

# ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Александр Дмитриевич Брюно

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша*

сентябрь 2014

## Содержание

1. Введение
  2. Выделение ведущих членов
  3. Степенные разложения решений
  4. Сложные разложения решений
  5. Экспоненциальные разложения решений
  6. Обобщения
  7. Приложения
- Литература

## Аннотация

В докладе предлагаются алгоритмы, позволяющие получать асимптотические разложения решений в виде (а) степенных рядов с постоянными коэффициентами и (б) с коэффициентами, являющимися степенными рядами от логарифмов, а также — (в) в виде ряда экспонент от степенного ряда. Эти алгоритмы применимы к уравнениям (А) алгебраическим, (В) обыкновенным дифференциальным и (С) в частных производных, а также — к системам таких уравнений. Изложение ведется для одного обыкновенного дифференциального уравнения. Перечислены некоторые из приложений этих алгоритмов.

## Введение

В последнее время в связи с увеличением мощности компьютеров возрастает стремление решать математические задачи численно. На это направлено и основное обучение математиков в ущерб изучению собственно математики. Т. е. математика подменяется арифметикой. Это особенно справедливо для задач, которые не могут быть решены методами классического и функционального анализа. Здесь я обрисую круг таких задач, которые могут быть решены методами нелинейного анализа, позволяющими вычислять асимптотики и асимптотические разложения решений различных классов уравнений: алгебраических, обыкновенных дифференциальных, в частных производных. А также — систем таких уравнений. На мех-мате МГУ на изложение нелинейного анализа уходил годовой курс лекций.

## Введение (cont.)

В этой лекции на примерах одного обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где  $f$  — это многочлен своих аргументов, я объясню основные понятия и методы нелинейного анализа, позволяющие получить его решения в виде асимптотических разложений

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \quad (1.1)$$

при  $x \rightarrow 0$  или  $x \rightarrow \infty$ . В конце я дам перечень его приложений. Для простоты здесь рассмотрим только разложения с вещественными показателями степени.

1. Введение

**2. Выделение ведущих членов**

3. Степенные разложения решений

4. Сложные разложения решений

5. Экспоненциальные разложения решений

6. Обобщения

7. Приложения

Литература



## 2.1. Порядок функции

Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \rightarrow 0, \\ +1, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Число

$$p_\omega(\varphi) = \omega \limsup_{x^\omega \rightarrow \infty} \frac{\log |\varphi(x)|}{\omega \log |x|}$$

вычисленное при фиксированном  $\arg x \in [0, 2\pi)$  назовем **порядком** функции  $\varphi(x)$ . Для степенной функции  $\varphi(x) = \text{const } x^\alpha$  порядок  $p(\varphi) = \text{Re } \alpha$  при любых  $\omega$  и  $\arg x$ . Разложение (1.1) называется **асимптотическим**, если

$$\omega p(\varphi_k) > \omega p(\varphi_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 2.2. Укороченные суммы

Пусть  $x$  — независимая и  $y$  — зависимая переменные,  $x, y \in \mathbb{C}$ . Дифференциальным мономом  $a(x, y)$  называется произведение обычного монома  $cx^{r_1}y^{r_2}$ , где  $c = \text{const} \in \mathbb{C}$ ,  $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ , и конечного числа производных вида  $d^l y/dx^l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .

Сумма дифференциальных мономов

$$f(x, y) = \sum a_i(x, y) \quad (2.2)$$

называется дифференциальной суммой.





## 2.2. Укороченные суммы (cont.)

Требуется из нее выделить те слагаемые  $a_i(x, y)$ , которые при подстановке

$$y = \text{const } x^p, \quad p \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

имеют наибольший порядок. При этой подстановке

$$x^{q_1} y^{q_2} = \text{const } x^{q_1 + pq_2} = \text{const } x^{\langle P, Q \rangle},$$

где  $P = (1, p) = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ ,  $\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2$  — скалярное произведение. При фиксированных  $p$  и  $\omega$  наибольший порядок дадут те слагаемые  $\text{const } x^{q_1} y^{q_2}$ , у которых

$$\omega \langle P, Q \rangle \quad (2.4)$$

принимает наибольшее значение.



## 2.2. Укороченные суммы (cont.)

Аналогично, дифференциальному моному  $a(x, y)$  ставится в соответствие его (векторный) **показатель степени**  $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$  по следующим правилам:

$$Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2); \quad Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1);$$

при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы:

$$Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2).$$



## 2.2. Укороченные суммы (cont.)

Множество  $\mathbf{S}(f)$  показателей степени  $Q(a_i)$  всех дифференциальных мономов  $a_i(x, y)$ , входящих в дифференциальную сумму (2.2), называется **носителем суммы**  $f(x, y)$ . Очевидно,  $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$ . Выпуклая оболочка  $\Gamma(f)$  носителя  $\mathbf{S}(f)$  называется **многоугольником суммы**  $f(x, y)$ . Граница  $\partial\Gamma(f)$  многоугольника  $\Gamma(f)$  состоит из вершин  $\Gamma_j^{(0)}$  и ребер  $\Gamma_j^{(1)}$ . Их называют (обобщенными) **гранями**  $\Gamma_j^{(d)}$ , где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — ее номер.

## 2.2. Укороченные суммы (cont.)

Каждой грани  $\Gamma_j^{(d)}$  соответствует **укороченная сумма**

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = \sum a_i(x, y) \text{ по } Q(a_i) \in \Gamma_j^{(d)} \cap \mathbf{S}(f). \quad (2.5)$$

В ней при подстановке (2.3) все члены имеют одинаковый порядок, который равен  $\langle P, Q \rangle$ , если вектор  $\omega P = \omega(1, p)$  является внешней нормалью к ребру или вершине  $\Gamma_j^{(d)}$ . Ибо тогда наибольшее значение  $\omega \langle P, Q \rangle$  достигается на  $Q \in \Gamma_j^{(d)}$ .

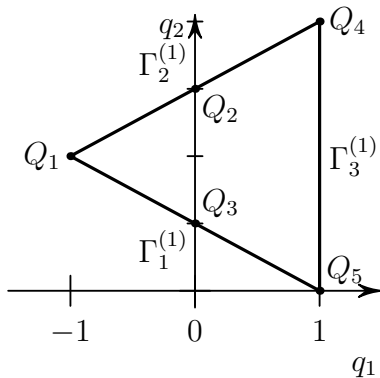
## Пример

Рассмотрим третье уравнение Пенлеве

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0, \quad (2.6)$$

предполагая, что комплексные параметры  $a, b, c, d \neq 0$ . Здесь первые три дифференциальных монома имеют одинаковые показатели степени  $Q_1 = (-1, 2)$ , затем  $Q_2 = (0, 3)$ ,  $Q_3 = (0, 1)$ ,  $Q_4 = (1, 4)$ ,  $Q_5 = (1, 0)$ . В координатах  $q_1, q_2$  они показаны на рис. 1.

## Пример (cont.)



**Рис. 1:** Носитель  $S(f)$ , многоугольник  $\Gamma(f)$  и его ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  для третьего уравнения Пенлеве (2.6).



## Пример (cont.)

Их выпуклая оболочка  $\Gamma(f)$  это треугольник с тремя вершинами  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ ,  $\Gamma_2^{(0)} = Q_4$ ,  $\Gamma_3^{(0)} = Q_5$ , и с тремя ребрами  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ ,  $\Gamma_3^{(1)}$ . Вершине  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$  соответствует укорочение

$$\hat{f}_2^{(0)}(x, y) = -xyy'' + xy'^2 - yy',$$

а ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укорочение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x, y) = \hat{f}_1^{(0)}(x, y) + by + dx. \blacksquare$$

Пусть плоскость  $\mathbb{R}_*^2$  сопряжена плоскости  $\mathbb{R}^2$  так, что для  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$  и  $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$  определено скалярное произведение

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

Каждой грани  $\Gamma_j^{(d)}$  в  $\mathbb{R}_*^2$  соответствует свой **нормальный конус**  $U_j^{(d)}$ , образованный внешними нормальными  $P$  к грани  $\Gamma_j^{(d)}$ . Для ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  нормальный конус  $U_j^{(1)}$  это луч, ортогональный ребру  $\Gamma_j^{(1)}$  и направленный наружу многоугольника  $\Gamma(f)$ . Для вершины  $\Gamma_j^{(0)}$  нормальный конус  $U_j^{(0)}$  это открытый сектор (угол) на плоскости  $\mathbb{R}_*^2$  с вершиной в нуле  $P = 0$  и ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине  $\Gamma_j^{(0)}$ .





**Рис. 2:** Нормальные конусы  $U_j^{(d)}$  к вершинам и ребрам  $\Gamma_j^{(d)}$  многоугольника рис. 1.

Итак, каждой грани  $\Gamma_j^{(d)}$  соответствуют нормальный конус  $U_j^{(d)}$  в плоскости  $\mathbb{R}_*^2$  и укороченная сумма (2.5).

## 2.3. Вариации

В классическом анализе известна формула Тейлора

$$f(x_0 + \Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \Delta^k.$$

В функциональном анализе имеется ее аналог

$$f(x, y_0 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k}{\delta y^k} f \Big|_{y=y_0} z^k, \quad (2.7)$$

где  $f(x, y)$  — дифференциальная сумма,  $\frac{\delta^k}{\delta y^k} f(x, y)$  — это ее  $k$ -я **вариация** по  $y$  (или производная Фреше/Гато).

## 2.3. Вариации (cont.)

Она берется на функции  $y = y_0(x)$  и является оператором, который применяется к  $k$ -й степени малого добавка  $z^k$ . Все это делается в бесконечномерных пространствах. Если  $f(x, y)$  — обыкновенный многочлен (не содержит производных), то  $\frac{\delta^k}{\delta y^k} f = \frac{\partial^k}{\partial y^k} f$ .

Но вариации определены и для выражений  $f(x, y)$ , содержащих производные.

### Пример

Если  $f = \frac{\partial^k y}{\partial x^k}$ , то  $\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ . ■



1. Введение

2. Выделение ведущих членов

**3. Степенные разложения решений**

4. Сложные разложения решений

5. Экспоненциальные разложения решений

6. Обобщения

7. Приложения

Литература

### 3.1. Постановка задачи

#### Задача

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad (3.1)$$

где  $f(x, y)$  — дифференциальная сумма. При  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow \infty$  для решений  $y = \varphi(x)$  уравнения (3.1) найти все разложения вида

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \quad c_r, c_s = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad c_r \neq 0, \quad (3.2)$$

где показатели степени  $r, s \in \mathbb{R}$ ,

$$\omega r > \omega s. \quad \blacksquare \quad (3.3)$$





### 3.1. Постановка задачи (cont.)

Поэтому для нахождения всех укороченных решений  $y = c_r x^r$  уравнения (3.1) надо вычислить: носитель  $\mathbf{S}(f)$ , многоугольник  $\Gamma(f)$ , все его грани  $\Gamma_j^{(d)}$  и их нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(d)}$ . Затем для каждого укороченного уравнения  $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$  надо найти все его степенные решения  $y = c_r x^r$ , у которых один из векторов  $\pm(1, r)$  лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_j^{(d)}$ .

### 3.2. Решение укороченного уравнения

Вершине  $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(0)}(x, y) = 0$  с точечным носителем  $Q = (q_1, q_2)$ . Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} y^{-q_2} \hat{f}_j^{(0)}(x, y),$$

тогда  $g(x, cx^r)$  не зависит от  $x$  и  $c$  и является многочленом от  $r$ . Следовательно, для решения  $y = c_r x^r$  уравнения  $\hat{f}_j^{(0)}(x, y) = 0$  показатель  $r$  является корнем **характеристического уравнения**

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \quad (3.5)$$

а коэффициент  $c_r$  — произвольный. Из вещественных корней  $r$  уравнения (3.5) надо отобразить только те, для которых вектор  $\omega(1, r)$  лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_j^{(0)}$  вершины  $\Gamma_j^{(0)}$ .

## Пример

Для уравнения (2.6) вершине  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1 = (-1, 2)$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' = 0, \quad (3.6)$$

и  $\hat{f}_1^{(0)}(x, x^r) = x^{2r-1}[-r(r-1) + r^2 - r] \equiv 0$ , т. е. любое выражение  $y = cx^r$  является решением уравнения (3.6). Здесь  $\omega = -1$  и нас интересуют только те из этих решений, у которых вектор  $-(1, r) \in \mathbf{U}_1^{(0)}$ . Согласно рис. 2 это означает, что  $r \in (-1, 1)$ . Итак, вершине  $\Gamma_2^{(0)}$  соответствует двухпараметрическое семейство степенных асимптотик решений

$$y = cx^r, \text{ любое } c \neq 0, \quad r \in (-1, 1). \quad \blacksquare \quad (3.7)$$

## 3.2. Решение укороченного уравнения (cont)

Ребру  $\Gamma_j^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0$ , нормальный конус которого  $\mathbf{U}_j^{(1)}$  является лучом  $\{P = \lambda\omega'(1, r'), \lambda > 0\}$ . Включение  $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$  означает равенства  $\omega = \omega'$  и  $r = r'$ . Этим однозначно определяется показатель степени  $r$  укороченного решения  $y = c_r x^r$  и значение  $\omega$ . Для определения коэффициента  $c_r$  надо выражение  $y = c_r x^r$  подставить в укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0$ . После сокращения на некоторую степень  $x$  получаем алгебраическое **определяющее** уравнение для коэффициента  $c_r$

$$\tilde{f}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \quad (3.8)$$

Каждому его корню  $c_r \neq 0$  соответствует своя асимптотика  $y = c_r x^r$ .

## Пример

Для уравнения (2.6) ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + by + dx = 0. \quad (3.9)$$

Поскольку  $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = -\lambda(1, 1), \lambda > 0\}$ , то  $\omega = -1$  и  $r = 1$ . Подставляя  $y = c_1x$  в укороченное уравнение (3.9) и сокращая на  $x$ , получаем для  $c_1$  уравнение  $bc_1 + d = 0$ ; откуда  $c_1 = -d/b$ . Итак, ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует единственная степенная асимптотика решений

$$y = -(d/b)x, \quad x \rightarrow 0. \quad \blacksquare \quad (3.10)$$

### 3.3. Критические числа укороченного решения

Если найдено укороченное решение  $y = c_r x^r$ , то замена  $y = c_r x^r + z$  приводит уравнение  $f(x, y) = 0$  к виду

$$f(x, c_r x^r + z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (3.11)$$

где  $\mathcal{L}(x)$  — линейный дифференциальный оператор и носитель  $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$  состоит из одной точки  $(v, 1)$ , являющейся вершиной  $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$  многоугольника  $\Gamma(\tilde{f})$ , у носителя  $\mathbf{S}(h)$  нет точки  $(v, 1)$ . Оператор  $\mathcal{L}(x)$  вычисляется как первая вариация  $\delta \hat{f}_j^{(d)} / \delta y$  на кривой  $y = c_r x^r$ .

### 3.3. Критические числа укороченного решения (cont.)

Пусть  $\nu(k)$  — характеристический многочлен дифференциальной суммы  $\mathcal{L}(x)z$ , т. е.

$$\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k. \quad (3.12)$$

Те вещественные корни  $k_1, \dots, k_z$  многочлена  $\nu(k)$ , которые удовлетворяют неравенству  $\omega r > \omega k_i$ , называются **критическими числами укороченного решения**  $y = c_r x^r$ .

## Пример

Для укороченного уравнения (3.6) первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(0)}}{\delta y} = -xy'' - xy \frac{d^2}{dx^2} + 2xy' \frac{d}{dx} - y' - y \frac{d}{dx}.$$

На кривой  $y = c_r x^r$  эта вариация дает оператор

$$\mathcal{L}(x) = c_r x^{r-1} \left[ -r(r-1) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2rx \frac{d}{dx} - r - x \frac{d}{dx} \right].$$



## Пример (cont.)

Характеристический многочлен суммы  $\mathcal{L}(x)z$ , т. е.  $\mathcal{L}(x)x^k$ , есть

$$\nu(k) = c_r[-r(r-1) - k(k-1) + 2rk - r - k] = -c_r(k-r)^2.$$

Он имеет один двукратный корень  $k_1 = r$ , который не является критическим числом, ибо не удовлетворяет неравенству  $\omega r > \omega k_1$ . Следовательно, укороченные решения (3.7) не имеют критических чисел.

Для укороченного уравнения (3.9) первая вариация есть

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta y} = \frac{\delta \hat{f}_1^{(0)}}{\delta y} + b.$$

## Пример (cont.)

На кривой (3.10), т. е.  $y = c_1x$ ,  $c_1 = -d/b$ , эта вариация дает оператор

$$\mathcal{L}(x) = c_1 \left[ -x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} - 1 - x \frac{d}{dx} - \frac{b^2}{d} \right]$$

и характеристический многочлен

$$\nu(k) = -c_1[k^2 - 2k + 1 + b^2/d].$$

Его корни  $k_{1,2} = 1 \pm b/\sqrt{-d}$ . Если  $\text{Im}(b/\sqrt{-d}) \neq 0$ , то критических чисел нет. Если  $\text{Im}(b/\sqrt{-d}) = 0$ , то неравенству  $\omega r > \omega k_i$  удовлетворяет только один корень  $k_1 = 1 + |b/\sqrt{-d}|$ , который и является единственным критическим числом степенной асимптотики (3.10). ■

### 3.4. Вычисление степенного разложения решения

Пусть  $\Gamma_j^{(0)}$  — некая вершина многоугольника  $\Gamma(f)$  и векторы  $M_1$  и  $M_2$  направлены от этой вершины по прилегающим к ней ребрам, причем все точки сдвинутого носителя  $\mathbf{S}(f) - \Gamma_j^{(0)}$  представляются в виде  $l_1 M_1 + l_2 M_2$ , где целые  $l_1, l_2 \geq 0$ . Тогда множество

$$\mathbf{K}_j^{(0)}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{s = r + l_1 r_1 + l_2 r_2, \text{ целые } l_i \geq 0, l_1 + l_2 > 0\},$$

где  $r_i = \langle (1, r), M_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$ .

### 3.4. Вычисление степенного разложения решения (cont.)

Пусть  $\Gamma_j^{(1)}$  — ребро многоугольника  $\Gamma(f)$  с вершинами  $\Gamma_k^{(0)}$ ,  $\Gamma_l^{(0)}$  и с нормалью  $\omega(1, r)$ . Тогда

$$\mathbf{K}_j^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_k^{(0)}(r) \cap \mathbf{K}_l^{(0)}(r).$$

#### Теорема 3

Если укороченное решение  $y = c_r x^r$  соответствует вершине  $\Gamma_j^{(0)}$  с  $\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(0)}$  или ребру  $\Gamma_j^{(1)}$  с  $\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(1)}$  и все критические числа этого укороченного решения не лежат в множестве  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_j^{(0)}(r)$  или  $\mathbf{K}_j^{(1)}$ , то исходное уравнение имеет решение в виде разложения (3.2), где  $s$  пробегает множество  $\mathbf{K}_j^{(0)}(r)$  или  $\mathbf{K}_j^{(1)}$  соответственно.

### 3.4. Вычисление степенного разложения решения (cont.)

Доказательство основано на асимптотических разложениях

$$f(x, y) = \hat{f}_j^{(d)}(x, y) + \hat{\hat{f}}(x, y) + \dots, \quad y = c_r x^r + c_s x^s + \dots$$

Подставляя одно в другое и используя следствие 1, получаем уравнение

$$f(x, c_r x^r + c_s x^s + \dots) = \hat{f}_j^{(d)}(x, c_r x^r) + \frac{\delta \hat{f}_j^{(d)}}{\delta y} \Big|_{y=c_r x^r} \cdot c_s x^s + \\ + \hat{\hat{f}}(x, c_r x^r) + \dots = 0.$$

### 3.4. Вычисление степенного разложения решения (cont.)

Но у нас  $\hat{f}_j^{(d)}(x, c_r x^r) = 0$  и ведущими слагаемыми являются два следующих. Следовательно, должно выполняться уравнение

$$\left. \frac{\delta \hat{f}_j^{(d)}}{\delta y} \right|_{y=c_r x^r} \cdot c_s x^s + \hat{f}_j(x, c_r x^r) = 0,$$

которое сводится к уравнению вида

$$\nu(s)c_s + b_s = 0, \quad b_s = \text{const} \in \mathbb{C}.$$

Поскольку  $s \in \mathbf{K}$  и по условию теоремы  $\nu(s) \neq 0$ , то двигаясь по убыванию  $\omega s$  с  $s \in \mathbf{K}$  последовательно находятся коэффициенты  $c_s$  разложения (3.2).

## Пример

Для уравнения (2.6) вершине  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$  соответствуют векторы  $M_1 = (1, 1)$ ,  $M_2 = (1, -1)$ , поэтому  $r_1 = 1 + r$ ,  $r_2 = 1 - r$ , где  $|r| < 1$  и множество

$$\mathbf{K}_1^{(0)}(r) = \{s = r + l_1(1+r) + l_2(1-r), \text{ целые } l_1, l_2 \geq 0, l_1 + l_2 > 0\}. \quad (3.13)$$

Поскольку нет критических чисел, то по теореме 3 каждому укороченному решению (3.7) соответствует решение (3.2) с  $s \in \mathbf{K}_1^{(0)}(r)$ .

## Пример (cont.)

Ребро  $\Gamma_1^{(1)}$  имеет две вершины  $Q_1$  и  $Q_5 = (1, 0)$ ,  $r = 1$ . Для вершины  $Q_1$  согласно (3.13)  $\mathbf{K}_1^{(0)}(1) = \{1 + 2l_1\}$ . Для вершины  $\Gamma_3^{(0)} = Q_5$  имеем  $M_1 = (-1, 1)$ ,  $M_2 = (0, 2)$ . Поэтому  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 2$ , и  $\mathbf{K}_3^{(0)}(1) = \mathbf{K}_1^{(0)}(1) = \{1 + 2l_1, \text{целое } l_1 > 0\}$ . Если  $\text{Im}(b/\sqrt{-d}) \neq 0$ , то для укороченного решения (3.10) нет критических чисел и в разложении (3.2) все показатели  $s$  — нечетные целые числа большие единицы, а коэффициенты  $c_s$  постоянны и однозначно определены. Если  $\text{Im}(b/\sqrt{-d}) = 0$ , то имеется одно критическое число  $k_1 = 1 + |b/\sqrt{-d}|$ . Следовательно, если число  $k_1$  не является нечетным, то имеется разложение (3.2). ■



1. Введение

2. Выделение ведущих членов

3. Степенные разложения решений

**4. Сложные разложения решений**

5. Экспоненциальные разложения решений

6. Обобщения

7. Приложения

Литература

## 4. Сложные разложения решений

Укороченные уравнения могут иметь нестепенные решения, которые продолжаются в асимптотические разложения. Далее будем искать решения полного уравнения  $f(x, y) = 0$  в виде **сложного** асимптотического **разложения**

$$y = \varphi_r(\log x)x^r + \sum \varphi_s(\log x)x^s, \quad \omega s < \omega r, \quad (4.1)$$

где  $\varphi_r(\log x)$  и  $\varphi_s(\log x)$  — ряды по убывающим степеням логарифмов.

## 4. Сложные разложения решений (cont.)

### Теорема 4

Если ряд (4.1) является решением полного уравнения  $f(x, y) = 0$  и  $\omega(1, r) \subset U_j^{(d)}$ , то  $y = \varphi_r x^r$  является решением укороченного уравнения  $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$ .

Для укороченного уравнения, соответствующего вершине, нестепенные решения имеются только в случаях сильного вырождения [3, § 5]. Поэтому ограничимся укорочениями, соответствующими ребрам  $\Gamma_j^{(1)}$ .

## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$

Если ребро  $\Gamma_j^{(1)}$  вертикально, то его нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \lambda\omega(1, 0), \quad \lambda > 0, \quad (4.2)$$

и у всех точек  $Q = (q_1, q_2) \in \Gamma_j^{(1)}$  координата  $q_1$  одинакова.

## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ (cont.)

Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} \hat{f}_j^{(d)}(x, y), \quad (4.3)$$

тогда носитель  $\mathbf{S}(g)$  лежит на координатной оси  $q_1 = 0$ .

Все степенные решения с  $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$  являются постоянными  $y = y^0 = \text{const}$ , где  $y^0$  — корень определяющего уравнения

$$\tilde{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(0, y) = 0. \quad (4.4)$$

## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ (cont.)

Для отыскания нестепенных решений уравнения  $g(x, y) = 0$  сделаем **логарифмическое преобразование**

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \log x. \quad (4.5)$$

Согласно теореме 2.4 из [2, гл. VI] при этом дифференциальная сумма  $g(x, y)$  перейдет в дифференциальную сумму  $h(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$  и уравнение  $g = 0$  примет вид

$$h(\xi, y) = 0. \quad (4.6)$$

Из (4.5) видно, что  $\xi \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow \infty$ , ибо  $\xi$  и  $x$  комплексные, т. е. для уравнения (4.6) получаем задачу с

$$p \geq 0. \quad (4.7)$$

## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ (cont.)

Для уравнения (4.6), применяя описанную выше технику, выделяем укороченные уравнения  $\hat{h}_l^{(d)}(\xi, y) = 0$  с  $\omega = 1$ , находим их степенные решения  $y = c_\rho \xi^\rho$ . Каждому из них соответствуют свои характеристический многочлен и  $\nu^*(k^*)$ , критические числа  $k_j^*$  и свое множество  $\mathbf{K}^*$ . При условии теоремы 3 на  $k_j^*$  и  $\mathbf{K}^*$  находим степенное разложение решения уравнения  $h(\xi, y) = 0$  в виде

$$y = c_\rho \xi^\rho + \sum c_\sigma \xi^\sigma, \quad \sigma \in \mathbf{K}^*, \quad \sigma < \rho, \quad c_\rho, c_\sigma = \text{const} \in \mathbb{C}.$$

## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ (cont.)

Кроме того, решению  $y = c\xi^\rho$  укороченного уравнения  $\hat{h}_l^{(d)}(\xi, y) = 0$  соответствует свое **сложное характеристическое уравнение**  $\mu(\varkappa) = 0$ . Оно образуется так. Вариация

$$\frac{\delta \hat{h}_l^{(d)}}{\delta y} = \sum_{i=1}^M b_i(\xi, y) \mu_i \left( \frac{d}{d\xi} \right),$$

где  $b_i$  — дифференциальные мономы и  $\mu_i$  — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$\mu_i \left( \frac{d}{d\xi} \right) = \sum_{k=0}^{l_i} \alpha_{ik} \frac{d^k}{d\xi^k}, \quad \alpha_{ik} = \text{const} \in \mathbb{C}.$$



## 4.1. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ (cont.)

Выделим из мономов  $b_i(\xi, y)$  те, у которых при подстановке  $y = \xi^\rho$  степень по  $\xi$  будет наибольшая:  $b_i = \beta_i \xi^n + \dots$ ,  $i = 0, \dots, M$ , где  $n$  — наибольшая из этих степеней  $\xi$ , а  $\beta_i = 0$  или const.

**Многочлен**

$$\mu(\varkappa) = \sum_{i=0}^M \beta_i \mu_i(\varkappa),$$

где  $d^k/d\xi^k$  заменены на  $\varkappa^k$ , назовем **сложно-характеристическим** для дважды укороченного решения  $y = c_\rho \xi^\rho$ .

### Теорема 5

Для вертикального ребра, если корни многочленов  $\nu^*(k^*)$  и  $\mu(\varkappa)$  не лежат в множествах  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{K}$  соответственно, то дважды укороченному решению  $y = c_\rho \xi^\rho$  соответствует решение полного уравнения в виде сложного разложения (4.1).

Идея доказательства такая же, как и у теоремы 3.

## 4.2. Наклонное ребро

### Теорема 6

Степенное преобразование

$$y = x^\alpha z \quad (4.8)$$

переводит дифференциальную сумму  $f(x, y)$  в дифференциальную сумму  $g(x, z) = f(x, y)$ . При этом их носители и нормальные конусы испытывают аффинное преобразование

$$\mathbf{S}(g) = \mathbf{S}(f)A,$$

где матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

## 4.2. Наклонное ребро (cont.)

Случай наклонного ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  с нормальным вектором  $(1, r)$  степенным преобразованием (4.8) с  $\alpha = r$  сводится к случаю вертикального ребра  $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$ . Если для него проделать вычисления разделов 3 и 4.1, то получим дважды укороченное решение  $z = c_\rho \xi^\rho$ , а для него характеристический многочлен  $\nu^*(k^*)$  и сложно-характеристический многочлен  $\mu(\varkappa)$ . Из теорем 5 и 6 получаем

### Следствие 2

Для наклонного ребра с нормалью  $(1, r)$ , если корни уравнений  $\nu^*(k^*)$  и  $\mu(\varkappa)$  не лежат в множествах  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{K} - r$  соответственно, то дважды укороченному решению  $z = c_\rho \xi^\rho$  соответствует решение полного уравнения в виде сложного разложения.

## Пример

Для укороченного уравнения (3.9), соответствующего ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  с нормальным вектором  $-(1, 1)$ , делаем степенное преобразование

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.  $y = xz$ . Поскольку  $y' = xz' + z$ ,  $y'' = xz'' + 2z'$ , то уравнение (3.9) после сокращения на  $x$  и приведения подобных принимает вид

$$\hat{g}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 z z'' + x^2 z'^2 - x z z' + b z + d = 0. \quad (4.9)$$

## Пример (cont.)

Его носитель состоит из трех точек  $\tilde{Q}_2 = (0, 2)$ ,  $\tilde{Q}_4 = (0, 1)$ ,  $\tilde{Q}_1 = 0$ , расположенных на оси  $q_1 = 0$ . Теперь делаем логарифмическое преобразование  $\xi = \log x$ . Поскольку  $z' = \dot{z}/x$ ,  $z'' = (\ddot{z} - \dot{z})/x^2$ , где  $\cdot = d/d\xi$ , то уравнение (4.9) после приведения подобных принимает вид

$$h \stackrel{\text{def}}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0. \quad (4.10)$$

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 3 в случае  $bd \neq 0$ .

## Пример (cont.)

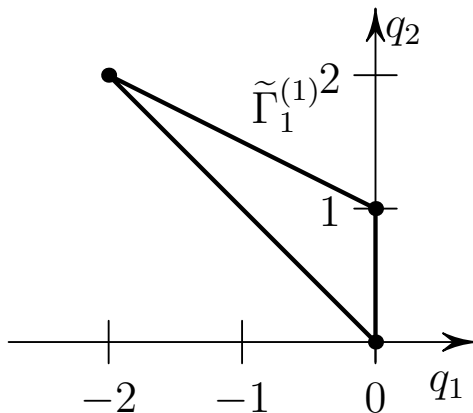


Рис. 3. Носитель и многоугольник уравнения (4.10).

## Пример (cont.)

Рассмотрим случай  $b \neq 0$ . Ребру  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$  рис. 3 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz = 0. \quad (4.11)$$

Оно имеет степенное решение  $z = -b\xi^2/2$ . Ребро  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$  имеет 2 вершины  $(-2, 2)$  и  $(0, 1)$ . Для вершины  $(-2, 2)$  векторы  $M_1 = (2, -1)$  и  $M_2 = (2, -2)$ . Здесь  $r = 2$ . Поэтому  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -2$ ,  $\mathbf{K}^* = \{2 - 2l_1\}$ . Для вершины  $(0, 1)$  векторы  $M_1 = (-2, 1)$  и  $M_2 = (0, -1)$ . Поэтому  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -2$ ,  $\mathbf{K}^* = \{2 - 2l_1\}$ , целые  $l_1 > 0$ . Характеристический многочлен решения  $z = -b\xi^2/2$  есть  $\nu^*(k^*) = (b/2)(k^{*2} - 5k^* + 5) = (b/2)(k^* - 1)(k^* - 4)$ . Поскольку здесь  $r^* = 2$ , то имеется только одно критическое число  $k_1^* = 1 < r^*$ .

## Пример (cont.)

Поскольку оно не лежит в множестве  $\mathbf{K}^*$ , то по теореме 3 уравнение (4.10) имеет решение вида

$$z = -\frac{b}{2}\xi^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-2k}\xi^{-2k}. \quad (4.12)$$

На самом деле, решения уравнения (4.10) имеют вид

$$z = -\frac{b}{2}(\xi + \tilde{c})^2 - \frac{d}{2b}, \quad (4.13)$$

где  $\tilde{c}$  — произвольная постоянная. При  $\tilde{c} = 0$  получим решение (4.12).



## Пример (cont.)

По (4.11) первая вариация

$$\frac{\delta \hat{h}_1^{(1)}}{\delta z} = -\ddot{z} - z \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{z} \frac{d}{d\xi} + b.$$

Поэтому

$$\frac{\delta \hat{h}_1^{(1)}}{\delta z} = b_1 \mu_1 \left( \frac{d}{d\xi} \right) + b_2 \mu_2 \left( \frac{d}{d\xi} \right) + b_3 \mu_3 + b_4 \mu_3,$$

где  $b_1 = -z$ ,  $b_2 = 2\dot{z}$ ,  $b_3 = -\ddot{z}$ ,  $b_4 = b$ ,  $\mu_1 = \frac{d^2}{d\xi^2}$ ,  $\mu_2 = \frac{d}{d\xi}$ ,  
 $\mu_3 = 1$ .

## Пример (cont.)

Поскольку  $\rho = 2$ , то ведущим является слагаемое  $b_1\mu_1$ . Оно дает характеристический многочлен  $\mu_1(x) = x^2$ , который не имеет ненулевых корней. Следовательно, сложно критических чисел нет и применима теорема 5. После степенного преобразования  $y = xz$  и сокращения на  $x$  полное уравнение (2.6) переходит в

$$g \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 z z'' + x^2 z'^2 - x z z' + bz + d + ax^2 z^3 + cx^4 z^4 = 0. \quad (4.14)$$

Множество  $\mathbf{K}$  состоит из всех четных натуральных чисел. По теореме 3 решение уравнения (4.14) имеет вид

$$z = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(\xi) x^{2k},$$

где  $\varphi_0$  дается формулой (4.13) и  $x \rightarrow 0$ . ■

1. Введение

2. Выделение ведущих членов

3. Степенные разложения решений

4. Сложные разложения решений

**5. Экспоненциальные разложения решений**

6. Обобщения

7. Приложения

Литература

## Экспоненциальные разложения решений

Пусть укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0$  соответствует горизонтальному ребру  $\Gamma_j^{(1)}$  многоугольника  $\Gamma(f)$ . Следовательно, на этом ребре  $q_2 = m \in \mathbb{N}$ . Согласно [3, § 5] сделаем логарифмическое преобразование

$$\zeta = d \log y / dx \quad (5.1)$$

и из укороченного уравнения  $\hat{f}_j^{(1)} = 0$  получим уравнение

$$h(x, \zeta)y^m \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0 \quad (5.2)$$

где  $h(x, \zeta)$  — дифференциальная сумма [2, гл. VI].

## Экспоненциальные разложения решений (cont.)

Пусть  $\Gamma(h) = \tilde{\Gamma}$  — ее многоугольник и  $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$  — его ребро с внешней нормалью  $\tilde{N} = (1, \rho)$ , лежащей в конусе задачи  $\mathcal{K}_\omega = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0, \text{sgn } \tilde{p}_1 = \omega\}$ . Этим определяется знак  $\omega$  и направление стремления  $x$  (к нулю или бесконечности). Ребру  $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{h}_i^{(1)}(x, \zeta) = 0$ , которое является алгебраическим и имеет несколько степенных решений  $\zeta = \gamma^* x^\rho$ , где  $\gamma = \gamma^* = \text{const}$  — один из корней определяющего уравнения  $\hat{h}_i^{(1)}(1, \gamma) = 0$ . Каждое степенное решение  $\zeta = \gamma^* x^\rho$  укороченного уравнения  $\hat{h}_i^{(1)}(x, \zeta) = 0$  единственным образом продолжается в степенное разложение

$$\zeta = \gamma^* x^\rho + \sum \gamma_\sigma x^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x) \quad (5.3)$$

решения полного уравнения  $h(x, \zeta) = 0$ .

## Экспоненциальные разложения решений (cont.)

Первую вариацию запишем в виде

$$\frac{\delta \hat{f}_j^{(1)}}{\delta y} = y^{m-1} g \left( x, \zeta, \frac{d}{dx} \right), \quad (5.4)$$

где  $g$  — многочлен от своих аргументов, если под  $\left( \frac{d}{dx} \right)^l$  понимать  $\frac{d^l}{dx^l}$ . Его степень по  $\zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(n-1)}$  не превосходит  $m - 1$ .

Теперь в операторе  $g$  заменим  $\frac{d^l}{dx^l}$  на  $k^l \zeta^l$ , затем  $\zeta$  на  $\gamma^* x^\rho$  и выделим ведущий член  $\lambda(\gamma^*, k) x^\tau$  по  $x$ . Коэффициент  $\lambda(\gamma^*, k)$  является **экспоненциально характеристическим многочленом**, соответствующим укороченному решению  $\zeta = \gamma^* x^\rho$ .

## Экспоненциальные разложения решений (cont.)

Если уравнение  $h(x, \zeta) = 0$  имеет решение вида (5.3), то укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0$  имеет семейство решений

$$y = c \exp \varphi(x) \quad (5.5)$$

где  $c$  — произвольная постоянная и  $\varphi(x)$  — интеграл от степенного разложения (5.3).

Теперь перейдем к полному уравнению  $f(x, y) = 0$ . Пусть множество  $\Sigma$  — проекция носителя  $\mathbf{S}(f)$  на ось  $q_2$  параллельно оси  $q_1$ . Положим  $\Sigma' = \Sigma - m$ , т.е.  $\Sigma'$  — это сдвинутое на  $m$  множество  $\Sigma$ . Наконец,  $\Sigma'_+$  — это множество всевозможных сумм чисел множества  $\Sigma'$ .

## Экспоненциальные разложения решений (cont.)

### Теорема 7

Пусть  $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$  — укороченное уравнение для  $f(x, y) = 0$ , соответствующее горизонтальному ребру высоты  $m$ . Если ни одно из чисел  $k \in \Sigma'_+ + 1$ ,  $k \neq 1$  не является корнем экспоненциально характеристического многочлена  $\lambda(\gamma^*, k)$ , то решения (5.5) укороченного уравнения  $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$  продолжаютя в виде экспоненциального разложения

$$y = c \exp \varphi(x) + \sum b_k(x) c^k \exp(k\varphi(x)) \quad \text{по } k \in \Sigma'_+ + 1, \quad k \neq 1, \quad (5.6)$$

решений полного уравнения  $f(x, y) = 0$ , где  $b_k(x)$  — степенные разложения.



## Пример

Рассмотрим четвертое уравнение Пенлеве

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4(x^2 - a)y^2 + 2b = 0, \quad (5.7)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные параметры. При  $b = 0$ , его многоугольник  $\Gamma(f)$  имеет горизонтальное ребро  $\Gamma_1^{(1)}$  высоты  $m = 2$  (рис. 4), которому соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + (y')^2 + 4(x^2 - a)y^2 = 0.$$

## Пример (cont.)

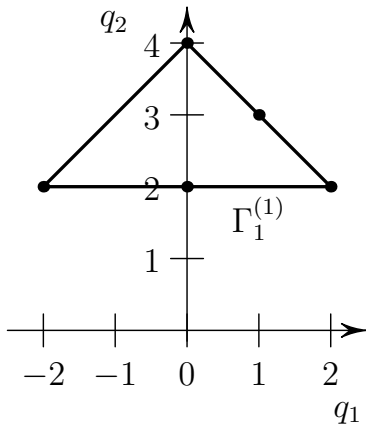


Рис. 4. Носитель и многоугольник уравнения (5.7) с  $b = 0$ .

## Пример (cont.)

После логарифмического преобразования (5.1) получаем

$$h(x, \zeta) = -2(\zeta' + \zeta^2) + \zeta^2 + 4x^2 - 4a.$$

Носитель  $S(h)$  и многоугольник  $\Gamma(h)$  см. на рис. 5.

## Пример (cont.)

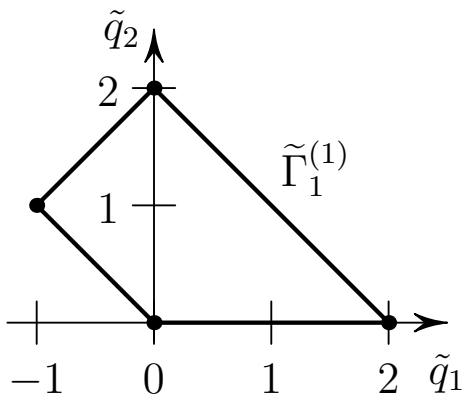


Рис. 5. Носитель и многоугольник для  $h(x, \zeta)$ .

## Пример (cont.)

$\Gamma(h)$  имеет наклонное ребро  $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ , соответствующее  $\omega = 1$ , с укорочением

$$\hat{h}_1^{(1)}(x, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} -\zeta^2 + 4x^2 = 0,$$

откуда  $\zeta = \pm 2x$ , т. е.  $\gamma^* = \pm 2$  и  $\rho = 1$ . По теореме 3 уравнение  $h(x, \zeta) = 0$  имеет два решения

$$\zeta_i = (-1)^i 2x + \alpha_i x^{-1} + \beta_i x^{-3} + x^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} c_{i,l} x^{-2l} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'_i(x), \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha_i = (-1)^i a - 1, \quad \beta_i = (-1)^{i+1} (a^2 + 3) + 4a.$$

Если одно из этих чисел  $\alpha_i, \beta_i$  равно нулю, то соответствующее разложение  $\varphi'_i(x)$  конечно.

## Пример (cont.)

Вычислим экспоненциально характеристический многочлен.

$$\begin{aligned}\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta y} &= -2y'' - 2y \frac{d^2}{dx^2} + 2y' \frac{d}{dx} + 8(x^2 - a)y = \\ &= y \left[ -2(\zeta' + \zeta^2) - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 2\zeta \frac{d}{dx} + 8(x^2 - a) \right]. \quad (5.8)\end{aligned}$$

Заменяем  $\frac{d^2}{dx^2}$  и  $\frac{d}{dx}$  на  $k^2\zeta^2$  и  $k\zeta$  соответственно, а  $\zeta$  — на  $\gamma^*x$ .

Тогда ведущий член при  $x \rightarrow \infty$  есть

$$-2\zeta^2 - 2k^2\zeta^2 + 2k\zeta^2 + 8x^2 = -2\zeta^2(k^2 - k).$$

## Пример (cont.)

Следовательно, экспоненциально характеристический многочлен  $\lambda(\gamma^*, k) = -2(k^2 - k)$  для обоих значений  $\gamma^* = \pm 2$ . Множество  $\Sigma$  состоит из чисел 2, 3, 4; поэтому  $\Sigma' = \Sigma - 2 = \{0, 1, 2\}$  и  $\Sigma'_+$  — это все неотрицательные целые числа, а  $\Sigma'_+ + 1$  — это все натуральные числа. Корни многочлена  $\lambda(\gamma^*, k)$  суть  $k = 0$  и  $k = 1$ . Поскольку корень  $k = 0$  не лежит в множестве  $\Sigma'_+ + 1$  и  $k = 1$  исключено, то по теореме 7 при  $x \rightarrow \infty$  решения уравнения (5.7) с  $b = 0$  разлагаются в ряды

$$y = c \exp \varphi_i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} c^k \exp k\varphi_i(x), \quad i = 1, 2,$$

где  $\varphi_i = (-1)^i x^2 + \alpha_i \log x - \beta_i x^{-2} / 2 - \sum_{l=2}^{\infty} c_{i,l} x^{-2l} / (2l)$ ,  $i = 1, 2$ .

Экспоненциальные разложения предложил В.П.Варин [11].

## 6. Обобщения

1. Эта техника использовалась для алгебраических уравнений [1, 2, 28], уравнений в частных производных [1, 2, 18] и систем [1, 2, 15].
2. Изучались решения в виде разложений по комплексным степеням независимой переменной [3, 13]. Тогда получается новый тип разложений: экзотические [12, 5].
3. Изучались асимптотические разложения таких решений, у которых разница порядков двух соседних производных отлична от 1 [1, 16, 17, 20].
4. В теореме 3 можно отказаться от условия, что критические числа не лежат в множестве  $\mathbf{K}$ . Тогда получаются степенно-логарифмические разложения [3]. Аналогично, в теореме 5 получаются разложения с кратными логарифмами [8].



## 7. Приложения

- Решения уравнений Пенлеве [5, 14, 16, 17, 18, 19, 20].
- Уравнение Белецкого [21, 22].
- Уравнения Эйлера-Пуассона [23].
- Ограниченная задача трех тел [24, 25, 26].
- Интегрируемость системы ОДУ [27].
- Пограничный слой на игле [1, 14, 15, 18].
- Эволюция турбулентного потока [18].
- Множества устойчивости многопараметрической системы ОДУ [28].
- Волны на воде [2, гл. V].

## Литература

1. *Bruno A. D.* Asymptotic Solving Nonlinear Equations and Idempotent Mathematics. — Keldysh Institute preprints, 2013, No. 56, 31 p.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_56\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_56_eng.pdf)
2. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с.
3. *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. — 2004. — Т. 59, № 3. — С. 31–80.
4. *Тихомиров В. М.* Фреше дифференциал // Мат. энциклопедия, Т. 5, С. 664–665. — М.: Изд-во Советская энциклопед., 1985.
5. *Брюно А. Д., Горючкина И. В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО. — 2010. — Т. 71. — С. 6–118.
6. *Брюно А. Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 36. М. — 2005. — 16 с.
7. *Брюно А. Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. — 2006. — Т. 406, № 6. — С. 730–733.

## Литература (cont.)

8. Брюно А. Д. О сложных разложениях решений ОДУ // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 15. М. — 2011. — 26 с.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_15.pdf](http://keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_15.pdf)
9. Брюно А. Д. Экспоненциальные разложения решений ОДУ // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 36. М. — 2011. — 16 с.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_36.pdf](http://keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_36.pdf)
10. Брюно А. Д. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. — 2012. — Т. 443, № 5. — С. 259–264.
11. Варин В. П. Плоские разложения решений ОДУ вблизи особенности. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 64. М. — 2010. — 12 с.
12. Брюно А. Д. Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. — 2007. — Т. 416, № 5. — С. 583–587.
13. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Сходимость степенных разложений решений ОДУ // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 94. М. — 2013. — 16 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_94.pdf](http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_94.pdf)
14. Брюно А. Д., Парусникова А. В. Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН. — 2011. — Т. 438, № 4. — С. 439–443.
15. Брюно А. Д., Шадрин Т. В. Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды Московского матем. об-ва. — 2007. — Т. 68. — С. 224–287.

## Литература (cont.)

16. Брюно А. Д. Степенно-эллиптические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ЖВММФ. — 2012. — Т. 51, № 12. — С. 2206–2218.
17. Bruno A. D. Power Geometry and elliptic expansions of solutions to the Painlevé equations // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 88. М. — 2013. — 28 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_88\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_88_eng.pdf)
18. Брюно А. Д. Степенная геометрия в дифференциальных уравнениях // Современные проблемы математики и механики. — 2009. — Т. IV, вып. 2. — М.: Изд-во МГУ. — С. 24–54.
19. Брюно А. Д., Парусникова А. В. Разложения и асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве вблизи бесконечности // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 61. М. — 2012. — 32 с.
20. Bruno A. D. Regular asymptotic expansions of solutions to one ODE and  $P_1$ - $P_5$  // Painleve Equations and Related Topics (Eds. A.D. Bruno and A.V. Batkhin), De Gruyter, Berlin/Boston, 2012. P. 67–82.
21. Брюно А. Д. Семейства периодических решений уравнения Белецкого // Космические исследования. — 2002. — Т. 40, № 3. — С. 295–316.

## Литература (cont.)

22. *Bruno A. D., Varin V. P.* Classes of families of generalized periodic solutions to the Beletsky equation // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2004. — V. 88, No 4. — P. 325–341.
23. *Брюно А. Д.* Анализ уравнений Эйлера-Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // *ПММ*. — 2007. — Т. 71, № 2. — С. 192–226.
24. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. — М.: Наука. — 1990. — 296 с.
25. *Брюно А. Д., Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // *ПММ*. — 2007. — Т. 71, № 6, С. 1034–1066.
26. *Bruno A. D., Varin V. P.* Periodic solutions of the restricted three body problem for small  $\mu$  and the motion of small bodies of the Solar system // *Astronomical and Astrophysical Transactions (AApTr)*. — 2012. — V. 27, Issue 3. — P. 479–488.
27. *Брюно А. Д., Еднерал В. Ф.* Алгоритмический анализ локальной интегрируемости // *ДАН*. — 2009. — Т. 424, № 3. — С. 307–310.

## Литература (cont.)

28. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. матем. и мех. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80–133.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ