Вычисление особенностей и аффинная нормализация параметрического семейства алгебраических многообразий

Computation of Singularities and Affine Normalization of a Parametric Family of Algebraic Varieties

А. Б. Батхин
(совместно с А. А. Азимзода, СамГУ)

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН; МФТИ

18 ноября 2026 г.

Аннотация

Исследуется семейство вещественных алгебраических многообразий, возникающее как компонента дискриминантного множества характеристического многочлена параметрической линейной гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы. Прямое вычисление параметрического базиса Грёбнера идеала особенностей оказывается практически затруднительным. Предлагается вычислительная схема, сочетающая стандартные базисы Грёбнера, исключение переменных, редукцию по идеалам и сатурацию. Вычислены особые точки и кривые особенностей; построено невырожденное аффинное преобразование, приводящее многообразие к нормальной форме, не зависящей от параметра. Получена рациональная параметризация линейчатой части, доказана её развертываемость и найдена огибающая.

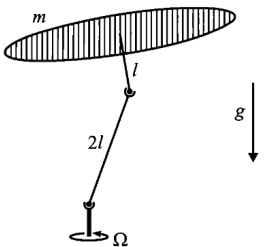
Структура доклада

1. Постановка задачи

2. Аффинная нормализация

3. Геометрия многообразия

Исходная задача: два связанных волчка Лагранжа



Исходная модель

$$M\ddot{\mathbf{q}} + G\dot{\mathbf{q}} + R\mathbf{q} = 0, \qquad \mathbf{q} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)^T$$

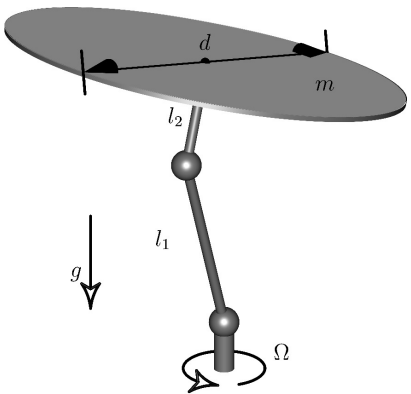
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & -q-2 & 0 \\ 0 & a & 0 & -q-2 \\ -q-2 & 0 & q-s & 0 \\ 0 & -q-2 & 0 & q-s \end{pmatrix}, \quad a = p + q - 2s - 4$$

Допущения исходной модели

- Упругие силы в первом приближении подчиняются закону Гука
- Массы стержней и шарниров пренебрежимо малы
- Радиусы стержней и высота диска пренебрежимо малы

Возмущённая механическая модель



- Стержни: массивные цилиндры длины 2ℓ и ℓ
- Диск: тонкий массивный цилиндр
- Радиусы стержней и высота диска выражаются через r
- Малый параметр:

$$\varepsilon = \frac{r}{\ell}, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

- Массы стержней пропорциональны их объёмам

От лагранжевой к гамильтоновой системе

1. Выполняется разложение лагранжиана в окрестности вертикального положения равновесия до квадратичного порядка
2. Получается расщепление на независимые подсистемы с 4 и 2 степенями свободы (вторая исследуется тривиально)
3. Для основной подсистемы:

$$M(\varepsilon)\ddot{\mathbf{X}} + G(\varepsilon)\dot{\mathbf{X}} + R(\varepsilon)\mathbf{X} = 0.$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = JA(\mathbf{P})\mathbf{Z}, \quad A = A^T \in \mathbb{R}^{8\times 8}, \quad \mathbf{P} = (p, q, s, \varepsilon).$$

Принцип вычислений

Учитывается возмущение, полученное в первом порядке по малому параметру ε, далее исследуется соответствующее параметрическое алгебраическое семейство.

От собственных значений к дискриминантному многообразию

$$\chi(\lambda) = \boldsymbol{f}(\lambda^2), \qquad \boldsymbol{f}(\mu) = \mu^4 + \boldsymbol{f}_1(\varepsilon)\mu^3 + \boldsymbol{f}_2(\varepsilon)\mu^2 + \boldsymbol{f}_3(\varepsilon)\mu + \boldsymbol{f}_4(\varepsilon), \qquad \mu = \lambda^2$$

$$\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}) : D_\mu(\boldsymbol{f}) = 0\}$$

- Кратные корни полухарактеристического многочлена определяют дискриминантное многообразие
- Факторизация дискриминанта выделяет две алгебраические компоненты
- Из-за блочно-скалярной структуры матриц $M(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)$ определитель гамильтоновой матрицы JA является полным квадратом: множество параметров $\mathbf{P}$ нулевого корня не даёт самостоятельной части границы устойчивости

Исследуемая компонента $\mathcal{G}(\varepsilon)$

Выделение основного объекта

Дискриминант содержит кратный множитель; основная нетривиальная компонента задаётся уравнением $g(p, q, s, \varepsilon) = 0$

$$g(p, q, s, \varepsilon) = \sum_{k=3}^{6} g_k(p, q, s; \varepsilon), \quad \deg_{p,q,s} g_k = k.$$

$$g_3 = 2048(1+5\varepsilon)^3\big(p+q-2(1-6\varepsilon)s\big)^3,\ g_6 = -\xi(\varepsilon)^2\, g_6'(\varepsilon)\big(g_6''(\varepsilon)\big)^2, \quad \xi^2 = 4+32\varepsilon-1621\varepsilon^2$$

Вычислительные трудности

Формы g_4, g_5 и множители g_6 громоздки; полные таблицы коэффициентов приведены в статье

Переход от устойчивости к геометрии особенностей

$$\mathcal{G}(\varepsilon) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ g(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0\right\}, \qquad \mathbf{x} = (p, q, s).$$
$$\operatorname{Sing} \mathcal{G}(\varepsilon) = \{g = g_p = g_q = g_s = 0\}.$$

- $\mathcal{G}(\varepsilon)$ разделяет пространство параметров на области с различной структурой корней $f(\mu)$
- Для малого ε исследуется сохранение структуры особого множества и смещение его компонент
- Основная цель: получить преобразование, устраняющее зависимость нормальной формы от ε

Что не делаем

Напрямую параметрический базис Грёбнера всего идеала $\langle g, g_p, g_q, g_s \rangle$ не вычисляется!

Аффинная эквивалентность: целевая постановка

Определение

Семейство $\mathcal{G}(\varepsilon)$ аффинно эквивалентно $\mathcal{G}(0)$, если существует невырожденное аффинное отображение Φ_ε такое, что

$$\boxed{g_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon = c(\varepsilon) g_0, \quad c(\varepsilon) \neq 0.}$$

$$\varepsilon \in I = [0, \varepsilon_*), \quad \varepsilon_* = \frac{16 + 2\sqrt{1685}}{1621} \approx 0.06051666,$$

$$\xi(\varepsilon) = \sqrt{4 + 32\varepsilon - 1621\varepsilon^2} > 0.$$

- Вместо отдельного вычисления геометрии для каждого ε строится единое преобразование Φ_ε

Особые точки второго порядка: десять уравнений

$$\mathfrak{S}^{(2)} = \langle g,\ g_p, g_q, g_s,\ g_{pp}, g_{pq}, g_{ps}, g_{qq}, g_{qs}, g_{ss} \rangle \subset \mathbb{K}(\varepsilon)[p, q, s].$$

1. Вычисляется лексикографический базис Грёбнера ($s \prec q \prec p$)
2. Проверяется нульмерность идеала
3. Выделяется и факторизуется унивариантный многочлен по s
4. Вычисляется радикал и проверяется полнота решения

Результат

Четыре точки второго порядка $\mathbf{Q}_1(\varepsilon), \ldots, \mathbf{Q}_4(\varepsilon)$.

Универиантная факторизация

$$\mathfrak{s}^{(2)}(s) = \left(\mathfrak{s}_1^{(2)}\right)^3 \left(\mathfrak{s}_2^{(2)}\right)^3 \left(\mathfrak{s}_3^{(2)}\right)^3,$$

$$\mathfrak{s}_1^{(2)} = s, \qquad \mathfrak{s}_2^{(2)} = a_s(\varepsilon)s + b_s^*(\varepsilon), \qquad \mathfrak{s}_3^{(2)} = a_s(\varepsilon)^2 s^2 + 2b_s(\varepsilon)s + c_s(\varepsilon).$$

- Два линейных и один квадратичный множитель дают четыре точки
- Повторное вычисление базисов при разных порядках позволяет получить более удобные координаты точек
- Для дальнейшей работы вводятся промежуточные переменные $(P, Q, S) = \Psi_\varepsilon(p, q, s$

Почему метод вычисления «в лоб» не работает?

$$\mathfrak{S}^{(1)} = \langle g, g_p, g_q, g_s \rangle.$$

Прямой подход

Вычисляется параметрический базис Грёбнера идеала положительной размерности с коэффициентами, зависящими от ε

Вычислительное препятствие

Высокая сложность элиминации и рост промежуточных выражений

Используемая стратегия

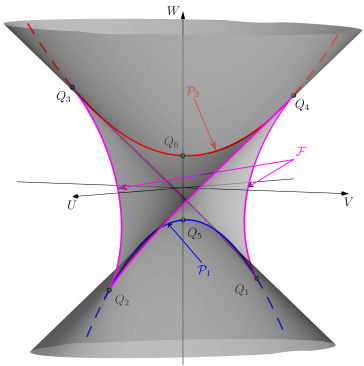
Опорные особые точки $\longrightarrow$ гипотеза о плоских параболах $\longrightarrow$ нулевые остатки деления $\longrightarrow$ проверка по идеалам

Преимущество

Уменьшение числа неизвестных и структурирование задачи

Гипотеза о двух параболах особенностей

- $\mathcal{P}_1(\varepsilon)$ проходит через $\mathbf{Q}_1(\varepsilon), \mathbf{Q}_2(\varepsilon)$
- $\mathcal{P}_2(\varepsilon)$ проходит через $\mathbf{Q}_3(\varepsilon), \mathbf{Q}_4(\varepsilon)$
- Каждая кривая ищется как пересечение плоскости и квадрики
- Проверяется, что уравнения из $\mathfrak{S}^{(1)}$ равны нулю по модулю предполагаемого идеала параболы



Геометрия нормальной формы (ориентир)

Пучок плоскостей и шаблон параболы

1. Строится пучок плоскостей через $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$; параметр λ
2. Вводятся локальные координаты (u, v) на плоскости
3. Парабола ищется в форме

$$\boxed{\varphi(u, v) = u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2 - u + A_{01}v.}$$

$$\mathcal{H}_j(u, v; \lambda, \varepsilon) = S_j(X(u, v; \lambda, \varepsilon)), \quad S_j \in \mathfrak{S}^{(1)}.$$

$$\operatorname{rem}_\varphi \mathcal{H}_j \equiv 0 \quad \text{для всех } j.$$

Ключевая замена задачи

Вместо идеала по p, q, s получаем условия на $\lambda, A_{11}, A_{02}, A_{01}$.

Поэтапная редукция коэффициентов

1. Из коэффициентов остатков составляется идеал $\mathfrak{J}_1[\lambda, A_{11}, A_{02}, A_{01}]$ из 28 многочленов
2. Из подмножеств полиномов по 1--2 неизвестным вычисляется НОД: последовательно находятся A_{01}, затем λ, A_{11}, затем A_{02}
3. По найденным коэффициентам восстанавливаются плоскость $\ell_1 = 0$ и квадрика $\mathcal{P}_1 = 0$

$$\boxed{\mathfrak{P}_1(\varepsilon) = \langle \ell_1, \mathcal{P}_1 \rangle, \qquad \mathsf{NF}_{\mathfrak{P}_1}(S_j) = 0.}$$

Вторая парабола

Для $\mathcal{P}_2(\varepsilon)$ аналогичная схема, с упрощениями в алгебраическом расширении, содержащем $\xi(\varepsilon)$

Результат: два идеала парабол

$$\mathfrak{P}_1(\varepsilon) = \langle \ell_1(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}; \varepsilon), \mathcal{P}_1(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}; \varepsilon) \rangle,$$
$$\mathfrak{P}_2(\varepsilon) = \langle \ell_2(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}; \varepsilon), \mathcal{P}_2(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}; \varepsilon) \rangle.$$

- Параболы лежат в особом множестве: $\mathfrak{S}^{(1)} \subseteq \mathfrak{P}_i$ (проверка нулевыми нормальными формами)
- Это даёт явные компоненты особого множества, но само по себе ещё не доказывает их полноту
- Полнота будет получена из известной структуры $\mathcal{G}(0)$ и аффинной эквивалентности

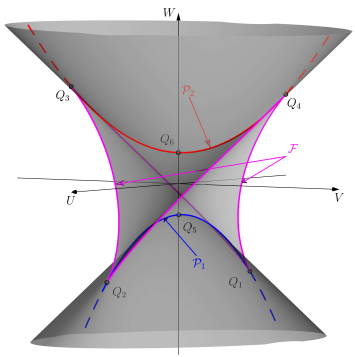
Дополнительные точки и линейчатая структура

- $\mathbf{Q}_5 \in \mathcal{P}_1$, $\mathbf{Q}_6 \in \mathcal{P}_2$
- Прямые через $\mathbf{Q}_{3,4}$ и $\mathbf{Q}_5$, а также через $\mathbf{Q}_{1,2}$ и $\mathbf{Q}_6$, принадлежат $\mathcal{G}(\varepsilon)$
- Подставляется уравнение пробной прямой $\ell(t, w)$ в g: коэффициенты при всех степенях w должны исчезнуть

$$g(\ell(t, w), \varepsilon) = \sum_{j=0}^{6} a_j(t, \varepsilon) w^j,$$

$$\gcd(a_0, \ldots, a_6) \sim (t + 2 + 10\varepsilon)^2$$

$$t(\mathbf{Q}_5) = -2 - 10\varepsilon.$$



Аффинное преобразование по трём парам точек

$$(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) \longmapsto ((-1, 0, -3), (1, 0, -3)),$$
$$(\mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4) \longmapsto ((0, -1, 3), (0, 1, 3)),$$
$$(\mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_6) \longmapsto ((0, 0, -1), (0, 0, 1)).$$

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{Q}_{2j} - \mathbf{Q}_{2j-1}, \quad \Delta = (\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{d}_3), \quad \det\Delta \neq 0.$$

- Дополнительно: два условия компланарности векторов, соединяющих середины отрезков
- Первая и вторая пары переходят в координатные плоскости; третья --- на вертикальную ось
- Преобразование в исходных переменных есть композиция $\Phi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1} \circ \Theta_\varepsilon$

В новых координатах параболы не зависят от ε

$$\mathfrak{P}_1 = \langle V,\ 2U^2 + W + 1\rangle, \qquad \mathfrak{P}_2 = \langle U,\ 2V^2 - W + 1\rangle.$$

$$\boxed{\mathcal{P}_1:\ (U, V, W) = (t, 0, -2t^2 - 1),}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_2:\ (U, V, W) = (0, v, 2v^2 + 1).}$$

Следствие

Расположение всех шести опорных точек и двух парабол становится универсальным: оно одинаково для всех $\varepsilon \in I$

Нормальная форма $g(U, V, W)$

$$\begin{aligned} g(U,V,W) = {} & 64U^6 + 192U^4V^2 + 192U^2V^4 + 64V^6 - 4U^4W^2 - 8U^2V^2W^2 - 4V^4W^2 \\ & + 72U^4W - 72V^4W - 4U^2W^3 + 4V^2W^3 + 60U^4 - 312U^2V^2 + 60V^4 \\ & + 20U^2W^2 + 20V^2W^2 - W^4 + 36U^2W - 36V^2W + 12U^2 + 12V^2 + 2W^2 - 1 \end{aligned}$$

Нормальная форма семейства

После невырожденного аффинного преобразования полученный многочлен не зависит от ε

Основная лемма: аффинная эквивалентность

Лемма (об аффинной эквивалентности)

Для $\varepsilon \in I$ аффинное отображение

$$\Phi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1} \circ \Theta_\varepsilon$$

невырождено и выполняется тождество

$$\boxed{g\big(\Phi_\varepsilon(U, V, W); \varepsilon\big) = c(\varepsilon)\, g(U, V, W; 0), \quad c(\varepsilon) \neq 0.}$$

Следовательно, $\mathcal{G}(\varepsilon)$ и $\mathcal{G}(0)$ аффинно изоморфны.

- Проверка: якобианы преобразований и тождественная редукция полиномов
- Дальнейшая геометрия переносится с уже исследованного $\mathcal{G}(0)$

Две параболы и семейство соединяющих прямых

Построение линейчатой компоненты

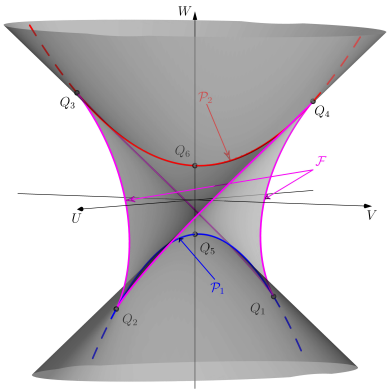
Берутся точки двух направляющих парабол с параметрами t, v и проводится соединяющая их прямая с параметром w

$$U = tw, \qquad V = v(1-w),$$
$$W = 2v^2 + 1 - (2t^2 + 2v^2 + 2)w$$

Результат подстановки в $g(U, V, W)$

Коэффициенты многочлена по w имеют общий множитель $16(t^2 + v^2 - 1)$

$$\boxed{t^2 + v^2 = 1}$$



Рациональная параметризация линейчатой поверхности

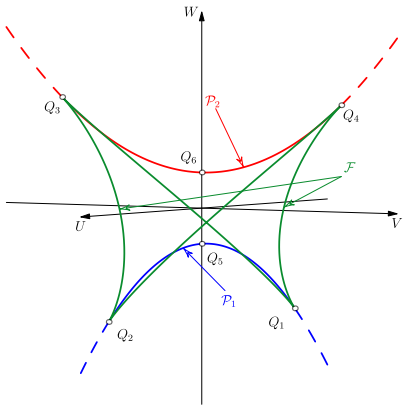
Рациональная параметризация окружности

$$t = -\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \qquad v = \frac{\zeta^2-1}{1+\zeta^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U &= -\frac{2\zeta w}{1+\zeta^2}, \\ V &= \frac{\zeta^2-1}{1+\zeta^2}(w+1), \\ W &= 4w + \frac{3\zeta^4 - 2\zeta^2 + 3}{(1+\zeta^2)^2} \end{aligned}}$$

- $w = -1$: сегмент $\mathcal{P}_1(0)$; $w = 0$: сегмент $\mathcal{P}_2(0)$
- Элиминация ζ, w восстанавливает уравнение $g(U, V, W) = 0$

Структура вещественного многообразия $\mathcal{G}(0)$



Двумерная компонента

Образ рациональной параметризации $\mathbf{R}(\zeta, w)$ представляет собой линейчатую поверхность $\mathcal{R}$

Дополнение к образу

Четыре внешние ветви парабол $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ при $|t| > 1$ и $|v| > 1$

- Замыкание образа **R** задается многочленом g
- Вещественная картина требует учитывать одномерные ветви

Развертываемость линейчатой поверхности

Критерий

Для поверхности $\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\mathbf{X}(u)$ развертываемость проверяется равенством

$$\boxed{\det(\boldsymbol{\alpha}', \mathbf{X}, \mathbf{X}') = 0}$$

Для направляющих кривых $\mathbf{C}_1(\zeta), \mathbf{C}_2(\zeta)$, задающих образующие,

$$\mathbf{R}(\zeta, w) = \mathbf{C}_1(\zeta) + w\big(\mathbf{C}_2(\zeta) - \mathbf{C}_1(\zeta)\big), \quad \boxed{\det\big(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1', \mathbf{C}_2'\big) \equiv 0}$$

Проверка компьютерной алгеброй

После подстановки рациональных параметризаций определяется тождественный нуль числителя определителя

Ребро возврата — третья кривая особенностей

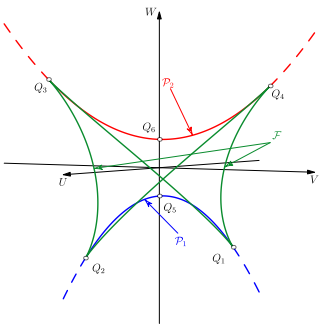
Условие огибающей

$$\mathbf{R}_\zeta \times \mathbf{R}_w = 0, \qquad \gcd\{(\mathbf{R}_\zeta \times \mathbf{R}_w)_j\} = 2w(1+\zeta^2)^2 + 8\zeta^2, \qquad \boxed{w = -\frac{4\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}}$$

Параметризация $\mathcal{F}(0)$

$$U = \left(\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}\right)^3, \; V = \left(\frac{\zeta^2-1}{1+\zeta^2}\right)^3,$$

$$W = \frac{3\zeta^4 - 18\zeta^2 + 3}{(1+\zeta^2)^2}$$



Ребро возврата

Элиминация параметра ζ

$$\mathfrak{F}(0) = \langle 12U^2 + 12V^2 - W^2 - 3,\ W^3 - 216V^2 + 9W^2 + 27W + 27 \rangle$$

Лемма 2 (геометрическое содержание)

Образ $\mathbf{R}(\zeta, w)$ является двумерной развертывающейся линейчатой частью $\mathcal{G}(0)$, а кривая $\mathcal{F}(0)$ — ее ребром возврата
Дополнение образа в вещественном $\mathcal{G}(0)$ образовано четырьмя внешними ветвями парабол $\mathcal{P}_1(0)$ и $\mathcal{P}_2(0)$

- На $\mathcal{F}(0)$ имеются четыре cusp-точки, совпадающие с $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_4$

Полнота особого множества: последовательная сатурация

$$\mathfrak{S}^{(1)}(0) = \langle g, g_U, g_V, g_W \rangle$$

Шаг 1: исключается кривая $\mathcal{F}(0)$

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{S}^{(1)}(0) : \mathfrak{F}(0)^\infty = \langle UV, 2U^3 + WU + U, 2V^3 - VW + V, \\ -2WU^2 + 2V^2W + 2U^2 + 2V^2 - W^2 + 1 \rangle$$

Шаг 2: исключается $\mathcal{P}_2(0)$

$$\mathfrak{I}_1 : \mathfrak{P}_2(0)^\infty = \langle V,\ 2U^2 + W + 1 \rangle = \mathfrak{P}_1(0)$$

$$\mathfrak{P}_1(0) : \mathfrak{P}_1(0)^\infty = \langle 1 \rangle$$

Полнота найденных особенностей

Результат

$$\boxed{\operatorname{Sing} \mathcal{G}(0) = \mathcal{P}_1(0) \cup \mathcal{P}_2(0) \cup \mathcal{F}(0)}$$

Особые точки второго порядка $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_4$ являются точками пересечения найденных кривых

- Последовательная сатурация исключает существование других компонент
- Обратное включение проверяется редукцией g, g_U, g_V, g_W по пересечению $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{F}$
- По аффинной эквивалентности эта структура переносится на $\mathcal{G}(\varepsilon)$

Структура корней полухарактеристического многочлена

Множество	**Кратности корней** $\chi(\mu)$
$\mathcal{R}$ (общая точка)	Один двукратный корень и два простых
$\mathcal{P}_1(0)$	Один трёхкратный и один простой
$\mathcal{P}_2(0)$	Два двукратных корня
$\mathcal{F}(0)$	Один трёхкратный и один простой
$\mathbf{Q}_1$	$\chi(\mu) = (\mu+1)^4$
$\mathbf{Q}_2$	$\chi(\mu) = \mu^3(\mu+4)$
$\mathbf{Q}_{3,4}$	$\chi(\mu) = (4\mu+1)^4/256$

Следствие

Кратности на всех стратах определяются рациональными параметризациями и проверяются символически

Заключение. Основная теорема

Теорема

Пусть $\varepsilon \in I$, где $\xi(\varepsilon) > 0$, а аффинное отображение $\Phi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1} \circ \Theta_\varepsilon$ невырождено Тогда Φ_ε задаёт аффинный изоморфизм вещественных алгебраических множеств $\mathcal{G}(0)$ и $\mathcal{G}(\varepsilon)$. В частности, $\mathcal{G}(\varepsilon)$ состоит из развертывающейся линейчатой поверхности

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \{\Phi_\varepsilon(\mathbf{R}(\zeta, w)) : \ \zeta, w \in \mathbb{R}\}$$

и четырёх внешних ветвей парабол

$$\mathcal{P}_1^{\text{ext}}(0) = \{(t, 0, -2t^2 - 1) : |t| > 1\}, \mathcal{P}_2^{\text{ext}}(0) = \{(0, v, 2v^2 + 1) : |v| > 1\}$$

образы которых задаются отображением Φ_ε

$$\text{Sing}\, \mathcal{G}(\varepsilon) = \mathcal{P}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_2(\varepsilon) \cup \mathcal{F}(\varepsilon),$$

причём $\mathbf{Q}_j(\varepsilon)$, $j = 1, \ldots, 4$, являются особыми точками второго порядка

Литература I

- *Батхин А. Б.* — Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. — // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8—21.
- *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.*, *Варин В. П.* — Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. — // ПММ. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80—133.
- *Майлыбаев А. А.*, *Сейранян А. П.* — Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. — М. : Физматлит, 2009. — 400 с.
- *Брюно А. Д.*, *Батхин А. Б.* — Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии. — // Программирование. — 2012. — № 2. — С. 12—30.

Литература II

- *Батхин А. Б.* — Граница множество устойчивости одной многопараметрической системы Гамильтона. — // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер.1, Мат.Физ. — 2014. — Т. 5. — С. 6—23.
- *Gray A.* — Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. — 2nd. — Boca Raton, FL : CRC Press, 1997. — 1056 с.
- *Залгаллер В. А.* — Теория огибающих. — М. : Наука, 1975. — 104 с.
- *Кокс Д.*, *Литтл Д.*, *О'Ши Д.* — Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер. с англ. — М. : Мир, 2000. — 687 с.