 35. P. 26–43.
- *Bruno A. D.* Chapter 6. Space Power Geometry for one ODE and P1–P4, P6. // Proceedings of the International Conference, Saint Petersburg, Russia, June 17-23, 2011 / ed. by A. D. Bruno, A. B. Batkhin. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. P. 41–52. DOI: doi:10.1515/9783110275667.41.
- *Bruno A. D.* Power geometry and elliptic expansions of solutions to the Painlevé equations. // International Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. P. 340715. DOI: 10.1155/2015/340715.
- *Bruno A. D.* Nonlinear Analysis as a Calculus. // London Journal of Research in Science: Natural and Formal. 2023. Vol. 23, no. 5. P. 1–31. URL: https://journalspress.com/LJRS_Volume23/Nonlinear-Analysis-as-a-Calculus.pdf ; (open access).
- *Bruno A. D.*, *Azimov A. A.* Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities. // Axioms. 2023. Vol. 12, no. 5. P. 469. URL: https://doi.org/10.3390/axioms12050469 ; (open access).

Литература (2)

- *Bruno A. D., Azimov A. A.* Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities II. // Axioms. 2024. Vol. 13, no. 2. P. 106. URL: https://doi.org/10.3390/axioms13020106 ; (open access).
- *Bruno A. D., Batkhin A. B.* Asymptotic forms of solutions to system of nonlinear partial differential equations. // Universe. 2023. Vol. 9, no. 1. P. 35. DOI: 10.3390/universe9010035. URL: https://doi.org/10.3390/universe9010035 ; (open access).
- *Bruno A. D., Parusnikova A. V.* Chapter 7. Elliptic and Periodic Asymptotic Forms of Solutions to P5. // Proceedings of the International Conference, Saint Petersburg, Russia, June 17-23, 2011 / ed. by A. D. Bruno, A. B. Batkhin. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. P. 53–66. DOI: doi:10.1515/9783110275667.53.
- *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998. 288 с.
- *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // УМН. 2004. Т. 59, № 3. С. 429—480. DOI: https://doi.org/10.4213/rm736.

Литература (3)

- *Брюно А. Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // Доклады Академии наук. 2006. Т. 406, № 6. С. 730—733.
- *Брюно А. Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 5. С. 583—587.
- *Брюно А. Д.* Степенно-эллиптические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // ЖВММФ. 2012a. Т. 51, № 12. С. 2206—2218.
- *Брюно А. Д.* Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // Доклады Академии Наук. 2012b. Т. 443, № 5. С. 539—544.
- *Брюно А. Д.* Алгоритмы решения одного алгебраического уравнения. // Программирование. 2019a. № 1. С. 59—72. ISSN 0132-3474. DOI: 10.1134/s0132347419010084. URL: http://dx.doi.org/10.1134/S0132347419010084.

Литература (4)

Брюно А. Д. Разложение решений обыкновенного дифференциального уравнения в трансряды. // Доклады Академии Наук. 2019b. Т. 484, № 3. С. 260—264. DOI: 10.31857/S0869-56524843260-264.

Брюно А. Д., Азимов А. А. Вычисление унимодулярной матрицы степенного преобразования. // Программирование. 2023. Т. 49, № 1. С. 38—47. DOI: 10.31857/S013234742301003X.