Инвариантные координатные подпространства нормальной формы системы ОДУ

Александр Батхин
batkhin@gmail.com

*ИПМ им. М.В.Келдыша, МФТИ
Москва*

Доклад на семинаре «Компьютерная алгебра», 07-10-2020

Введение (1)

Подход А. Пуанкаре к исследованию систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) заключался в том, чтобы посредством аналитических обратимых преобразований максимально упростить правые части системы. Этот подход привёл к теории нормальных форм систем ОДУ, разработанной в работах А. Дюляка и А.Д. Брюно для общих систем (подробнее см. [Брюно, 1971]) и в работах Дж. Биркгофа, Т.М. Черри, Ф.Г. Густавсона, К.Л. Зигеля, Ю. Мозера, А.Д. Брюно и других для систем Гамильтона (подробнее см. [Брюно, 1990, Гл. I, II]).

Введение (2)

Хотя нормальная форма системы ОДУ в окрестности инвариантного многообразия (положения равновесия, периодического решения, k-мерного тора) является формальным объектом, т.е. переход к нормальной форме обычно является расходящимся преобразованием, она может быть эффективно использована для

- исследования устойчивости соответствующего инвариантного многообразия [Bruno, 1989; Маркеев, 1978],
- локальной интегрируемости системы в его окрестности [Bruno (et al.), 2017],
- поиска периодических решений, первых интегралов [Bruno, 2020; Брюно, 2020],
- асимптотического интегрирования исходной системы [Журавлев (et al.), 2015].

Введение (3)

Цель настоящей работы состоит в изучении ***инвариантных координатных подпространств*** в нормальной форме общей системы ОДУ в случае, когда линейная часть этой системы невырождена, т.е. имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Далее изучается вопрос существования таких подпространств в системах Гамильтона. Наконец, обсуждается алгоритм определения резонансов в системе без непосредственного вычисления собственных значений линейной части системы.

Существование координатного инвариантного подпространства позволяет изучать динамику фазового потока исходной системы на пространстве меньшей размерности и в некоторых случаях даёт информацию о периодических решениях полной системы.

Введение (4)

Доклад основан на препринте автора:
Батхин А. Б. Инвариантные координатные подпространства нормальной формы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 72.

Замечания об обозначениях

- Символы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, набранные полужирным шрифтом, обозначают векторы-столбцы в n-мерном вещественном $\mathbb{R}^n$ или комплексном $\mathbb{C}^n$ пространствах.
- Символы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, набранные полужирным шрифтом, обозначают векторы в n-мерной целочисленной решётке $\mathbb{Z}^n$.
- ***Норма вектора*** $|\mathbf{p}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |p_j|$, где $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$.
- Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^n$ величина $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} \equiv \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ есть стандартный ***моном***, а величина $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j$ — ***скалярное произведение***.

1. Введение

2. **Инвариантные координатные подпространства**
   - Случай общей системы ОДУ
   - Случай системы Гамильтона

3. Примеры

4. Применение q-субдискриминантов для определения резонансов линейной части системы ОДУ
   - Субдискриминанты многочлена и их вычисление
   - Алгоритм поиска резонансов
   - Модельный пример

Случай общей системы ОДУ (1)

Рассмотрим аналитическую систему ОДУ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

вблизи её положения равновесия

$$\mathbf{x} = 0,$$

совпадающего с началом координат.

Случай общей системы ОДУ (2)

Пусть линейная часть

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{2.2}$$

системы (2.1) невырождена. Тогда матрица A имеет n собственных чисел

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

из которых по крайне мере одно ненулевое.

Случай общей системы ОДУ (3)

Согласно теореме из [Брюно, 1971][a] существует формальное обратимое преобразование $\mathbf{g} : \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

представленное в виде степенных рядов, которое приводит исходную систему (2.1) к её ***нормальной форме***.

[a] *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (I). // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262.

Нормальная форма

Определение [Брюно, 1971]

Нормальная форма исходной системы (2.1) — это система ОДУ в виде

$$\dot{y}_j = y_j h_j(\mathbf{y}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

правые части $y_j h_j(\mathbf{y})$ которой суть степенные ряды

$$y_j h_j(\mathbf{y}) = y_j \sum_{\mathbf{q}} h_{j\mathbf{q}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}, \quad h_{j0} = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

состоящие только из ***резонансных членов***, показатели степени которых удовлетворяют резонансному уравнению

$$\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{2.5}$$

Здесь $h_{j\mathbf{q}}$ суть постоянные коэффициенты, при этом в слагаемых $y_j h_j(\mathbf{y})$ целочисленные координаты $q_j \geqslant -1$, но другие координаты $q_k \geqslant 0$.

Внешние и внутренние координаты

Введём кортеж $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ возрастающих индексов $1 \leqslant i_1$, $i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$. Обозначим через K_I ***координатное подпространство***

$$K_I = \{\mathbf{y} : y_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Все ненулевые координаты y_j, $j \in I$, подпространства K_I назовём ***внутренними координатами*** и обозначим их для краткости $\mathbf{y}_I$. Остальные координаты назовём ***внешними***.

Внешние и внутренние координаты

Введём кортеж $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ возрастающих индексов $1 \leqslant i_1$, $i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$. Обозначим через K_I ***координатное подпространство***

$$K_I = \{\mathbf{y} : y_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Все ненулевые координаты y_j, $j \in I$, подпространства K_I назовём ***внутренними координатами*** и обозначим их для краткости $\mathbf{y}_I$. Остальные координаты назовём ***внешними***.

Аналогично собственные числа λ_j, $j \in I$, соответствующие внутренним координатам $\mathbf{y}_I$, назовём ***внутренними собственными числами*** и обозначим их $\boldsymbol{\lambda}_I$. Остальные собственные числа λ_j, $j \notin I$, назовём ***внешними***.

Рассмотрим следующую задачу

Задача 1

Какие координатные подпространства K_I инвариантны в нормальной форме (2.3), (2.4), (2.5)?

Решение задачи 1 даёт следующая теорема.

Теорема 1 и её доказательство (1)

Теорема 1.

Координатное подпространство K_I *размерности* k *инвариантно в нормальной форме* (2.3)–(2.5), *если каждое внешнее собственное число* $\lambda_j \notin \boldsymbol{\lambda}_I$ *удовлетворяет условию*

$$\lambda_j \neq \langle \mathbf{p}_I, \boldsymbol{\lambda}_I \rangle \tag{2.6}$$

для всех неотрицательных целочисленных векторов $\mathbf{p}_I \geqslant 0$, $\mathbf{p}_I \in \mathbb{Z}^k$.

Теорема 1 и её доказательство (2)

Доказательство.

Из условия (2.6) следует, что каждый ряд $h_j(\mathbf{y})$ для $j \notin I$ не содержит ни одного слагаемого $h_{j\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}$, чьи индексы $q_j = -1$, $q_i \geqslant 0$, $i \neq j \notin I$. Поскольку внешние переменные y_j, $j \notin I$, равны нулю на подпространстве K_I, то из этого следует, что для $\mathbf{y} \in K_I$

$$y_j h_j(\mathbf{y}) = 0, \text{ для всех индексов } j \notin I.$$

Таким образом, подпространство K_I инвариантно в нормальной форме (2.3)–(2.5). □

Случай системы Гамильтона (1)

Рассмотрим аналитическую систему Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.7}$$

с n степенями свободы вблизи положения равновесия

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0.$$

Случай системы Гамильтона (2)

Функция Гамильтона $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ раскладывается в сходящийся степенной ряд

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{2.8}$$

с постоянными коэффициентами $H_{\mathbf{pq}}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$.

Каноническое преобразование координат $\mathbf{x},\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \tag{2.9}$$

сохраняет гамильтонову структуру исходной системы (2.7).

Случай системы Гамильтона (3)

Введём фазовый вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}(\mathbb{C}^{2n})$. Тогда линейная часть системы (2.7) может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}, \quad B = \frac{1}{2}\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y}\partial \mathbf{x}} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y}\partial \mathbf{y}} \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{x}} & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=0}. \tag{2.10}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — собственные числа матрицы B, которые могут быть переупорядочены следующим образом: $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ набор базовых собственных чисел системы (2.10).

Случай системы Гамильтона (4)

Согласно теореме из [Брюно, 1972, § 12][a] существует каноническое формальное преобразование (2.9), где все функцииl $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ суть степенные ряды, которое приводит гамильтонову систему (2.7) к её ***нормальной форме***

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial h/\partial \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\partial h/\partial \mathbf{u}, \tag{2.11}$$

задаваемой нормализованным Гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}, \tag{2.12}$$

содержащим только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие резонансному уравнению

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{2.13}$$

---

[a] *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II). // Тр. ММО.

Резонансное уравнение (1)

Резонансное уравнение (2.13) имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в нормальной форме (2.12):

1. ***вековые члены*** вида $h_{\mathbf{pp}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линеаризованной системы (2.10);
2. ***чисто резонансные члены***, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям уравнения

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{2.14}$$

Резонансное уравнение (2)

Следуя [Брюно, 1990, Гл. I, § 3][a], определим ***кратность резонанса*** $\mathfrak{k}$ как число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ уравнения (2.14), а порядок резонанса $\mathfrak{q} = \min |\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0, \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$.

[a] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.

Главным отличием нормальной формы системы Гамильтона (2.7) от нормальной формы общей системы ОДУ (2.1) является то, что первая всегда содержит вековые члены даже при отсутствии нетривиальных решений уравнения (2.14). В этом случае имеем так называемую ***нормальную форму Биркгофа*** [Биркгоф, 1999][a].

[a] *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. Ижевск : Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 р.

Координатное подпространство

Пусть, как и в разделе 1, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — кортеж возрастающих индексов $1 \leqslant i_1$, $i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$. Обозначим через L_I ***координатное подпространство***

$$L_I = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : u_j = v_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Координатное подпространство

Пусть, как и в разделе 1, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — кортеж возрастающих индексов $1 \leqslant i_1$, $i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$. Обозначим через L_I ***координатное подпространство***

$$L_I = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : u_j = v_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Все ненулевые координаты $w_j = (u_j, v_j)$, $j \in I$, подпространства L_I назовём ***внутренними координатами*** и обозначим их для краткости $\mathbf{w}_I$, остальные назовём ***внешними***.

Координатное подпространство

Пусть, как и в разделе 1, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — кортеж возрастающих индексов $1 \leqslant i_1$, $i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$. Обозначим через L_I ***координатное подпространство***

$$L_I = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : u_j = v_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}\,.$$

Все ненулевые координаты $w_j = (u_j, v_j)$, $j \in I$, подпространства L_I назовём ***внутренними координатами*** и обозначим их для краткости $\mathbf{w}_I$, остальные назовём ***внешними***.

Собственные числа λ_j, $j \in I$, соответствующие внутренним координатам $\mathbf{w}_I$, назовём ***внутренними собственными числами*** и обозначим их $\boldsymbol{\lambda}_I$. Остальные собственные числа λ_j, $j \notin I$, назовём ***внешними собственными числами***.

Рассмотрим задачу

Задача 2

Какие координатные подпространства L_I инвариантны в гамильтоновой нормальной форме (2.11), (2.12), (2.13)?

Теорема об инвариантном подпространстве (1)

Теорема 2.

Координатное подпространство L_I размерности $2k$ инвариантно в нормальной форме (2.11)–(2.13), если каждое внешнее собственное число $\lambda_j \notin \boldsymbol{\lambda}_I$ удовлетворяет следующему условию:

$$\lambda_j \neq \langle \mathbf{p}_I, \boldsymbol{\lambda}_I \rangle \,, \tag{2.15}$$

для любого ненулевого целочисленного вектора $\mathbf{p}_I \neq 0$ из решётки $\mathbf{p}_I \in \mathbb{Z}^k$.

Теорема об инвариантном подпространстве (2)

Доказательство.

Непосредственно следует из теоремы 1. □

Замечание 1.

Принципиальной разницей между условием (2.6) *теоремы 1 и условием* (2.15) *теоремы 2 является то, что в гамильтоновом случае выбирается ненулевой вектор* $\mathbf{p}_I$ *из решётки* $\mathbb{Z}^k$*, а в общем случае выбирается уже неотрицательный вектор* $0 \leqslant \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^k$*.*

Примеры

Рассмотрим некоторые модельные примеры существования инвариантных координатных подпространств в общем и гамильтоновом случаях.

Пример 1

Пусть собственные числа линейной части общей системы ОДУ равны

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Пример 1

Пусть собственные числа линейной части общей системы ОДУ равны

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Имеется три одномерных инвариантных подпространства K_j, $j = 1,2,3$, соответствующих каждому из собственных чисел λ_j, ибо ни одно из соотношений λ_i/λ_j при $i \neq j$ не является натуральным числом.

Пример 1

Пусть собственные числа линейной части общей системы ОДУ равны

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Имеется три одномерных инвариантных подпространства K_j, $j = 1{,}2{,}3$, соответствующих каждому из собственных чисел λ_j, ибо ни одно из соотношений λ_i/λ_j при $i \neq j$ не является натуральным числом.

Из трёх двумерных подпространств инвариантными являются подпространства K_{13} и K_{23}, но K_{12} неинвариантно, поскольку между собственными числами имеется соотношение $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, но при этом ни для каких векторов $\mathbf{p} \geqslant 0$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ не выполняются соотношения $\lambda_1 = p_1\lambda_2 + p_2\lambda_3$ и $\lambda_2 = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_3$.

Пример 2

Пусть собственные числа $\lambda_j,\ j = 1,\dots,n,$ линейной части гамильтоновой системы таковы, что отношения $\lambda_j/\lambda_1 \notin \mathbb{Z},\ j = 2,\dots,n.$ Тогда нормальная форма имеет двумерное инвариантное подпространство $L_1 = \{u_j = v_j = 0, j \notin I_1\}$, где кортеж $I_1 = \{1\}$. На подпространстве L_1 нормальная форма (2.12) индуцирует гамильтонову нормальную форму с одной степенью свободы. В этом случае условие **A** выполнено (см. [Брюно, 1972, § 12]) и нормализующее преобразование сходится.

Пример 2

Пусть собственные числа λ_j, $j = 1, \dots, n$, линейной части гамильтоновой системы таковы, что отношения $\lambda_j/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}$, $j = 2, \dots, n$. Тогда нормальная форма имеет двумерное инвариантное подпространство $L_1 = \{u_j = v_j = 0, j \notin I_1\}$, где кортеж $I_1 = \{1\}$. На подпространстве L_1 нормальная форма (2.12) индуцирует гамильтонову нормальную форму с одной степенью свободы. В этом случае условие **A** выполнено (см. [Брюно, 1972, § 12]) и нормализующее преобразование сходится.

Если $\lambda_1 \neq 0$ и чисто мнимое, тогда для вещественной системы Гамильтона (2.7) вещественное подпространство L_1 является семейством периодических решений. Этот факт впервые был обнаружен А.М. Ляпуновым в 1892 г. [Ляпунов, 1935] и описан К. Зигелем в книге [Зигель (et al.), 2001, §§16, 17] с применением гамильтонова формализма.

Пример 3 (1)

Пусть в системе Гамильтона имеется единственная пара собственных чисел λ_1, λ_2, удовлетворяющая условию

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r}{s}, \tag{3.1}$$

где $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, $\mathrm{GCD}(r, s) = 1$, т. е. кратность $\mathfrak{k}$ резонанса равна 1, а порядок резонанса равен $\mathfrak{q} = |r| + |s|$. Тогда уравнение (2.14) имеет однопараметрическое семейство решений

$$\mathbf{p} = (lr, -ls, 0, \dots), \quad l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},$$

а нормальная форма помимо вековых членов содержит чисто резонансные члены. Эти члены наименьшего порядка при $l = 1$ имеют вид $h_{12} u_1^r v_2^s$ и $h_{21} v_1^r u_2^s$.

Пример 3 (2)

Пусть, например, знаменатель s в (3.1) равен единице. Тогда гамильтонова нормальная форма содержит чисто резонансные члены $u_1^r v_2$ и $v_1^r u_2$. Это значит, что подпространство L_1 не может быть инвариантным, поскольку правые части уравнений для внешних переменных u_2, v_2 содержат слагаемые, зависящие от внутренних переменных u_1, v_1 и, тем самым, эти правые части не могут быть всегда равны нулю, когда $u_2 = v_2 = 0$. В то же самое время подпространство L_2 является инвариантным.

1. Введение

2. Инвариантные координатные подпространства
   - Случай общей системы ОДУ
   - Случай системы Гамильтона

3. Примеры

4. Применение q-субдискриминантов для определения резонансов линейной части системы ОДУ
   - Субдискриминанты многочлена и их вычисление
   - Алгоритм поиска резонансов
   - Модельный пример

Применение q-субдискриминантов для определения резонансов

Вид резонансных членов нормальной формы системы определяется исключительно собственными значениями $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы A, тогда для выяснения вопроса существования инвариантных подпространств в нормальной форме достаточно определить структуру собственных чисел матриц A или B, т.е. выполняются или нет соответствующие резонансные соотношения (2.6) или (2.15).

Применение q-субдискриминантов для определения резонансов

Вид резонансных членов нормальной формы системы определяется исключительно собственными значениями $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы A, тогда для выяснения вопроса существования инвариантных подпространств в нормальной форме достаточно определить структуру собственных чисел матриц A или B, т.е. выполняются или нет соответствующие резонансные соотношения (2.6) или (2.15).

Частично ответ на этот вопрос может быть получен с использованием техники q-субдискриминантов характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы A.

Применение q-субдискриминантов для определения резонансов

Вид резонансных членов нормальной формы системы определяется исключительно собственными значениями $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы A, тогда для выяснения вопроса существования инвариантных подпространств в нормальной форме достаточно определить структуру собственных чисел матриц A или B, т.е. выполняются или нет соответствующие резонансные соотношения (2.6) или (2.15).

Частично ответ на этот вопрос может быть получен с использованием техники q-субдискриминантов характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы A.

В дальнейшем ограничимся важным с точки зрения приложений случаем, когда вектор собственных чисел $\boldsymbol{\lambda}$ матрицы A состоит только из вещественных и/или чисто мнимых величин. Предположим, что если собственные числа $\boldsymbol{\lambda}$ удовлетворяют ***резонансному уравнению***, то все λ_j, входящие в эти уравнения, попарно рационально соизмеримы. Другими словами, нет такой ситуации с собственными числами, как в примере 1.

Субдискриминанты многочлена (1)

Применение q-субдискриминантов $D_q^{(k)}(f)$ характеристического многочлена позволяет не только выяснить наличие у него соизмеримых корней, но и, при определённых условиях, найти эти корни, не прибегая к вычислению всех собственных чисел.

Если коэффициенты многочлена зависят от параметров, то и q-субдискриминанты являются функциями этих параметров, что позволяет определить, при каких значениях последних имеет место резонанс соответствующей кратности и порядка.

Субдискриминанты многочлена (2)

Определение 3.

Пусть

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{4.1}$$

некоторый приведённый многочлен от переменной x. Тогда его k-й субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$, $k = 0, \ldots, n-2$ задаётся формулой

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#(I)=n-k}} \prod_{\substack{(j,l)\in I \\ l>j}} (x_j - x_l)^2,$$

где x_j — корни многочлена (4.1), $\#(I)$ — мощность множества I. Для $k = n-1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$. Для $k = 0$ получаем $D^{(0)}(f_n) = D(f_n)$.

Вычисление субдискриминантов (1)

Вычисление субдискриминанта многочлена осуществляется либо с помощью одного из матричных методов с использованием ***матрицы Безу, матрицы Сильвестра, ганкелевой матрицы ньютоновых сумм***, либо с использованием алгоритма ***псевдоделения Якоби*** (см., например, [Gathen (et al.), 2003; Калинина (et al.), 2002][a], [Батхин, 2015; 2016]).

[a] *Gathen J.* [et al.]. Subresultants revisited. // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 297, issue 1–3. P. 199–239; *Калинина Е. А.* [и др.]. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.

Многие из указанных выше методов реализованы в различных системах компьютерной алгебры. Рассмотрим пример вычисления субдискриминантов в трёх распространённых CAS.

Вычисление субдискриминантов (2)

В системе `Wolfram Mathematica` [Wolfram, 2003][a] функции **Subresultants**[f1,f2,x] и SubresultantPolynomials[f1,f2,x] позволяют находить соответственно скалярные и полиномиальные субрезультанты пары многочленов f_1, f_2 относительно переменной x.

[a] *Wolfram S.* The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.

Фрагмент соответствующего кода по вычислению субдискриминантов кубического многочлена $f_3(x)$ приведён в листинге 1.

Вычисление субдискриминантов (3)

Listing 1: Mathematica

```
In[1] := coefflst = Reverse[Join[{1}, Array[a, 3]]];
f3 = Total[coefflst x^(Range[4] - 1)]
Df3 = D[f3, x]
Out[1] := x^3 + x^2 a[1] + x a[2] + a[3]
3 x^2 + 2 x a[1] + a[2]

In[2] := Subresultants[f3, Df3, x]
Out[2]: = {-a[1]^2 a[2]^2 + 4 a[2]^3 + 4 a[1]^3 a[3]
- 18 a[1] a[2] a[3] + 27 a[3]^2, -2 a[1]^2 + 6 a[2], 3}
```

Вычисление субдискриминантов (4)

Система компьютерной алгебры `Maple` [Thompson, 2016] предлагает набор процедур (`SubresultantChain`, `SubresultantOfIndex`, `LastSubresultant`) из пакета `RegularChains[ChainTools]`, позволяющих вычислять структуру данных, хранящую полиномиальные субрезультанты пары многочленов от нескольких переменных. Непосредственные вычисления также могут быть произведены с использованием процедур `BezoutMatrix`, `SylvesterMatrix` и `HankelMatrix` из пакета `LinearAlgebra` (см. [Батхин, 2015; 2016][a]). Ниже приведён листинг 2 программы, вычисляющей q-дискриминант (см. определение ниже) приведённого кубического многочлена $f_3(x)$.

[a] *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21.

Вычисление субдискриминантов (5)

Listing 2: Maple

```
with(RegularChains):
with(ChainTools):
with(PolynomialTools):

qTrans:=proc(xvar::algebraic, niter::posint:=1,{qname::symbol:='q'})
description "x transformation: x-> q*x";
local res:=xvar, i;
for i from 1 to niter do
res:=collect(qname*res, qname, distributed, factor);
end do;
res;
end proc;
```

Вычисление субдискриминантов (6)

```
qdiff:=proc(f::algebraic,x::seq(name),{qname::symbol:='q'})
description "Computing Jackson derivative";
local res:=f,i;
for i in [x] do
res:=collect(normal((eval(res,i=qTrans(i))-res)/(qTrans(i)-i)),
i,factor);
end do;
res;
end proc;

coefflst:=[1,seq(a[i],i=1..3)]:
Rf3:=PolynomialRing([x,op(coefflst),q]);
Rf3 := polynomial_ring
f3:=FromCoefficientList(coefflst,x,termorder=reverse);
```

Вычисление субдискриминантов (7)

$$f_3 := x^3 + a_1 * x^2 + a_2 * x + a_3$$

```
Df3:=qdiff(f3,x);
```

$$Df3 := (q^2+q+1)x^2 + a_1(q+1)x + a_2$$

```
sdc_f3:=SubresultantChain(f3,Dqf3,x,Rf3):
collect(SubresultantOfIndex(0,sdc_f3,Rf3),cflst[2..-1],
distributed,factor);
```

$$q^2(q+1)^2a_1^3a_3 - q^3a_1^2a_2^2 - q\left(q^2+q+1\right)\left(q^2+4q+1\right)a_1a_2a_3 + q^2(q+1)^2a_2^3 + \left(q^2+q+1\right)^3a_3^2$$

Наконец, пакет SymPy [Meurer (et al.), 2017] для языка программирования Python также содержит ряд функций, позволяющих вычислять полиномиальные субрезультанты пары многочленов в символьном виде. Пример вычисления дискриминанта квартики $f_4(x)$ дан в листинге 3.

Вычисление субдискриминантов (8)

Listing 3: SymPy

```
from sympy import *
nord = 4
x = var("x")
cflst = symbols("a1:{}".format(nord))
f4 = Poly(x**nord+sum([cflst[nord-1-i]*x**i\
for i in range(nord)]),x)
Df4 = f4.diff(x)
SubDf4 = subresultants(f4,Df4)
SubDf4[-1].as_expr()
```

$$-27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 + 144a_1^2a_2a_4^2 - 6a_1^2a_3^2a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 +$$
$$+18a_1a_2a_3^3 - 192a_1a_3a_4^2 + 16a_2^4a_4 - 4a_2^3a_3^2 - 128a_2^2a_4^2 + 144a_2a_3^2a_4 - 27a_3^4 + 256a_4^3$$

Рациональная соизмеримость корней (1)

Для определения рациональной соизмеримости корней многочлена воспользуемся q-аналогами классических производной и субдискриминанта.
Напомним основные q-объекты (см., например, [Кац (et al.), 2005][a], [Батхин, 2017; 2018; 2019]), используемые далее.

[a] *Кац В. Г.* [и др.]. Квантовый анализ. М. : МЦНМО, 2005. 128 с.

Рациональная соизмеримость корней (2)

Определение 5.

- q-**скобка** числа a: $[a]_q = \dfrac{q^a - 1}{q - 1}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
- q-**факториал**$[n]_q! = \prod\limits_{k=1}^{n} [k]_q = \dfrac{(q;q)_n}{(1-q)^n}$, $q \neq 1$,
- q-**биномиальные (гауссовы) коэффициенты**

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{q^{n-i+1}-1}{q^i - 1},$$

- q-**бином**: $\{x;a\}_{n;q} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x - aq^i\right)$, $\quad \{x;t\}_{0;q} = 1$.

Рациональная соизмеримость корней (3)

Производная Джексона (q-производная, q-дифференциальный оператор Джексона) есть

$$(\mathcal{A}_q f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases} \qquad q \notin \{0,1\}.$$

Она обладает всеми свойствами обычной производной. Исключением является правило дифференцирования сложной функции, которое отсутствует в случае q-производной.

С помощью q-производной теперь определяется q-аналог классического дискриминанта многочлена.

Рациональная соизмеримость корней (4)

Определение 6.

Определим q-**дискриминант** $D_q(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ как результант пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$:

$$D_q(f_n) = (-1)^{n(n-1)/2}\operatorname{Res}_x(f_n(x), (\mathcal{A}_q f_n)(x)).$$

Равенство нулю q-дискриминанта многочлена $f_n(x)$ при фиксированном q является признаком существования по крайней мере одной пары q-соизмеримых корней, однако подробную структуру всех соизмеримых корней можно получить с использованием последовательности q-субдискриминантов различных порядков многочлена $f_n(x)$

$$\mathsf{S}_q(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(D_q^{(0)}(f_n), D_q^{(1)}(f_n), \ldots, D_q^{(n-1)}(f_n)\right). \tag{4.2}$$

Рациональная соизмеримость корней (5)

Теорема 7 ([Батхин, 2018]).

Многочлен $f_n(x)$ имеет ровно $n-d$ различных последовательностей q-соизмеримых корней тогда и только тогда, когда в последовательности (4.2) *k-х q-субдискриминантов $D_q^{(k)}(f_n)$, $k=0,\ldots,n-2$, первым отличным от нуля является q-субдискриминант $D_q^{(d)}(f_n)$ с номером d.*

Рациональная соизмеримость корней (6)

Все соизмеримые корни многочлена $f_n(x)$ являются корнями наибольшего общего делителя многочлена $f_n(x)$ и его q-производной $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$:

$$\tilde{f}_q(x) = \mathrm{GCD}(f_n(x), (\mathcal{A}_q f_n)(x)).$$

Теорема 7 утверждает, что степень многочлена $\tilde{f}_q(x)$ равна номеру d первого ненулевого q-субдискриминанта в последовательности $\mathsf{S}_q(f_n)$.

Рациональная соизмеримость корней (7)

Отметим, что q-субдискриминанты вычисляются с помощью любого из матричных методов вычисления классических субрезультантов пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$. Например, если составить из коэффициентов указанных выше многочленов матрицу Сильвестра $\mathbf{Sylv}_q(f_n)$ размера $(2n-1)\times(2n-1)$ в форме Сильвестра-Хабихта, то k-й q-субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ равен определителю k-го иннора [Джури, 1979, Гл. I][a] этой матрицы.

[a] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.

Вычисление соизмеримых корней

Пусть в условиях теоремы 7 первый отличный от нуля q-дискриминант имеет номер d, $0 < d < n-1$. Обозначим через $\mathbf{M}_d^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$, d-й иннор модифицированной q-матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}_q(f_n)$, в которой столбец с номером $2n-1-d$ заменён её столбцом с номером $2n-1-d+i$, а через $M_d^{(i)}$ — определитель этого иннора. Тогда, как показано в [Батхин, 2018], имеет место

Вычисление соизмеримых корней

Пусть в условиях теоремы 7 первый отличный от нуля q-дискриминант имеет номер d, $0 < d < n-1$. Обозначим через $\mathbf{M}_d^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$, d-й иннор модифицированной q-матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}_q(f_n)$, в которой столбец с номером $2n-1-d$ заменён её столбцом с номером $2n-1-d+i$, а через $M_d^{(i)}$ — определитель этого иннора. Тогда, как показано в [Батхин, 2018], имеет место

Утверждение

Если в последовательности q-субдискриминантов $D_q^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \ldots, n-2$, первым отличным от нуля является q-субдискриминант с номером d, то

$$\tilde{f}_q(x) \equiv D_q^{(d)} x^d + M_d^{(1)} x^{d-1} + \cdots + M_d^{(i)}.$$

Свойства q-субдистриминанта

1. k-й q-субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ представляет собой квазиоднородный многочлен от переменных $a_1, \ldots, a_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^{m} j a_j \frac{\partial D_q^{(k)}(f_n)}{\partial a_j} = (m-k)(m-k-1) D_q^{(k)}(f_n).$$

При этом k-й субдискриминант зависит не более чем от m первых коэффициентов многочлена $f_n(x)$, где $m = \min(2(n-k-1), n)$.

Свойства q-субдистриминанта

1. k-й q-субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ представляет собой квазиоднородный многочлен от переменных $a_1, \ldots, a_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^{m} j a_j \frac{\partial D_q^{(k)}(f_n)}{\partial a_j} = (m-k)(m-k-1) D_q^{(k)}(f_n).$$

   При этом k-й субдискриминант зависит не более чем от m первых коэффициентов многочлена $f_n(x)$, где $m = \min(2(n-k-1), n)$.

2. k-й q-субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ представляет собой возвратный многочлен чётного порядка от переменной q. Возвратность следует из того, что соизмеримость корней $\lambda_i/\lambda_j = q$, $i \neq j$, влечёт соизмеримость $\lambda_j/\lambda_i = 1/q$. Это свойство позволяет, с одной стороны, понизить вдвое степень q-субдискриминанта, как многочлена от q с помощью подстановки $q + 1/q = Q$, а с другой стороны избежать двойной проверки соизмеримости пары корней $\lambda_i/\lambda_j = q$ и $\lambda_j/\lambda_i = 1/q$.

Алгоритм поиска резонансов (1)

Рассмотрим алгоритм исследования линейной части (2.2) общей системы ОДУ для поиска резонансов. ***Алгоритм*** представлен в виде последовательности шагов.

Шаг 1.

Для матрицы A линейной системы вычисляем характеристический многочлен $f_n(\lambda)$ и (опционально) проверяем наличие у него только вещественных и/или чисто мнимых корней.

Шаг 2.

По многочлену $f_n(\lambda)$ вычисляем последовательность $\mathrm{S}_q(f)$ (4.2) q-субдискриминантов порядков от 0 до $n-2$. На этом этапе их степени как многочленов от q можно понизить вдвое, как указано в свойстве 2.

Алгоритм поиска резонансов (2)

Дальнейшие действия зависят от того, насколько легко удаётся найти рациональные корни q-дискриминанта $D_q(f_n)$ как многочлена от q.

Шаг 3a.

Пусть $D_q(f_n)$ является многочленом из кольца $\mathbb{Z}[q]$. Тогда следует попытаться факторизовать его с использованием различных алгоритмов (например, Кантора-Цассенхауза или Берлекемпа, см. [Акритас, 1994, Гл. 6]). В случае успеха получаем все (или часть) значений q, для которых имеет место соизмеримость корней многочлена (4.1).

Алгоритм поиска резонансов (3)

Шаг 3б.

Если применение предыдущего шага невозможно, то применим некоторый вариант перебора. Ограничимся определённым максимальным порядком m резонанса. Составим упорядоченный кортеж $\mathcal{P}_m$ всевозможных натуральных пар (r, s), таких, что $r, s \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GCD}(r, s) = 1$, $r \geqslant s$, $r + s \leqslant m$. Теперь, последовательно перебирая элементы кортежа $\mathcal{P}_m$, для каждой пары (r, s) проверяем равенство нулю q-дискриминанта $D_q(f)$ для значения $q = r/s$.

Алгоритм поиска резонансов (4)

Шаг 4.

Пусть для некоторого рационального $q_1^* \in \mathbb{Q}$ выполнено условие $D_q(f_n) = 0$. Тогда вычисляем по последовательности (4.2) степень многочлена $\tilde{f}_{q_1^*}(x)$, по формуле (4.3) сам этот многочлен и определяем структуру его корней. Если степень этого многочлена мала, то соизмеримые корни могут быть найдены по соответствующим формулам, а исходный многочлен $f_n(\lambda)$ можно представить в виде $f_n(\lambda) = u(\lambda)v(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — множитель с уже известными корнями, а $v(\lambda)$ — с ещё неизвестными, но среди которых нет q_1^*-соизмеримых корней.

Шаг 5.

Последующие действия сводятся к исследованию, имеют ли множители $u(x)$ и $v(x)$ q-соизмеримые корни или нет, а также имеет ли множитель $v(x)$ q-соизмеримые корни для $q \neq q_1^*$.

Замечания (1)

Замечание 2.

При исследовании линейной части (2.10) системы Гамильтона следует учитывать, что характеристический многочлен $f_{2n}(\lambda)$ матрицы B является многочленом только чётных степеней λ. Следовательно, можно понизить его порядок вдвое и исследовать многочлен, названный в [Батхин (et al.), 2012] ***полухарактеристическим****, $\hat{f}_n(\mu) = f_{2n}(\lambda)$, где $\mu = \lambda^2$. В этом случае кортеж $\mathcal{P}_m$ составляется из пар (r^2, s^2) взаимно простых чисел r и s. Отметим, что в случае, когда удаётся явно выразить собственные числа матрицы B, квадратичную часть гамильтониана (2.8) можно привести к нормальной форме одним из методов, описанным в книгах [Журавлев (et al.), 2015; Маркеев, 2009].*

Замечания (2)

Замечание 3.

Описанный выше метод обладает двумя недостатками. Во-первых, при наличии резонанса кратности $\mathfrak{k} > 1$ *может возникнуть ситуация, когда попарная соизмеримость собственных чисел задаётся большими значениями* q*, но сам резонанс может иметь малый порядок. Например, если три собственных числа* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *относятся как натуральные числа* $2k - 1, 2k, 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$*, т.е.* $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (2k - 1) : 2k : (2k + 1)$*, то наименьший порядок попарной соизмеримости равен* $4k - 1$*. Однако в то же самое время имеет место резонансное соотношение* $\lambda_3 = 2\lambda_2 - \lambda_1$*, имеющее порядок 4. Во-вторых, метод неспособен находить такие резонансы, которые задействуют три и более собственных чисел, но при этом эти числа не являются попарно соизмеримыми.*

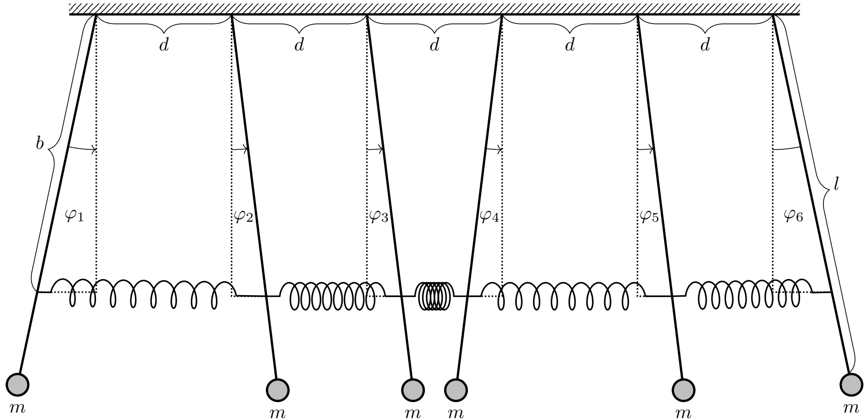
Замечания (3)

Замечание 4.

Описанные в этом разделе методы исследования характеристического многочлена $f(\lambda)$ линейной части ОДУ легко алгоритмизируются и могут быть реализованы во многих системах компьютерной алгебры. Автором были написаны библиотеки процедур в системах компьютерной алгебры `Maple` *и* `SymPy`*, предназначенные для вычисления q-субдискриминантов многочлена и исследования резонансных соотношений между корнями последнего без их явных вычислений. Ниже дан пример таких вычислений.*

Модельный пример

Рассмотрим шесть симпатических математических маятников (т. е. одинаковой массы m и длины l), точки подвеса которых расположены на равных расстояниях d на горизонтальной прямой. Пусть маятники соединены между собой невесомыми линейно упругими пружинами жёсткости k длиной d в недеформированном состоянии. Точки прикрепления пружин расположены на расстоянии $b \leqslant d$ от точек подвеса маятников.


d
d
d
d
d
b
l
φ_1
φ_2
φ_3
φ_4
φ_5
φ_6
m
m
m
m
m
m

Модельный пример (продолжение) (1)

Следуя работе [Маркеев, 2010][a], в которой рассмотрена пара таких маятников, несложно получить квадратичную часть Π_2 потенциальной энергии в окрестности положения равновесия, когда все углы φ_i, $i = 1,\ldots,6$, отклонения маятников от вертикали равны нулю. Переходя к каноническим переменным и масштабируя время $\tau = t\sqrt{g/l}$, можно получить полухарактеристический многочлен (вековое уравнение) в виде

[a] *Маркеев А. П.* Нелинейные колебания симпатических маятников. // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 3. С. 605—621.

Модельный пример (продолжение) (2)

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_6(\mu) =& \mu^6 - 2\left(5\beta+3\right)\mu^5 + \left(36\beta^2+50\beta+15\right)\mu^4 - \\
& - 2\left(28\beta^3+72\beta^2+50\beta+10\right)\mu^3 + \\
& + \left(35\beta^4+168\beta^3+216\beta^2+100\beta+15\right)\mu^2 - \\
& - 2\left(3\beta^5+35\beta^4+84\beta^3+72\beta^2+25\beta+3\right)\mu + \\
& + (2\beta+1)(3\beta+1)(\beta+1)(\beta^2+4\beta+1).
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

где $\mu = \lambda^2$, а единственный параметр $\beta = \dfrac{kb^2}{mgl} > 0$.

В силу устойчивости положения равновесия, многочлен (4.3) имеет шесть положительных вещественных корней — по числу степеней свободы исходной механической системы.

Модельный пример (продолжение) (3)

Следуя шагу 2 ***Алгоритма***, вычислим первый q-субдискриминант $D_q\left(\hat{f}_6\right)$ и упростим его. В результате получим многочлен относительно переменной Q степени 15. Здесь его явное выражение не приводится в силу его громоздкости.

В системе `Maplesoft Maple` этот многочлен удалось разложить на линейные и квадратные множители, что позволило легко найти все соизмеримости между корнями многочлена (4.3). Таким образом, выполнен шаг 3а ***Алгоритма*** и имеется возможность найти все корни многочлена, а следовательно, проверить выполнение резонансных соотношений между ними.

Модельный пример (продолжение) (4)

В системе SymPy разложить q-дискриминант $D_q\left(\hat{f}_6\right)$ на множители не удалось, поэтому применим шаги 3б и далее ***Алгоритма*** для некоторого фиксированного значения параметра $\beta = 48/25$.

Выберем максимальный порядок резонанса $m = 20$ и составим кортеж $\mathcal{P}_{20}$ всевозможных пар (r^2, s^2), таких, что $\mathrm{GCD}(r, s) = 1$ и $r + s \leqslant 20$, $r, s \in \mathbb{N}$. Перебирая все такие пары из $\mathcal{P}_{20}$, найдём, что при $q_1^* = 121/25$ и $q_2^* = 169/25$ q-дискриминант обращается в нуль, а остальные q-субдискриминанты нет.

При этом многочлены $\tilde{f}_{q_1}(\mu)$ и $\tilde{f}_{q_2}(\mu)$, вычисленные по формуле (4.3), имеют один и тот же корень $\mu_1 = 1$. Следовательно, должно быть ещё одно значение $q_3^* = q_2^*/q_1^* = 169/121$, при котором обнуляется q-дискриминант.

Модельный пример (продолжение) (5)

Таким образом, найдены три корня многочлена (4.3): $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = q_1^*$, $\mu_3 = q_2^*$, и, следовательно, $f_6(\mu) = (\mu-1)(\mu-q_1^*)\,(\mu - q_2^*)\,v_3(\mu)$. Остальные иррациональные корни μ_k, $k = 4{,}5{,}6$, кубического многочлена $v_3(\mu)$ легко находятся с помощью тригонометрической формулы Виета [Сушкевич, 1941, § 119][a].

[a] *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. 4-е. М.-Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. 460 с.

Итак, имеется резонансное соотношение (2.14)

$$5p_1 + 11p_2 + 13p_3 = 0 \tag{4.4}$$

между частотами $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11/5, \lambda_3 = 13/5$.

Модельный пример (продолжение) (6)

Соотношение (4.4) имеет три целочисленных решения $\mathbf{p}_1 = (1, -4, 3)$, $\mathbf{p}_2 = (3, 1, -2)$ и $\mathbf{p}_3 = (4, -3, 1)$, из которых следует, что условие (2.15) теоремы 2 не выполнено.

Таким образом, имеется инвариантное координатное подпространство L_I, $I = \{1, 2, 3\}$, размерности шесть в нормальной форме, соответствующее трём собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Каждому из оставшихся собственных чисел λ_i, $i = 4, 5, 6$, соответствует двумерное инвариантное координатное подпространство L_i.

В силу того, что порядки целочисленных векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ равны соответственно 8, 6, 8, то исследование динамики исходной системы на подпространстве L_I возможно лишь при выполнении нелинейной нормализации исходной системы по крайней мере до 6-го порядка включительно.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.Д. Брюно за помощь, плодотворное обсуждение и поддержку при выполнении этой работы.

Библиография (1)

- *Basu S., Pollack R., Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006. ix+662. (Algorithms and Computations in Mathematics 10).
- *Bruno A. D.* Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo: Springer–Verlag, 1989.
- *Bruno A. D.* Normalization of the periodic Hamiltonian system. // Programming and Computer Software. 2020. Vol. 46, no. 2. P. 76–83. DOI: 10.1134/S0361768820020048.
- *Bruno A. D., Enderal V. F., Romanovski V. G.* Computer Algebra in Scientific Computing: Proceedings CASC 2017. //. Vol. 10490 / ed. by V. P. Gerdt, et al. Berlin Heidelberg: Springer, 2017. Chap. On new integrals of the Algaba-Gamero-Garcia system. (Lecture Notes in Computer Science). DOI: 10.1007/978-3-642-32973-9.
- *Gathen J., Lücking T.* Subresultants revisited. // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 297, issue 1–3. P. 199–239. DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.

Библиография (2)

- *Meurer A.* [et al.]. SymPy: symbolic computing in Python. // PeerJ Computer Science. 2017. Vol. 3. e103. ISSN 2376–5992. DOI: 10.7717/peerj-cs.103. URL: https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103.
- *Thompson I.* Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.
- *Wolfram S.* The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
- *Акритас А. Г.* Основы компьютерной алгебры с приложениями. М.: Мир, 1994. 544 с.
- *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 76. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.
- *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21.

Библиография (3)

Батхин А. Б. Вычисление обобщённого дискриминанта вещественного многочлена. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 88. ISSN 2071–2898. DOI: 10.20948/prepr-2017-88. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2016/prep2017_88.pdf.

Батхин А. Б. Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена. // Программирование. 2018. № 2. С. 5—17.

Батхин А. Б. Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты. // Программирование. 2019. № 2. С. 6—15. DOI: 10.1134/S013234741902004З.

Батхин А. Б. Инвариантные координатные подпространства нормальной формы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 72. DOI: 10.20948/prepr-2020-72. URL: https://keldysh.ru/papers/2020/prep2020_72.pdf.

Библиография (4)

Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.

Биркгоф Д. Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 р.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (I). // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II). // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

Библиография (5)

- *Брюно А. Д.* Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением. // ЖВММФ. 2020. Т. 60, № 1. С. 36—52. DOI: 10.31857/S004446692001007X.
- *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.
- *Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
- *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 р.
- *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
- *Кац В. Г., Чен П.* Квантовый анализ. М.: МЦНМО, 2005. 128 с.
- *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ОНТИ, 1935.

Библиография (6)

Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. 352 с.

Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.

Маркеев А. П. Нелинейные колебания симпатических маятников. // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 3. С. 605—621.

Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. 4-е. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. 460 с.

Спасибо за внимание!