ПРИВЕДЁННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

А. Д. Брюно
abruno@keldysh.ru
http://brunoa.name

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша

Семинар «Компьютерная алгебра»

СТРУКТУРА ДОКЛАДА

- Напоминание
1. Введение
2. Пример
3. Нормальная форма линейной системы Гамильтона с периодическими коэффициентами

Аннотация I

Сначала рассматриваются линейные периодические системы Гамильтона. Для них находятся нормальные формы функций Гамильтона с n степенями свободы в комплексном и вещественном случаях. Обнаружена специфика вещественного случая. Затем находятся нормальные формы функций Гамильтона нелинейных периодических систем также в комплексном и вещественном случаях.

Аннотация II

Посредством дополнительного канонического преобразования координат такая нормальная форма всегда сводится к автономной системе Гамильтона, которая сохраняет все малые параметры и линейные симметрии исходной системы. Её локальным семействам неподвижных точек соответствуют семейства периодических решений исходной системы. Аналогичная теория строится в окрестности периодического решения автономной системы Гамильтона с $n+1$ свободы.

Рассматриваются два нетривиальных примера с двумя степенями свободы.

0. Напоминание I

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}\,, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}\,, \quad j = 1, \dots, n \tag{0.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) = 0. \tag{0.2}$$

0. Напоминание II

Если функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\,, \tag{0.3}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \prod \xi_i^{p_i}$, $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} = \prod \eta_i^{q_i}$. Поскольку точка (0.2) — неподвижная, то разложение (0.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (0.1).

0. Напоминание III

Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Канонические замены координат

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{0.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы.

Теорема 0.1

Существует каноническое формальное преобразование (0.4), *приводящее систему* (0.1) *к нормальной форме*

$$\dot{x}_j = \frac{\partial g}{\partial y_j}\,, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial g}{\partial x_j}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,, \tag{0.5}$$

где ряд

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{0.6}$$

содержит только члены с $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, *а квадратичная часть* $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *имеет свою нормальную форму (так что матрица линейной части системы является гамильтоновым аналогом жордановой нормальной формы). Здесь* $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n$ *— скалярное произведение.*

0. Напоминание V

Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (0.5) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами. При нормализующем преобразовании (0.4) сохраняются малые параметры и линейные автоморфизмы

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) , \quad t \to \widetilde{t} .$$

Семейства периодических решений удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a , \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a , \quad j = 1, \ldots, n ,$$

где a — свободный параметр.

0. Напоминание VI

Для вещественной исходной системы (0.1) коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (0.6) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ система (0.5) переходит в вещественную систему.

Имеется несколько способов вычисления коэффициентов $g_{\mathbf{pq}}$ нормальной формы (0.6). Наиболее простой описан в книге Журавлёва, Петрова, Шундерюка [4].

1. Введение

Здесь кратко излагается последовательность упрощающих преобразований периодической функции Гамильтона с n степенями свободы в специальном случае. При этом везде, кроме подраздела 1.4, используется теория из главы II [1]. В разделе 2 приводится пример применения этой техники. В разделах 3,4 даётся общая теория, пригодная во всех случаях. В разделе 5 излагается общая теория приведённой нормальной формы в окрестности периодического решения автономной системы Гамильтона с $n+1$ степенью свободы. В разделе 6 — соответствующий пример.

1.1. Постановка упрощённой задачи

В окрестности стационарного решения

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$$

рассматривается система Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n\ , \tag{1.1}$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами с s малыми параметрами $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$.

Пусть линейная по $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ часть этой системы при $\boldsymbol{\mu} = 0$ является постоянной, её матрица имеет только простые элементарные делители с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Положим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

1.2. Линейная нормализация

Сделаем линейное каноническое преобразование $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \to \mathbf{x}, \mathbf{y}$, которое приводит линейную часть системы (1.1) при $\boldsymbol{\mu} = 0$ к линейной нормальной форме

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, G\mathbf{z} \rangle ,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и G — диагональная матрица $G = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$. При этом функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}, \psi)$ принимает вид $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \psi)$.

1.3. Нелинейная нормализация

Существует нелинейное каноническое периодическое преобразование

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \psi \to \mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \tag{1.2}$$

которое переводит функцию Гамильтона $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \psi)$ в ряд Пуассона (нормальную форму)

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \varphi) = \sum h_{\mathbf{pqr}m} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}} \exp(im\varphi), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{u}^{\mathbf{p}} = u_1^{p_1} \cdots u_n^{p_n}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \geqslant 0$, и в разложении (1.3) имеются только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + im = 0.$$

1.4. Приведённая нормальная форма

Затем замена

$$u_j = \tilde{u}_j \exp(-i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi), \quad v_j = \tilde{v}_j \exp(i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi), \quad j = 1, \ldots, n,$$

приводит периодическую нормальную форму (1.3) к постоянной функции Гамильтона

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}) = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pqr}m} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}, \qquad (1.4)$$

где

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle = -m. \qquad (1.5)$$

При $\boldsymbol{\mu} = 0$ в $\tilde{h}$ отсутствует квадратичная часть по $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$.

1.5. Понижение числа степеней свободы

Пусть k — число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ системы уравнений

$$\langle \mathbf{p}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0 = \langle \mathbf{p}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle .$$

Тогда существует каноническая замена координат

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \Leftrightarrow (\utilde{\mathbf{u}}, \utilde{\mathbf{v}}) ,$$

в результате которой приведённая нормальная форма Гамильтониана (1.4) сводится к гамильтониану с $k+1$ степенью свободы и $n-k-1$ параметрами. Эта замена описана в § 3 главы I книги [1].

1.6. Вещественный случай

Если исходная система Гамильтона (1.1) была вещественной, то в приведённой нормальной форме (1.4) коэффициенты $\tilde{h}_{\mathbf{pqr}m}$ связаны соотношениями вещественности и комплексные координаты $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ переводятся в вещественные $\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}}$ стандартной линейной заменой

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix}$$

с постоянной блочной матрицей Q, которая описана в [1, гл. I].

Малые параметры $\boldsymbol{\mu}$ и линейные автоморфизмы системы (1.1) сохраняются при нормализующем преобразовании (1.2).

1.7. Периодические решения I

Даже если нормализующее преобразование (1.3) расходится, то оно сходится на локальных семействах периодических решений (проходящих через решение $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$), которым в системе с приведённой нормальной формой функции Гамильтона (1.4) соответствуют локальные семейства неподвижных точек.

Они являются решениями $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}$ системы $2n$ уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \widetilde{u}_j} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \widetilde{v}_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{1.6}$$

При $\boldsymbol{\mu} = 0$ разложение гамильтониана $\widetilde{h}$ начинается с членов третьей степени по $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}$, но при $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ — с членов первой степени.

1.7. Периодические решения II

Для вычисления семейств решений системы (1.6), проходящих через точку

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{v}} = 0,\ \boldsymbol{\mu} = 0, \tag{1.7}$$

надо найти все первые приближения системы (1.6) в окрестности точки (1.7). Для этого можно воспользоваться степенной геометрией [2]. Она предписывает для каждого из уравнений (1.6) вычислить границу выпуклой оболочки целочисленных показателей $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \geqslant 0$, удовлетворяющих системе (1.5) и присутствующих в этом уравнении (многогранник Ньютона), и с их помощью находить «укороченные системы» системы (1.6).

1.7. Периодические решения III

Но часть этих решений можно находить проще. А именно, выделять укороченные гамильтонианы $\widehat{h}_j^{(d)}(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu})$ с помощью многогранника Ньютона самого гамильтониана $\widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu})$. Затем из них отбираются те, для которых система уравнений

$$\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \widetilde{u}_j} = 0, \quad \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \widetilde{v}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{1.8}$$

является укороченной системой для системы (1.6).

Для этих укороченных гамильтонианов $\widehat{h}$ решения системы (1.8) являются первыми приближениями для решений полной системы (1.6). К таким вычислениям пока не привыкли математики и механики.

1.7. Периодические решения IV

Для вычисления дальнейших членов разложений этих семейств, надо выделить особые точки на вычисленных семействах, т.е. те точки $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu})$, в которых ранг матрицы

$$\mathrm{Rank}\left(\frac{\partial\tilde{h}/\partial\tilde{\mathbf{u}}, \partial\tilde{h}/\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\left(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}\right)}\right) < 2n. \tag{1.9}$$

Тогда в неособых точках, где этот $\mathrm{Rank} = 2n$, можно применить соответствующее степенное преобразование и теорему о неявной функции. Для анализа решений вблизи особой точки вычисленного семейства надо эту точку сдвинуть в начало координат и снова находить укороченные системы, находить их решения и т. д.

1.8. Обобщение

Всё это справедливо и без двух сделанных здесь предположений:

1. что линейная часть системы не зависит от времени;
2. что просты все элементарные делители матрицы монодромии линейной части системы.

2.1 Постановка задачи I

Пусть число степеней свободы $n = 2$, система (1.1) аналитически зависит от s малых параметров $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, имеет линейный автоморфизм $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\xi}, -\boldsymbol{\eta}$, при $\boldsymbol{\mu} = 0$ гамильтониан γ не зависит от ψ и собственные числа λ_1, λ_2 линейной части системы суть $\pm i, \pm\dfrac{i}{2}$.

Тогда в приведённой нормальной форме (1.4), опуская тильды, получаем

$$h(u_1, u_2, v_1, v_2, \boldsymbol{\mu}) = \sum h_{p_1 p_2 q_1 q_2 \mathbf{r} m} u_1^{p_1} u_2^{p_2} v_1^{q_1} v_2^{q_2} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}, \qquad (2.1)$$

где

$$(p_1 - q_1) + \frac{\sigma}{2}(p_2 - q_2) = -m, \quad \sigma = \pm 1, \qquad (2.2)$$

ибо $\operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} = \left(1, \dfrac{\sigma}{2}\right)$, $\operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} = 0$. При $\boldsymbol{\mu} = 0$ квадратичная часть ряда h по u_1, u_2, v_1, v_2, отсутствует. При этом в разложении (2.1) имеются только члены с чётными степенями $p_1 + p_2 + q_1 + q_2$, ибо нормальная форма сохраняет линейный автоморфизм $\mathbf{u}, \mathbf{v} \to -\mathbf{u}, -\mathbf{v}$.

2.2. Укорочения невозмущённого гамильтониана I

Поскольку при $\boldsymbol{\mu} = 0$ гамильтониан γ не зависит от угловой переменной ψ, т. е. является гамильтонианом автономной системы вблизи неподвижной точки $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, то при $\boldsymbol{\mu} = 0$ нормальная форма содержит только члены, у которых

$$p_1 - q_1 + \frac{\sigma}{2}(p_2 - q_2) = 0\,. \tag{2.3}$$

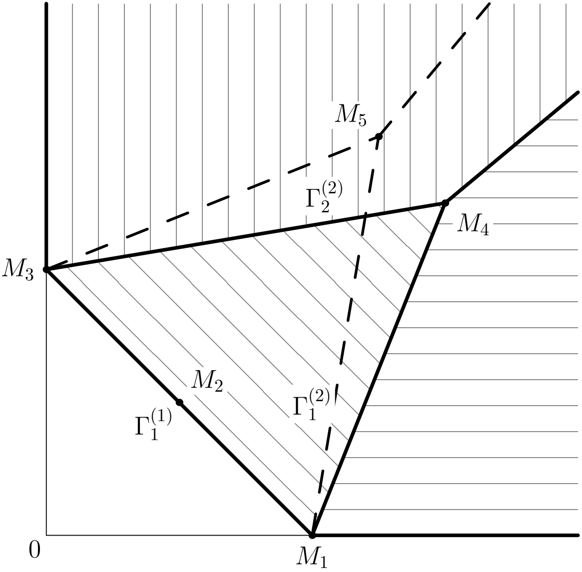
Это же верно и для приведённой нормальной формы (2.1). Её часть

$$h_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, 0) = \sum h_{p_1 p_2 q_1 q_2} u_1^{p_1} u_2^{p_2} v_1^{q_1} v_2^{q_2} \tag{2.4}$$

содержит только члены, для которых выполнено (2.3); сумма $p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = r$ чётна и $r \geqslant 4$.

2.2. Укорочения невозмущённого гамильтониана II

Предположим, что все члены в (2.4) с этими свойствами обладают ненулевым коэффициентом $h_{p_1 p_2 q_1 q_2}$. Тогда многогранник Ньютона $\mathbf{N}$ разложения (2.4) является трёхмерным, имеет ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с тремя точками $M = (p_1, q_1, p_2, q_2) : M_1 = (2, 2, 0, 0), M_2 = (1, 1, 1, 1), M_3 = (0, 0, 2, 2)$ и две двумерные грани $\Gamma_i^{(2)}$, содержащие ещё по одной точке $M_4 = (0, 2, 4, 0)$ или $M_5 = (2, 0, 0, 4)$. Все остальные показатели (p_1, q_1, p_2, q_2) в разложении (2.4) являются положительными линейными комбинациями точек $M_1, \ldots, M_5$.



M_5
$\Gamma_2^{(2)}$
M_4
M_3
M_2
$\Gamma_1^{(2)}$
$\Gamma_1^{(1)}$
0
M_1

2.2. Укорочения невозмущённого гамильтониана (3)

Поэтому здесь имеем три укороченных гамильтониана

$$\widehat{h}_{01}^{(1)} = \alpha u_1^2 v_1^2 + \beta u_1 v_1 u_2 v_2 + \gamma u_2^2 v_2^2,$$

$$\widehat{h}_{01}^{(2)} = \widehat{h}_{01}^{(1)} + \delta v_1^2 u_2^4, \tag{2.5}$$

$$\widehat{h}_{02}^{(2)} = \widehat{h}_{01}^{(1)} + \varepsilon u_1^2 v_2^4,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — постоянные, отличные от нуля. Здесь опущены вычисления, приведшие к этим результатам.

2.3. Укорочения возмущённого гамильтониана

I

При $p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 2$ уравнение (2.2) имеет 6 решений (p_1, q_1, p_2, q_2):

$$(2,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (0,2,0,0),\ (0,0,2,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,2).$$

Им соответствуют мономы $u_1^2, u_1 v_1, v_1^2$ и $u_2^2, u_2 v_2, v_2^2$. Все остальные допустимые решения уравнения (2.2) являются положительными линейными комбинациями указанных 6 решений.

2.3. Укорочения возмущённого гамильтониана II

Если предположить, что в приведённой нормальной форме (2.1) коэффициенты указанных 6 мономов отличны от нуля, то получаем 3 укороченных полных гамильтониана

$$\widehat{h}_1 = \widehat{h}_{01}^{(1)} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j (A_j u_1^2 + B_j u_1 v_1 + C_j v_1^2 + a_j u_2^2 + b_j u_2 v_2 + c_j v_2^2),$$

$$\widehat{h}_2 = \widehat{h}_{01}^{(2)} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j (C_j v_1^2 + a_j u_2^2),$$

$$\widehat{h}_3 = \widehat{h}_{02}^{(2)} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j (A_j u_1^2 + c_j v_2^2).$$

Здесь также опущены вычисления, приведшие к этим результатам.

2.3. Укорочения возмущённого гамильтониана III

Положим

$$A^* = \sum \mu_j A_j,\ B^* = \sum \mu_j B_j,\ C^* = \sum \mu_j C_j,$$
$$a^* = \sum \mu_j a_j,\ b^* = \sum \mu_j b_j,\ c^* = \sum \mu_j c_j\,. \tag{2.6}$$

Теперь укороченные гамильтонианы суть

$$\widehat{h}_1 = \widehat{h}_{01}^{(1)} + A^* u_1^2 + B^* u_1 v_1 + C^* v_1^2 + a^* u_2^2 + b^* u_2 v_2 + c^* v_2^2,$$
$$\widehat{h}_2 = \widehat{h}_{01}^{(2)} + C^* v_1^2 + a^* u_2^2,$$
$$\widehat{h}_3 = \widehat{h}_{02}^{(2)} + A^* u_1^2 + c^* v_2^2. \tag{2.7}$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ I

Для него система уравнений (1.8) при $\widehat{h} = \widehat{h}_1$ есть

$$
\begin{aligned}
\widehat{h}_{u_1} &= 2\alpha u_1 v_1^2 + \beta v_1 u_2 v_2 + 2A^* u_1 + B^* v_1 = 0\,, \\
\widehat{h}_{v_1} &= 2\alpha u_1^2 v_1 + \beta u_1 u_2 v_2 + B^* u_1 + 2C^* v_1 = 0\,, \\
\widehat{h}_{u_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2 v_2^2 + 2a^* u_2 + b^* v_2 = 0\,, \\
\widehat{h}_{v_2} &= \beta u_1 v_1 u_2 + 2\gamma u_2^2 v_2 + b^* u_2 + 2c^* v_2 = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ II

Умножая эти уравнения на u_1 (первое), v_1 (второе), u_2 (третье), v_2 (четвёртое) и сравнивая полученные уравнения: первое со вторым и третье с четвёртым, получаем равенства

$$2A^* u_1^2 = 2C^* v_1^2, \quad 2a^* u_2^2 = 2c^* v_2^2.$$

Из них следует, что

$$\sqrt{A^*} u_1 = \varkappa \sqrt{C^*} v_1, \quad \varkappa = \pm 1,$$

$$\sqrt{a^*} u_2 = \omega \sqrt{c^*} v_2, \quad \omega = \pm 1.$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ III

Теперь система (2.3) сводится к двум уравнениям

$$v_1(2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 + 2\kappa\sqrt{A^* C^*} + B^*) = 0,$$

$$v_2(\beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2 + 2\omega\sqrt{a^* c^*} + b^*) = 0.$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ IV

Решения системы (2.8) суть

1) $u_1 v_1 = u_2 v_2 = 0$,

2) $u_1 v_1 = 0$, $u_2 v_2 = \dfrac{1}{2\gamma}\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right)$,

3) $u_1 v_1 = \dfrac{1}{2\alpha}\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right)$, $u_2 v_2 = 0$,

4) $u_1 v_1 = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right) - 2\gamma\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right)\right]/\Delta$,

$u_2 v_2 = \left[\beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right) - 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right)\right]/\Delta$,

где $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2$, $\varkappa = \pm 1$, $\omega = \pm 1$. Всего 9 решений.

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ V

По нашему предположению $\alpha, \gamma \neq 0$, поэтому решения 2) и 3) существуют. При $\Delta = 0$ решений 4) нет, и только при дополнительном условии $2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^*c^*}\right) = \beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^*C^*}\right)$ имеется решение

5) $2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 + B^* + 2\varkappa\sqrt{A^*C^*} = 0.$

Согласно (1.9) на части особых точек решения 2) выполнено уравнение на $\boldsymbol{\mu}$:

$$16\gamma^2 A^* C^* = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^*c^*}\right) + 2\gamma B^*\right]^2.$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ VI

Переход от комплексных координат $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ к вещественным $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ даётся преобразованием

$$\begin{pmatrix} u_l \\ \\ v_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2i}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l \\ \\ V_l \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2.$$

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ VII

Для исходного вещественного гамильтониана константы таковы:

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$
$$\mu_j \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} B_j = \operatorname{Re} b_j = 0,\ C_j = -\overline{A}_j,\ c_j = -\bar{a}_j, j = 1, \dots, s,$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. При этом

$$u_l v_l = i\rho_l = -\frac{1}{2i}\left(U_l^2 + V_l^2\right),\ l = 1, 2,$$
$$\operatorname{Re} B^* = \operatorname{Re} b^* = 0,\ C^* = -\bar{A}^*,\ c^* = -\bar{a}^*,$$

и решения 1) — 5) вещественны и имеют вид

2.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\widehat{h}_1$ VIII

1. $\rho_1 = \rho_2 = 0,$
2. $\rho_1 = 0,\ \rho_2 = -\dfrac{1}{2\gamma i}\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right),$
3. $\rho_2 = 0,\ \rho_1 = -\dfrac{1}{2\alpha i}\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right),$
4. $\rho_1 = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right) - 2\gamma\left(B^* + 2\kappa\sqrt{-A^*C^*}\right)\right]/(i\Delta),$
   $\rho_2 = \left[\beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right) - 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right)\right]/(i\Delta),$
   $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0.$
5. $4\alpha\gamma = \beta^2,\ 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right) = \beta\left(B^* + 2\kappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right),$
   $2\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = i\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right),$
   $\varkappa \pm 1,\ \omega \pm 1,\ \rho_2$ — произвольное малое вещественное число.

2.5. Второе укорочение $\widehat{h}_2$ I

.

Согласно (2.5), (2.6), (2.7)

$$\widehat{h}_2 = \alpha u_1^2 v_1^2 + \beta u_1 v_1 u_2 v_2 + \gamma u_2^2 v_2^2 + \delta v_1^2 u_2^4 + C^* v_1^2 + a^* u_2^2.$$

Поэтому система (1.8) для $\widehat{h} = \widehat{h}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{u_1} &= 2\alpha u_1 v_1^2 + \beta v_1 u_2 v_2 = v_1(2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2) = 0\,,\\
\widehat{h}_{v_1} &= 2\alpha u_1^2 v_1 + \beta u_1 u_2 v_2 + 2\delta v_1 u_2^4 + 2C^* v_1 = 0\,,\\
\widehat{h}_{u_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2 v_2^2 + 4\delta v_1^2 u_2^3 + 2a^* u_2 = 0\,,\\
\widehat{h}_{v_2} &= \beta u_1 v_1 u_2 + 2\gamma u_2^2 v_2 = u_2(\beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.5. Второе укорочение $\widehat{h}_2$ II

Если v_1 и $u_2 \neq 0$, то подсистема из первого и четвёртого уравнений (2.9) имеет решение только при $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, и это решение есть

$$2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 = \beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2 = 0. \tag{2.10}$$

В этом случае система (2.9) сводится к системе

$$\delta u_2^4 + C^* = 0,$$

$$2\delta v_1^2 u_2^2 + a^* = 0.$$

2.5. Второе укорочение $\widehat{h}_2$ III

Решения последних трёх уравнений суть

$$u_2 = \omega \sqrt[4]{-\frac{C^*}{\delta}},\ \omega = \pm 1,\ \pm i;$$

$$v_1 = \varkappa\omega^2 \sqrt{\frac{a^*}{2C^*}},\ \varkappa = \pm 1,$$

v_2 – произвольно $\neq 0$,

$$u_1 = -\frac{2\gamma}{\beta}\frac{u_2 v_2}{v_1} = -\frac{2\gamma}{\beta}\frac{\varkappa}{\omega}\sqrt[4]{-\frac{C^*}{\delta}}\sqrt{\frac{2C^*}{a^*}}$$

при $C^* \neq 0$ и $a^* \neq 0$.

2.5. Второе укорочение $\widehat{h}_2$ IV

Это семейство решений локально, если $\boldsymbol{\mu}$ и v_2 стремятся к нулю так, что a^*/C^* и C^{*3}/a^* стремятся к нулю. В вещественном случае α, β, γ — вещественны, δ, C^* и a^* — комплексны. Поэтому добавляется условие на произвольное малое комплексное $v_2 : \mathrm{Re}(u_2/v_2) = 0$.

Кроме того, поскольку

$$u_j v_j = i\rho_j,\ \rho_j \in \mathbb{R} \text{ и } \rho_j \geqslant 0,\ j = 1, 2,$$

то из (2.10) получаем ещё одно условие существования вещественных решений

$$\alpha\beta < 0\,,$$

которое эквивалентно неравенству $\beta\gamma < 0$.

2.6. Общая ситуация

Из укорочения $\widehat{h}_3$ в (2.7) аналогично получаются дополнительные решения. Но нет уверенности, что найдены первые приближения всех локальных семейств неподвижных точек приведённой нормальной формой системы Гамильтона. Это требует ещё поиска укороченных систем, которые не являются гамильтоновыми, и их дальнейшего анализа.

3.1. Линейная система I

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{d\psi} = A(\psi)\boldsymbol{\zeta}, \tag{3.1}$$

где вектор $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, $A(\psi)$ — матрица, аналитически зависящая от ψ. После замены координат

$$\boldsymbol{\zeta} = B(\psi)\mathbf{z} \tag{3.2}$$

система (3.1) перейдёт в систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = B^{-1}\left(AB - \frac{dB}{d\psi}\right)\mathbf{z}. \tag{3.3}$$

3.1. Линейная система II

Пусть теперь система (3.1) гамильтонова:

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

т. е. $m = 2n$, $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$, где $\Gamma(\psi)$ — симметрическая матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ и функция Гамильтона $\gamma = \dfrac{1}{2}\langle\boldsymbol{\zeta}, \Gamma(\psi)\boldsymbol{\zeta}\rangle$. Здесь E_n — единичная $n \times n$-матрица и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

3.1. Линейная система III

Если преобразование (3.2) каноническое, т. е.

$$B^*(\psi)JB(\psi) = \delta J, \quad \delta = \text{const} \tag{3.5}$$

(звёздочка — символ транспонирования матрицы), то система (3.3) также гамильтонова с функцией Гамильтона

$$g = \frac{1}{2\delta}\left\langle \mathbf{z}, B^*\Gamma B\mathbf{z}\right\rangle + \frac{1}{2\delta}\left\langle \mathbf{z}, B^*J\frac{dB}{d\psi}\mathbf{z}\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\right\rangle, \tag{3.6}$$

т. е. $G = \delta^{-1}B^*\Gamma B + \delta^{-1}B^*JdB/d\psi$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

3.1. Линейная система IV

Рассмотрим теперь систему Гамильтона (3.4), в которой матрица $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$ имеет по ψ период 2π, т. е. $A(\psi+2\pi) = A(\psi)$. Посредством линейной канонической замены координат (3.2), (3.5) с 2π-периодической матрицей $B(\psi)$ постараемся получить гамильтониан (3.6) наиболее простого вида. Пусть $\underset{\sim}{Z}(\psi)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1). Тогда

$$\underset{\sim}{Z}(\psi + 2\pi) = \underset{\sim}{Z}(\psi)N,$$

где N — постоянная матрица, $\det N \neq 0$. Для системы Гамильтона она каноническая.

3.1. Линейная система V

Если для матрицы N существует представление

$$N = \exp(2\pi JL), \tag{3.7}$$

где L — постоянная симметрическая матрица, то, согласно § 1, гл. I, книги [1] $L = B_1^* G B_1$, где B_1 — постоянная каноническая матрица и G — нормальная форма матрицы L. Таким образом, преобразование (3.2) с $B(\psi) = \underset{\sim}{Z}(\psi)\exp(-\psi JG)$ приводит систему Гамильтона (3.4) к нормальной форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG\mathbf{z}, \quad G = \mathrm{const}, \tag{3.8}$$

с функцией Гамильтона $g = \dfrac{1}{2}\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle$. Однако представление (3.7) имеется не для всякой канонической матрицы N (см. Вильямсон [3]).

3.1. Линейная система VI

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_{2n}$ — собственные числа канонической матрицы N. Вместе с числом $\nu_j = b$ среди них есть и число b^{-1}. Более того, элементарные делители матрицы $\nu E - N$ обладают следующими свойствами:

- если $b \neq \pm 1$ и имеется ровно k элементарных делителей $(\nu - b)^l$, то имеется ровно k элементарных делителей $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$;
- если $b = \pm 1$ и l нечётно, то элементарный делитель $(\nu - b)^l$ встречается чётное число раз.

3.2. Комплексная нормальная форма I

Для комплексной системы (3.1) матрица N — комплексная. Неприводимые над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ элементарные делители матрицы $\nu E - N$ относятся к одному из следующих четырёх случаев:

C1) $(\nu - b)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$, $b \neq \pm 1$;

C2) $(\nu - b)^l$ и $(\nu - b)^l$, $b = \pm 1$, l — нечётное;

C3) $(\nu - 1)^{2l}$;

C4) $(\nu + 1)^{2l}$.

3.2. Комплексная нормальная форма II

Посредством постоянной канонической замены координат $\boldsymbol{\zeta}$ матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя четвёрка блоков порядка l, а вне блоков стоят нули. Эта замена должна приводить матрицу N к соответствующему блочному виду. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении $l = n$.

В случаях **C1) – C3)** существует представление (3.7); при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям C1) – C3) п. 1.Б гл. I книги [1], где

$$a = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln} b = \frac{1}{2\pi} \ln |b| + \frac{i}{2\pi} \arg b + im$$

и m — любое целое число; а именно:

3.2. Комплексная нормальная форма III

- в случае **C1)**

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ \\ C & 0 \end{pmatrix} ,$$

где C — жорданова клетка порядка l: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & a & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & ... & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & ... & \varepsilon & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \varepsilon & a \end{pmatrix}$, т. е.

$$g_2 = a \sum_{j=1}^{l} x_j y_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} \ ;$$

- случай **C2)** с $b = 1$ относится к случаю **C1)** с $a = im$;

3.2. Комплексная нормальная форма IV

- случай **C2)** с $b = -1$ относится к случаю **C1)** с $a = im + \dfrac{i}{2}$;
- в случае **C3)**

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ & \\ C & \sigma\Delta \end{pmatrix},$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = 0$, $\sigma = \pm 1$ и диагональная матрица $\Delta = \{1, 0, \ldots, 0\}$, т. е.

$$g_2 = \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} + \frac{1}{2}\sigma y_1^2 \ ;$$

3.2. Комплексная нормальная форма V

- в случае **C4)** представления (3.7) нет и комплексная нормальная форма $\dfrac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG(\psi)\mathbf{z}$ имеет

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ \\ C & \sigma\Delta\exp(i\psi) \end{pmatrix},$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = im + \dfrac{i}{2}$, $\sigma = \pm 1$.

3.2. Комплексная нормальная форма VI

Рассмотрим теперь удвоенные случаи **C3)** и **C4)**.

C3*) Двум элементарным делителям $(\nu-1)^{2l'}$ и $(\nu-1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму (3.8) случая **C2)** с $a = im$ и произвольным целым m (только теперь $l = 2l'$ — чётно).

C4*) Двум элементарным делителям $(\nu+1)^{2l'}$ и $(\nu+1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму случая **C1)** с $a = (2\pi)^{-1}\,\mathrm{Ln}(-1) = im + \dfrac{i}{2}$.

3.2. Комплексная нормальная форма VII

Итак, посредством комплексной замены (3.2), где $B(\psi)$ — каноническая 2π-периодическая матрица, система (3.4) приводится к системе с постоянными коэффициентами, если каждый элементарный делитель вида $(\nu + 1)^{2l}$ встречается чётное число раз среди элементарных делителей матрицы $\nu E - N$. Вильямсон [3, теорема 1] доказал, что это условие не только достаточно, но и необходимо для комплексной приводимости.

3.3. Вещественные системы I

Для вещественной системы (3.4) матрица N является вещественной. Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E - N$ обладают следующими свойствами. Пусть элементарный делитель $(\nu - b)^l$ имеется точно k раз.

- Если число b комплексное, т. е. $\operatorname{Re} b \cdot \operatorname{Im} b \neq 0$, и $|b| \neq 1$, то элементарные делители $\left(\nu - \bar{b}\right)^l$, $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$ и $\left(\nu - \bar{b}^{-1}\right)^l$ также имеются точно k раз.
- Если число b вещественное или единичного модуля, $b \neq \pm 1$, то $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$ имеется точно k раз.
- Если $b = \pm 1$ и l нечётно, то k должно быть чётным.

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение.

3.3. Вещественные системы II

Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E - N$ относятся к одному из следующих восьми случаев:

R1) $(\nu - b)^l \left(\nu - \bar{b}\right)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l \left(v - \bar{b}^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, b \cdot \mathrm{Im}\, b \neq 0$, $|b| \neq 1$;

R2) $(\nu - b)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$;

R3) $(\nu - b)^l \left(\nu - \bar{b}\right)^l$, $|b| = 1$, $b \neq \pm 1$;

R4) $(\nu - 1)^l$ и $(\nu - 1)^l$, l — нечётно;

R5) $(\nu - 1)^{2l}$;

R6) $(\nu + 1)^l$ и $(\nu + 1)^l$, l — нечётно;

R7) $(\nu - b)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$, $b \neq -1$;

R8) $(\nu + 1)^{2l}$.

3.3. Вещественные системы III

Посредством вещественной постоянной канонической линейной замены координат ζ матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя группа блоков, а вне этих блоков стоят нули. Эта замена должна приводить матрицу N к соответствующему блочному виду. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении, что он исчерпывает матрицу N.

3.3. Вещественные системы IV

В случаях **R1) – R7)** существует представление (3.7) с вещественной матрицей L; при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям R1) – R5) п. 1.B гл. I книги [1] соответственно, где

$$a = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,b = \frac{1}{2\pi}\ln b + im.$$

При этом число $\ln b$ однозначно определяется по b, а целое число m надо вычислять дополнительно следующим образом.

Вычисляется любое решение $\boldsymbol{\zeta}(\psi)$ линейной подсистемы вида (3.1) относящейся к одному из случаев **R1) – R7)**. Количество целых колебаний каждой из его ненулевых координат на периоде 2π — это и есть число m. При этом в случаях **R3)** и **R5)** имеется дополнительный вещественных инвариант $\sigma = \pm 1$.

3.3. Вещественные системы V

Итак, в случаях **R1) – R7)** имеется постоянная комплексная нормальная форма

$$g_2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, G\mathbf{z} \rangle \,, \tag{3.9}$$

которая переводится в вещественную нормальную форму

$$f_2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{Z}, F\mathbf{Z} \rangle \tag{3.10}$$

с помощью стандартного канонического преобразования

$$\mathbf{Z} = Q\mathbf{z}, \quad \det Q = 1. \tag{3.11}$$

Гипотеза

Для вещественной гамильтоновой системы (3.4) ***случай R8) невозможен.***

3.3. Вещественные системы VI

Итак, для вещественной линейной периодической системы Гамильтона нормальная форма всегда является линейной системой с постоянными коэффициентами.

Её комплексная запись (3.9) связана с вещественной записью (3.10) стандартным преобразованием (3.11). При этом подстановка

$$\bar{\mathbf{z}} = P\mathbf{z},$$

где $2n$-матрица $P = \bar{Q}^{-1}Q$, сохраняет гамильтониан. Конкретный вид матриц Q и P для каждого из случаев **R1) – R7)** описан в главе I книги [1].

Библиография

[1] Брюно А.Д. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1990.

[2] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

[3] Williamson J. The exponential representation of canonical matrices // Amer. Math. J. 1939. Vol. 61, No 4. pp. 897–911.

[4] Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.