ДВОЯКО СИММЕТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

Александр Батхин

Сектор сингулярных задач
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва
e–mail: batkhin@gmail.com

Доклад на семинаре «Компьютерная алгебра» 24/X/2012

Содержание

1. **Введение**
   - Постановка задачи
2. **Свойства периодических решений систем Гамильтона**
   - Свойства фазового потока
   - Структура матрицы монодромии симметричного решения
3. **Дважды симметричные решения задачи Хилла**
   - Задача Хилла и ее свойства
   - Классические семейства периодических решений
   - Новые семейства периодических решений

«. . . особая ценность этих периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной.»

Новые методы небесной механики.
Том I, Глава III, п.37
Анри Пуанкаре

Фазовое пространство динамической системы содержит набор инвариантных структур, играющих ключевую роль в понимании ее эволюции. Они образуют некоторую иерархию, а ее динамика будет достаточно понятна, если мы знаем эти объекты, знаем, как они связаны, знаем возможные переходы от одного к другому, и как долго эти переходы могут реализовываться. К таким объектам относятся:

- положения равновесия;
- периодические решения;
- инвариантные кривые, торы и другие инвариантные многообразия;
- инвариантные объекты Кантор-типа или локально канторовы множества;
- другие объекты, далекие еще от полной классификации и идентификации.

Доклад посвящен изучению периодических решений систем Гамильтона, инвариантных относительно некоторой конечной группы преобразований фазового пространства.

Структура доклада

- Свойства периодических решений систем Гамильтона.
- Анализ структуры матрицы монодромии симметричных периодических решений.
- Приложение: исследование семейств двояко симметричных периодических решений плоской круговой задачи Хилла.

Аналитическая часть работы выполнена с использованием техники базисов Грёбнера в системе компьютерной алгебры `Maple`.

Постановка задачи I

Рассмотрим автономную систему Гамильтона с двумя степенями свободы с гамильтонианом $H(X, Y)$, где X — обобщенные координаты, Y — канонически сопряженные импульсы, $Z = (X, Y)$ — вектор в фазовом пространстве $\mathbb{M}$.

Фазовый поток $\Phi^t : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ задается системой канонических уравнений

$$\dot{Z} = J \operatorname{grad} H(Z), \tag{1}$$

где $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$ — симплектическая единица.

Постановка задачи II

Пусть $D \subset \mathbb{M}$ — инвариантная область фазового пространства:

$$\Phi^t(D) \subseteq D.$$

Тогда имеет место

Теорема Пуанкаре о возвращении

Для любой окрестности $U(Z^*)$ точки $Z^* \in D$ найдутся начальное условие $Z_0 \in U(Z)$ и время $\tau > 0$ такие, что фазовая траектория $Z(t, Z_0)$ пройдет через окрестность $U(Z^*)$ при $t > \tau$.

Следствие

Инвариантная область D фазового пространства $\mathbb{M}$ содержит бесконечное число периодических решений со сколь угодно большим периодом.

Постановка задачи III

Семейства периодических решений

Периодические решения системы Гамильтона не являются изолированными, а образуют семейства. Размерности этих семейств равны числу независимых первых интегралов системы Гамильтона. Для автономной неинтегрируемой системы Гамильтона семейства периодических решений являются обычно однопараметрическими, где параметром может служить значение $H(Z)$.

Постановка задачи IV

Пусть пара (T, Z_0) задает период и начальные условия периодического решения $Z(t, Z_0)$ системы Гамильтона:

$$Z(t+T, Z_0) = Z(t, Z_0).$$

Множество точек периодического решения $Z(t, Z_0)$ представляет собой инвариантное многообразие размерности 1 относительно фазового потока Φ^t.

Постановка задачи V

Преобразования расширенного фазового пространства $\mathbb{M}$

Пусть система Гамильтона инварианта относительно преобразования

$$g : (t, Z) \to (\sigma t, GZ),$$

где $\sigma = \pm 1$, G — постоянная матрица. Пусть $\Sigma_g \subset \mathbb{M}$ — множество неподвижных точек отображения g. Тогда существуют g-инвариантные периодические решения, которые полностью определяются участком фазовой траектории, заключенной между точками Z_0 и $Z(T/2)$, лежащими на Σ_g.

Постановка задачи VI

Проблема

Пусть система Гамильтона инвариантна относительно конечной группы преобразований $\{g_i\}$ с двумя образующими g_1 и g_2. Исследовать в линейном приближении динамику в окрестности двляко симметричного периодического решения $Z(t, Z_0)$, а также определить, при каких условиях это периодическое решение какие типы бифуркаций испытывает.

В докладе рассматривается случай системы Гамильтона с двумя степенями свободы. Для несимметричных и однократно симметричных периодических решений подробное исследование было выполнено Б.Б. Крейсманом в серии работ. Двояко симметричные решения находят применение во многих задачах небесно механики и космонавтики: Копенгагенской задаче, задаче Хилла, задаче о колебаниях спутника на эллиптической орбите и др.

Основные свойства фазового потока

Имеют место следующие свойства фазового потока Φ^t системы Гамильтона:

1. Фазовый поток Φ^t есть симплектическое отображение фазового пространства $\mathbb{M}$ на себя.
2. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема: фазовый поток Φ^t сохраняет фазовый объем

$$\mathrm{Vol}(\Phi^T(D)) = \mathrm{Vol}(D).$$

Пусть $Z(t, Z_0)$ — периодическое решение автономной системы Гамильтона с начальными условиями $Z(0) = Z_0$ и периодом T:

$$\frac{dZ(t, Z_0)}{dt} = J \operatorname{grad} H(Z(t, Z_0)).$$

Уравнениями в вариациях Пуанкаре называется система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Z}(t, Z_0) = J \operatorname{Hess}(Z(t, Z_0))\mathscr{Z}(t, Z_0), \text{ где } \mathscr{Z} = \frac{\partial Z(t, Z_0)}{\partial Z_0},$$

интегрируемая вдоль решения $Z(t, Z_0)$ с начальным условием $\mathscr{Z}(0) = E$. Матрица $\mathscr{Z}(t)$ определяет в линейном приближении динамику фазового потока Φ^t в окрестности периодического решения $Z(t, Z_0)$.

Из свойств фазового потока следует

- матрица $\mathscr{Z}(t)$ симплектическая, т. е. удовлетворяет тождеству
$$\mathscr{Z}(t)^{\mathrm{T}} J \mathscr{Z}(t) = J;$$
- $\operatorname{Det} \mathscr{Z}(t) = 1$, а характеристический многочлен $P(\lambda)$ матрицы $\mathscr{Z}(t)$ возвратный.

Матрица монодромии M

периодического решения $Z(t, Z_0)$ есть $\mathscr{Z}(T, Z_0)$. При этом

$$\mathscr{Z}(t+T) = \mathscr{Z}(t) M,$$

т. е. матрица M описывает деформацию малой окрестности начального условия Z_0 через период T. Собственные числа ρ_k матрицы M называют мультипликаторами.

Свойства матрицы монодромии M

В дополнение к свойствам матрицы $\mathscr{Z}(t)$ матрица монодромии обладает следующими:

- мультипликаторы ρ_k матрицы M комплексно-сопряженные и взаимно обратные;
- в силу автономности системы Гамильтона (1) матрица M имеет собственный вектор $\mathscr{V} \stackrel{\text{def}}{=} J \operatorname{grad} H(Z_0)$, соответствующий мультипликатору $\rho_{1,2} = 1$ кратности 2;
- характеристический многочлен $P(\lambda)$ матрицы M имеет вид

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \left(\lambda^2 - 2S\lambda + 1\right),$$

где S — индекс устойчивости периодического решения $Z(t, Z_0)$.

Условие устойчивости решения $Z(t, Z_0)$

В общем случае мультипликатору $\rho_{1,2} = 1$ соответствует Жорданова клетка порядка 2, поэтому периодическое решение $Z(t, Z_0)$ может быть только орбитально устойчивым.

- Если $|S| < 1$, то $\rho_3 = \bar{\rho}_4$, $|\rho_3| = |\rho_4| = 1$ и решение устойчиво в линейном приближении.
- Если $|S| > 1$, то $\rho_{3,4} \in \mathbb{R}$, $\rho_3 = 1/\rho_4$ и решение неустойчиво.
- Если $|S| < 1$ и $S = \cos(2\pi p/q)$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то в окрестности периодического решения Z имеется другое периодическое решение Z' с периодом $T' = qT$. Такие решения Пуанкаре предложил называть периодическими решениями второго рода.
- Случай $S = 1$ требует дополнительного исследования.

Структура матрицы монодромии симметричного решения I

Пусть система Гамильтона инвариантна относительно канонических преобразований

$$g_1 : (t, X_1, X_2, Y_1, Y_2) \to (-t, X_1, -X_2, -Y_1, Y_2),$$
$$g_2 : (t, X_1, X_2, Y_1, Y_2) \to (-t, -X_1, X_2, Y_1, -Y_2).$$

Неподвижные множества Σ_i отображений g_i есть плоскости $\{X_{3-i} = Y_i = 0\}$, $i = 1{,}2$, а матрицы $G_{1,2} = \mathrm{diag}\{\pm 1, \mp 1, \mp 1, \pm 1\}$.

Структура матрицы монодромии симметричного решения II

Пусть решение $Z(t, Z_0)$ однократно симметрично, а начальное условие $Z_0 \in \Sigma_i$. Тогда через полпериода $Z(T/2, Z_0) \in \Sigma_i$, а матрицы монодромии, вычисленные в точках Z_0 и $Z(T/2)$ вычисляются по формулам

$$M_i = \widetilde{G}_i \mathscr{Z}^{\mathrm{T}}(T/2)\widetilde{G}_i \mathscr{Z}(T/2),\ \widetilde{M}_i = \mathscr{Z}(T/2)\widetilde{G}_i \mathscr{Z}^{\mathrm{T}}(T/2)\widetilde{G}_i,$$

где $\widetilde{G}_i = G_i J$, $i = 1{,}2$.

Структура матрицы монодромии симметричного решения III

Пусть решение $Z(t, Z_0)$ двояко симметрично, начальное условие $Z_0 \in \Sigma_i$, а через четверть периода $Z(T/4, Z_0) \in \Sigma_{3-i}$. Тогда матрицы монодромии, вычисленные в точках Z_0 и $Z(T/4)$ вычисляются по формулам

$$M_i = \left[\widetilde{G}_i \mathscr{Z}^{\mathrm{T}}(T/4)\widetilde{G}_{3-i}\mathscr{Z}(T/4)\right]^2,$$
$$\widetilde{M}_i = \left[\mathscr{Z}(T/4)\widetilde{G}_i\mathscr{Z}^{\mathrm{T}}(T/4)\widetilde{G}_{3-i}\right]^2.$$

Матрицы M_i и $\widetilde{M}_i$ подобны, но преобразование подобия слишком громоздко.

Внутренняя симметрия матрицы M

Особая структура матрицы монодромии симметричного периодического решения приводит к наличию некоторой внутренней симметрии матрицы M:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & -m_{14} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{11} & -m_{21} \\ -m_{32} & m_{42} & -m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Двойная симметрия периодического решения не приводит к появлению новых внутренних симметрий в матрице M.

Продолжение периодического решения

Пусть известно некоторое периодическое решение $Z(t, Z_0)$ с периодом T. Если параметры периодического решения изменяются гладко вдоль семейства, то вблизи него должно быть периодическое решение $Z(t) + \delta Z(t)$ с периодом $T + \delta T$. Малые добавки δZ и δT должны удовлетворять линейной однородной системе

$$(M - E)\delta Z(T) + J \operatorname{grad} H(Z_0)\delta T = 0. \qquad (2)$$

Количество решений этой системы определяется структурой матрицы монодромии M.

Поскольку матрица M имеет собственное значение 1, то $\operatorname{rang}(M - E | J \operatorname{grad} H(Z_0)) \leqslant 3$, и система имеет по крайней мере 2 семейства решений.

Преобразования матрицы монодромии M I

Выполним линейное преобразование матрицы M, упрощающее ее структуру и облегчающее ее анализ. Это преобразование должно быть симплектическим для сохранения каноничности и ортогональным. Для симметричных решений преобразования должны сохранять внутреннюю симметрию матрицы M.

Пусть $\mathscr{H} = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ — нормированный вектор $\operatorname{grad} H(Z_0)$. Б.Б. Крейсманом была предложена матрица

$$A = \begin{pmatrix} H_3 & -H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & -H_1 \\ -H_1 & -H_2 & H_3 & -H_4 \\ -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразования матрицы монодромии M II

Если решение симметрично и $Z_0 \in \Sigma_i$, то матрица A_i имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -H_4 & H_1 & 0 \\ H_4 & 0 & 0 & -H_1 \\ -H_1 & 0 & 0 & -H_4 \\ 0 & H_1 & H_4 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} H_3 & 0 & 0 & H_2 \\ 0 & H_3 & H_2 & 0 \\ 0 & -H_2 & H_3 & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}$$

Имеется однопараметрическое семейство матриц преобразования A, но из них только 2 матрицы сохраняют внутренние симметрии матрицы монодромии M.

Преобразования матрицы монодромии M III

Утверждение

Пусть симплектическая матрица M имеет собственное значение 1, которому соответствует собственный вектор $J\mathscr{H}$. Тогда матрица $N = A^{\mathrm{T}} M A$ имеет вид

$$N = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}.$$

Если M есть матрица монодромии симметричного решения, то

$$n_{22} = n_{44}, \quad n_{23} = -n_{14}, \quad n_{43} = -n_{12}.$$

Преобразования матрицы монодромии M IV

Из структуры матрицы N следует, что собственное значение 1 не является простым и ему соответствует Жорданова клетка размера 2.

Схема доказательства

Из условий $M^{\mathrm{T}}JM - J = 0$ и $MJ\mathscr{H} - J\mathscr{H} = 0$ строится полиномиальный идеал $\mathscr{I}$, для которого вычисляется базис Грёбнера с заданным лексикографическим порядком, например, pure lex. Затем для каждого элемента матрицы N выполняется приведение к нормальной форме в полученном базисе.

Общее решение I

После преобразования Крейсмана система (2) есть

$$(N - E)\delta\widetilde{Z} + v\delta T A_1 = 0, \tag{3}$$

где $v = |J \operatorname{grad} H(Z_0)|$, A_1 — первый столбец матрицы A. Общее решение системы(3) имеет вид

$$\delta\widetilde{Z}_1 = C_1,\ \delta\widetilde{Z}_j = m_j C_2,\ j = \overline{2,4},\ \delta T = m_5 C_2/v,$$

где C_i — произвольные постоянные, m_j — миноры матрицы $(N - E)$, $m_5 = -\sum_{j=2}^{4} n_{1j} m_j$. Вектор $B = \sum_{j=2}^{4} m_j A_j$ дает направление касательной к семейству периодических решений.

Общее решение II

Случай симметричного решения

Если решение $Z(t, Z_0)$ симметрично, то минор $m_4 \equiv 0$, тогда

$$B_1 = m_2 \begin{pmatrix} -H_4 \\ 0 \\ 0 \\ H_1 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \\ -H_4 \end{pmatrix}, \; B_2 = m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ H_3 \\ -H_2 \\ 0 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \\ H_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. продолжение всегда есть симметричное решение.

Случай $S = 1$ I

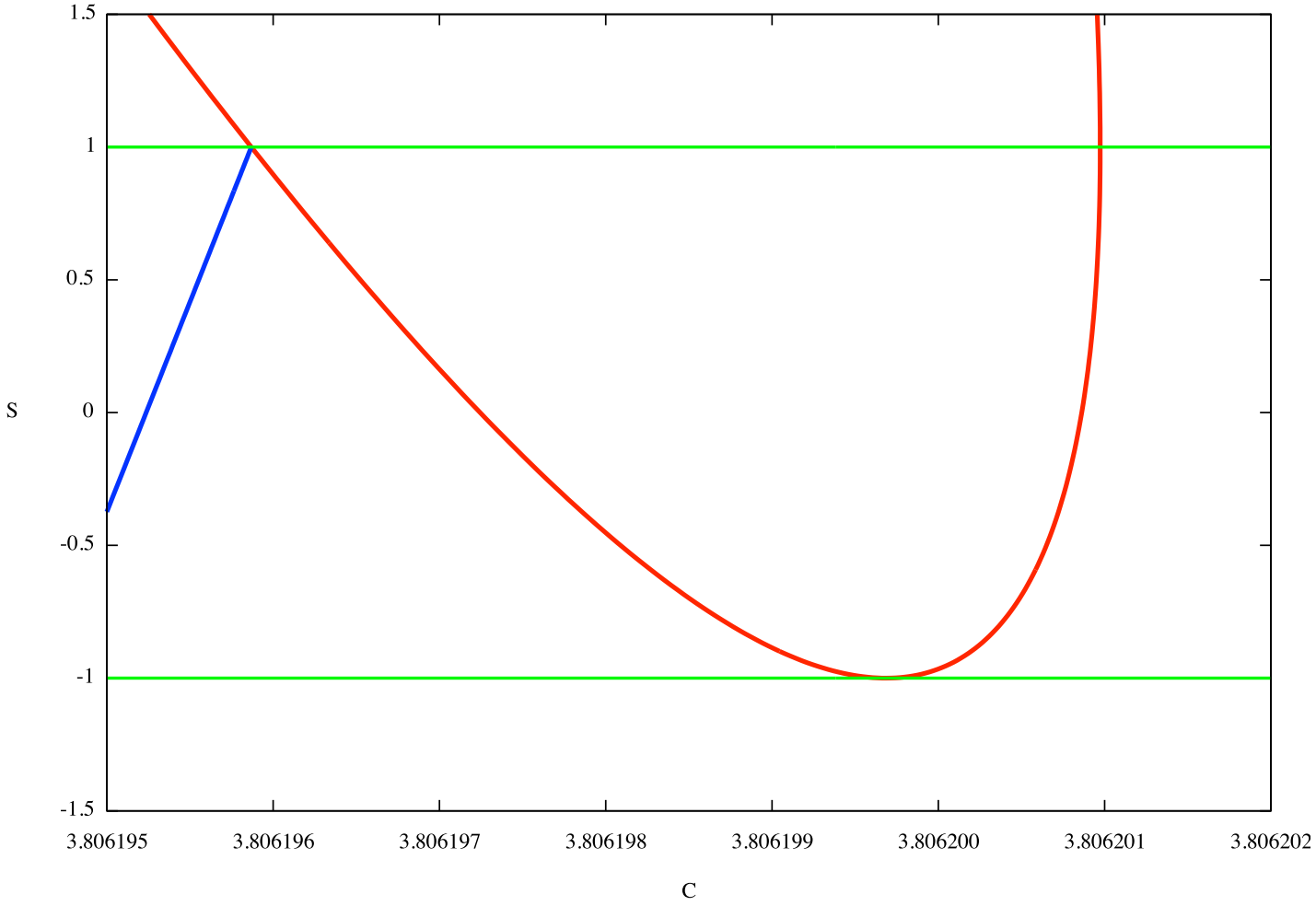
Пусть минор $m_3 = 0$,

тогда матрица N имеет собственное значение кратности 4, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda - 1)^4$, а проекция вектора $B = m_2 A_2$ на вектор $\mathscr{H}$ равна 0. В этой точке семейство достигает экстремума по H и происходит смена устойчивости

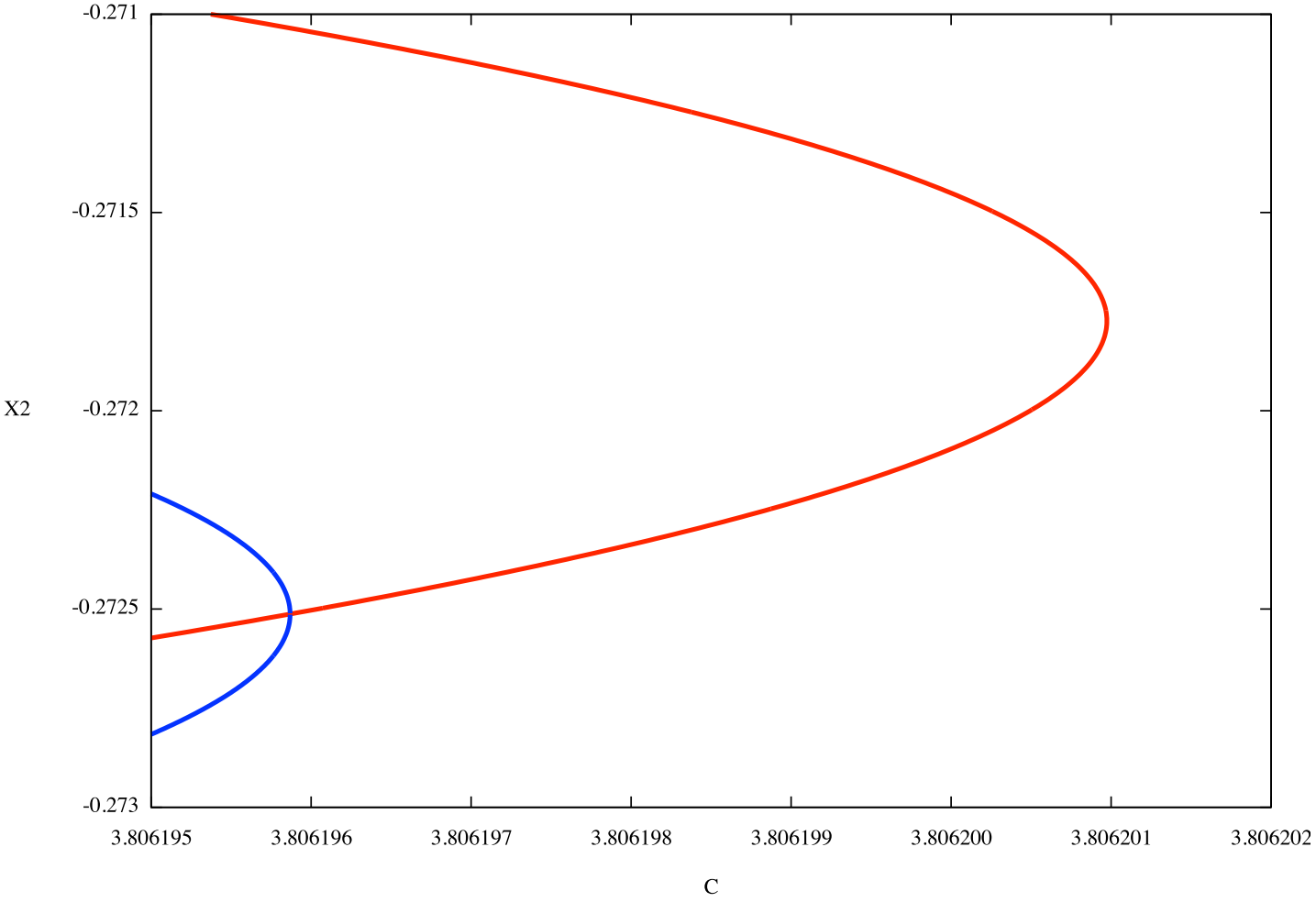
Пусть все миноры $m_j = 0$, $j = \overline{2,5}$,

и $T/2$ не есть период, тогда матрица N имеет два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda - 1)^2$, а соответствующие им собственные векторы коллинеарны векторам A_3 и A_4, соответственно. Первый вектор соответствует исходному симметричному семейству, второй — порожденному несимметричному семейству, достигающему в точке ветвления экстремума по H.

Случай $S = 1$ II


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
S
3.806195
3.806196
3.806197
3.806198
3.806199
3.806200
3.806201
3.806202
C

Случай $S = 1$ III



Случай $S = -1$ I

Если $Z(t)$ однократно симметрично,

то матрица N имеет 2 элементарных делителя $(\lambda-1)^2$ и $(\lambda+1)^2$. Первому соответствует собственный вектор, дающий направление основного семейства, второму — собственный вектор дающий направление семейства с удвоенным периодом, которое сохраняет симметрию и достигает экстремума по H.

Случай $S = -1$ II

Если $Z(t)$ двояко симметрично,

то его индекс устойчивости есть

$$S = 2\left(-1 - 2y_{32}y_{14} - 2y_{41}y_{23} + 4y_{11}y_{33} - 2y_{31}y_{13} + 2y_{42}y_{24}\right)^2 - 1,$$

где y_{ij} элементы матрицанта уравнения в вариациях, вычисленного на четверти периода.

При $S = -1$ матрица N имеет три элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$, $\lambda + 1$ и $\lambda + 1$. Двум последним соответствуют собственные векторы, задающие направление семейств с удвоенным периодом и одной из симметрий.

Периодические решения второго рода

Утверждение

Пусть двояко симметричное периодическое решение с периодом T имеет индекс устойчивости $S = \cos 2\pi p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда в его окрестности имеется

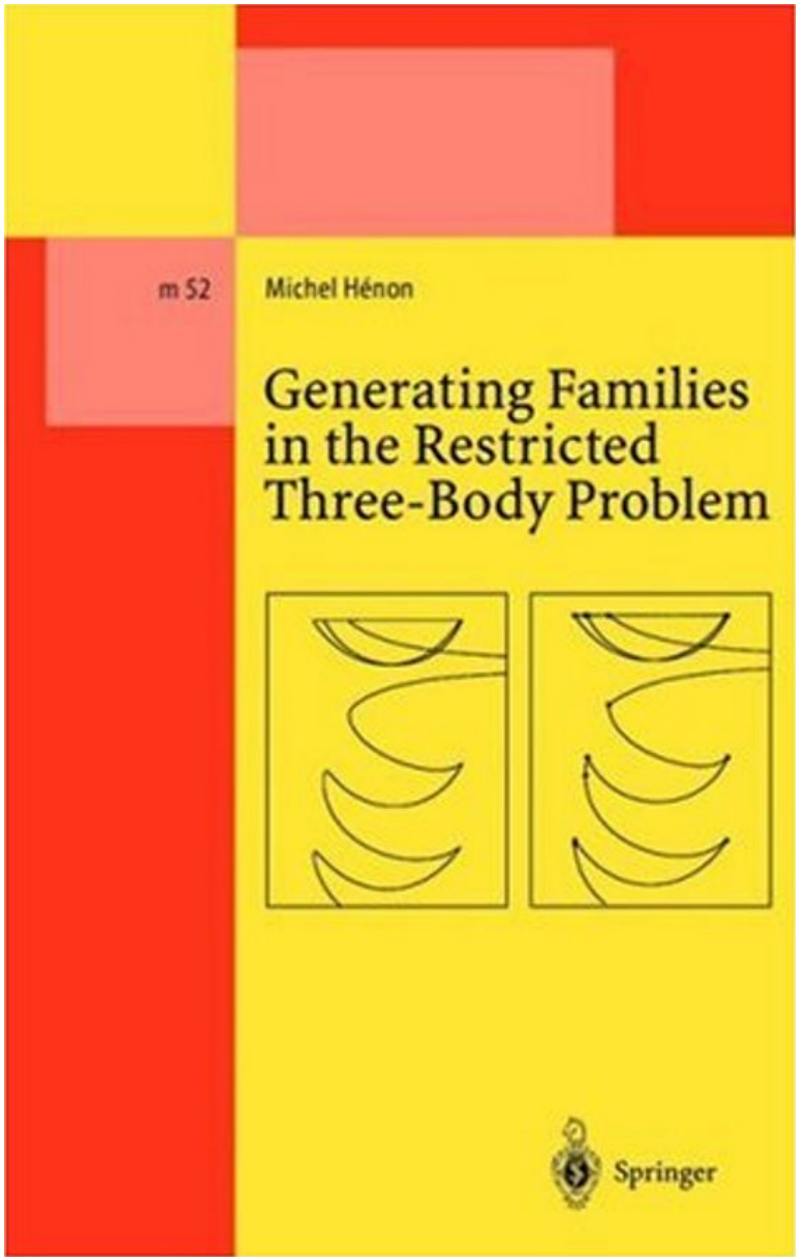
- одно семейство двояко симметричных решений с периодом qT, если числа p и q нечетные;
- четыре семейства однократно симметричных попарно взаимно симметричных решений с периодом qT, если хотя бы одно из чисел p или q четное.

Во всех случаях кроме случая $p/q = 1/3$, семейство второго рода достигает экстремума по H в точке ветвления.

Задача Хилла

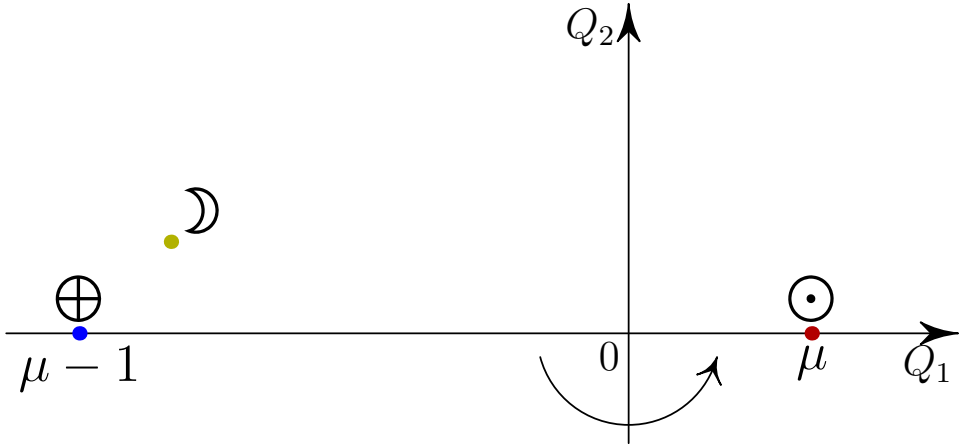
"...Hill's problem, which is non-trivial, non-integrable dynamical system; they cannot be analyzed in terms of two-body problem, and can in fact be obtained only through numerical investigation..."

M. Hénon



Формулировка

Задача Хилла является предельным случаем ограниченной задачи трех тел и может быть получена с помощью т. н.

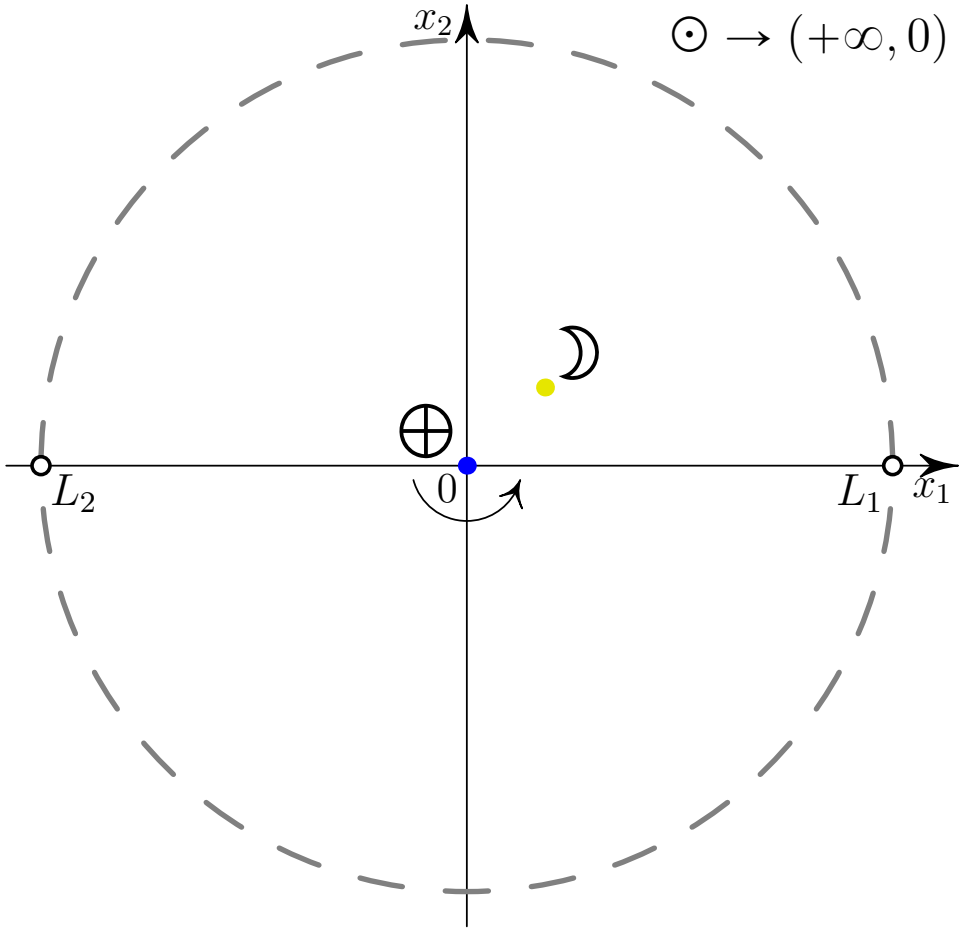


Формулировка

Задача Хилла является предельным случаем ограниченной задачи трех тел и может быть получена с помощью т. н.

Преобразования Хилла

$$Q_1 = \mu^{1/3} x_1 + \mu - 1$$
$$P_1 = \mu^{1/3} y_1$$
$$Q_2 = \mu^{1/3} x_2$$
$$P_2 = \mu^{1/3} y_2 + \mu - 1$$



Структура гамильтониана

Гамильтониан задачи Хилла

$$H = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{r} - \frac{1}{2}x_1^2$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

- кинетическая энергия
- Кориолисовы слагаемые
- потенциал центробежных сил
- потенциал Земли
- потенциал бесконечно удаленного Солнца

Уравнения движения и первый интеграл

Канонические уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = y_2 + 2x_1 - \dfrac{x_1}{r^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -y_1 - x_2 - \dfrac{x_2}{r^3}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Интеграл Якоби

$$\mathscr{J} = 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C, \; C = -2H.$$

Симметрии периодических решений

Уравнения движения инвариантны относительно канонических преобразований

$$\Sigma_1 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \to (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2)$$
$$\Sigma_2 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \to (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2)$$
$$\Sigma_{12} \equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2 : (t, x_1, x_2, x_1, x_2) \to (t, -x_1, -x_2, -y_1, -y_2)$$

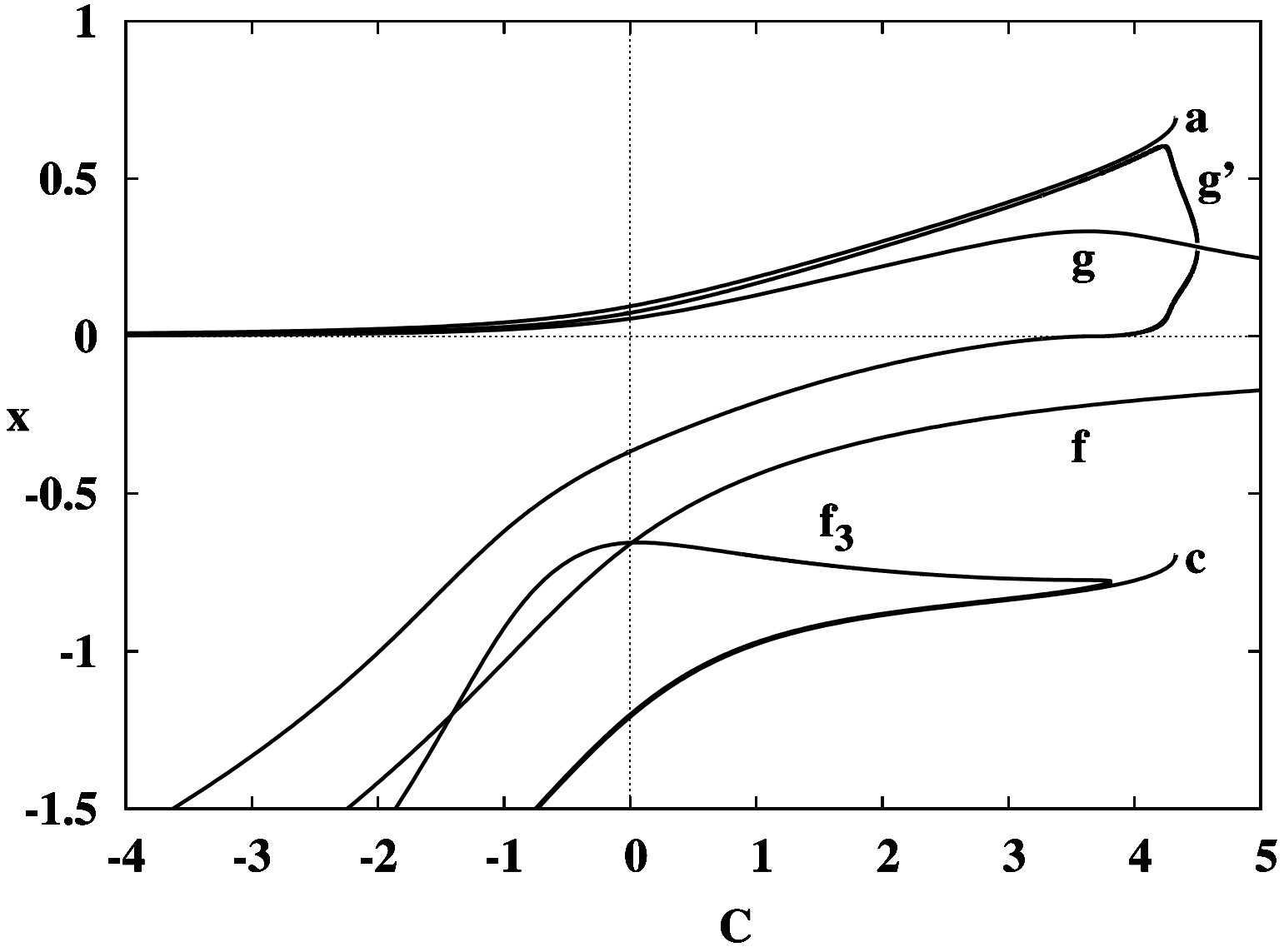
Все периодические решения относятся к одной из групп:

Несимметричные — изменяются под действием любого из преобразований;

Однократно симметричные — инвариантные относительно только одного из преобразований;

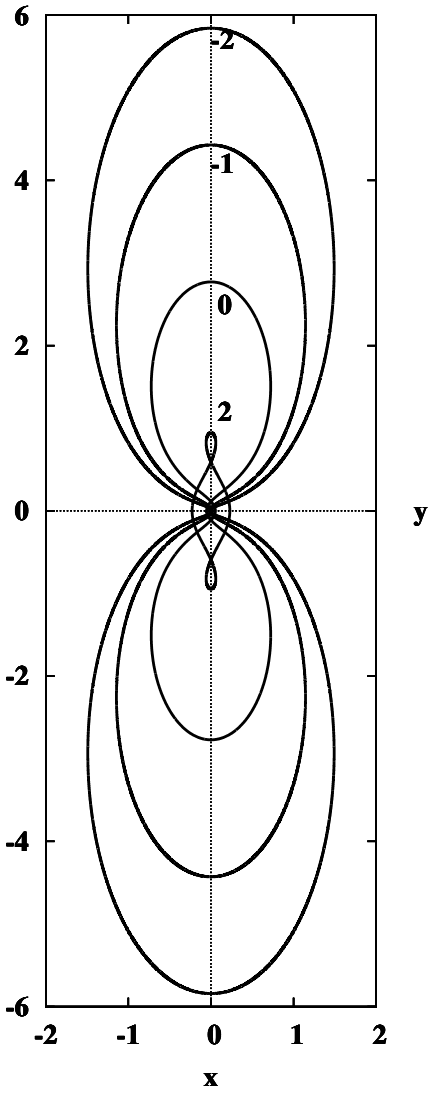
Двояко симметричные — инвариантные относительно любого из преобразований.

Характеристики классических семейств



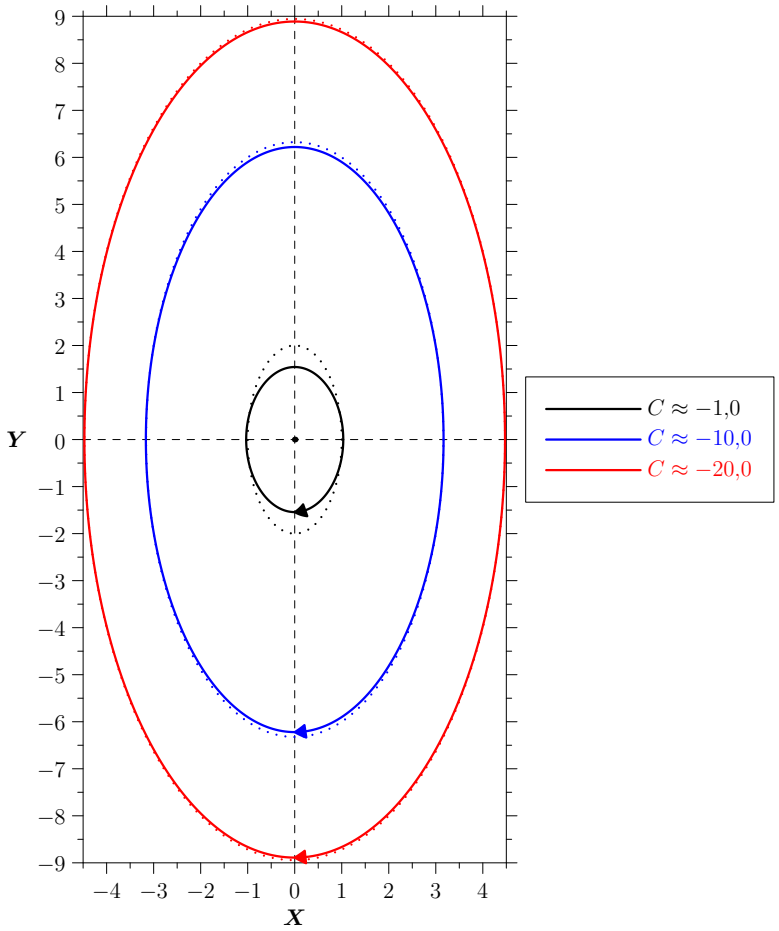
Классические семейства периодических решений

- g – двояко симметричные прямые орбиты (Hill, Kelvin, Matukuma, Hénon).



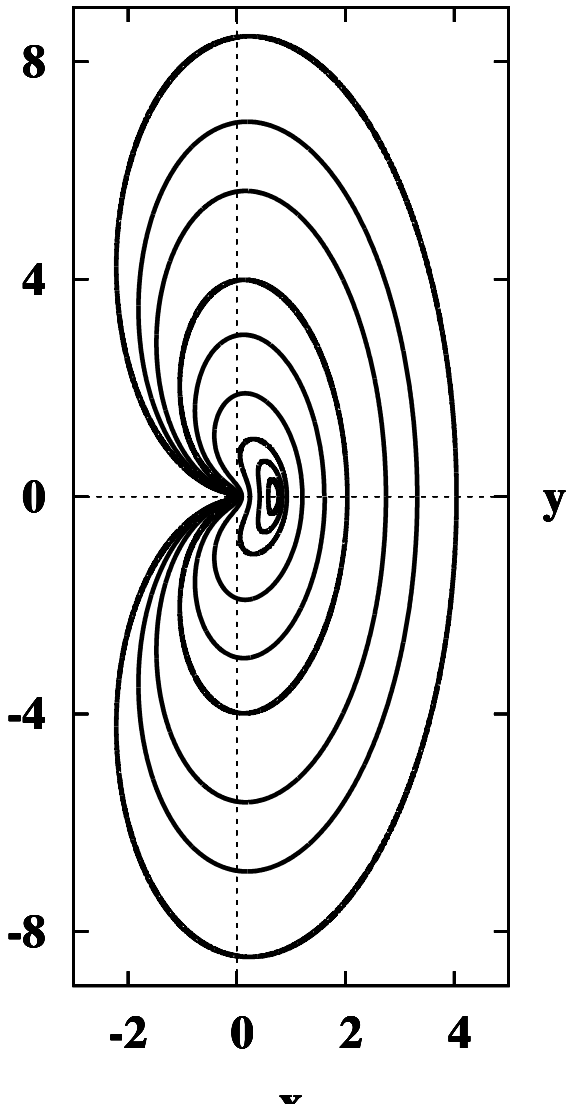
Классические семейства периодических решений

- g – двояко симметричные прямые орбиты (Hill, Kelvin, Matukuma, Hénon).
- f – двояко симметричные обратные орбиты (Jackson, Matukuma, Hénon).



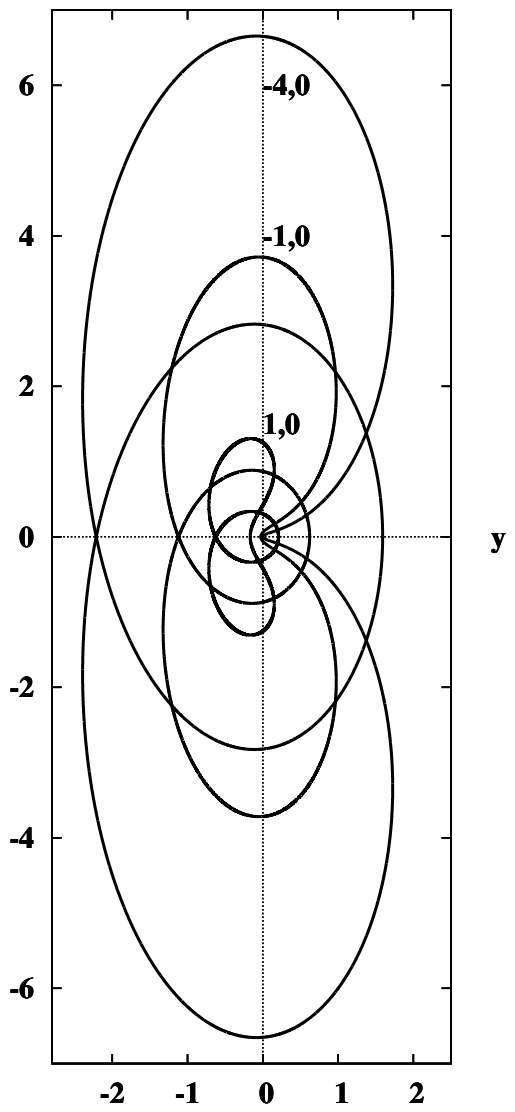
Классические семейства периодических решений

- g – двояко симметричные прямые орбиты (Hill, Kelvin, Matukuma, Hénon).
- f – двояко симметричные обратные орбиты (Jackson, Matukuma, Hénon).
- a, c – Σ_1–симметричные либрационные орбиты (Matukuma, Hénon).



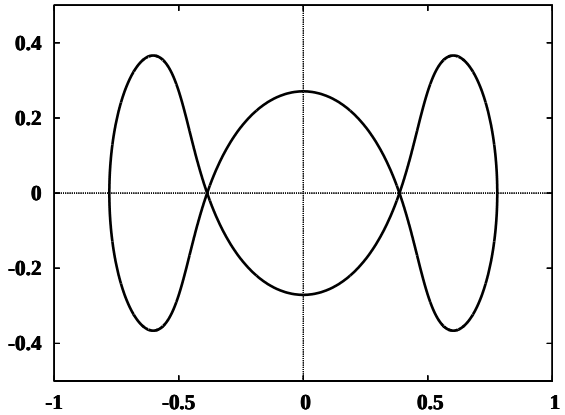
Классические семейства периодических решений

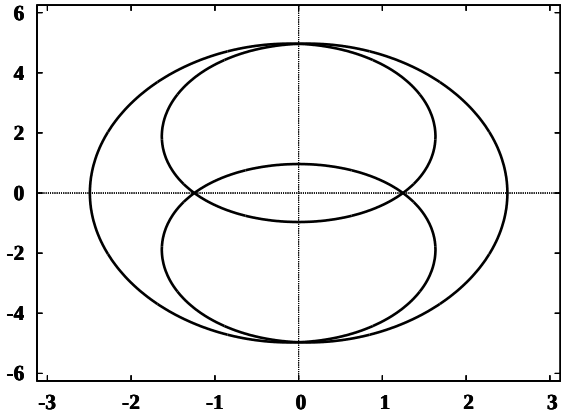
- g – двояко симметричные прямые орбиты (Hill, Kelvin, Matukuma, Hénon).
- f – двояко симметричные обратные орбиты (Jackson, Matukuma, Hénon).
- a, c – Σ_1–симметричные либрационные орбиты (Matukuma, Hénon).
- g' – Σ_1–симметричные прямые спутниковые орбиты (Matukuma, Hénon).



Классические семейства периодических решений

- g – двояко симметричные прямые орбиты (Hill, Kelvin, Matukuma, Hénon).
- f – двояко симметричные обратные орбиты (Jackson, Matukuma, Hénon).
- a, c – Σ_1–симметричные либрационные орбиты (Matukuma, Hénon).
- g' – Σ_1–симметричные прямые спутниковые орбиты (Matukuma, Hénon).
- f_3 – двояко симметричные обратные орбиты (Hénon).



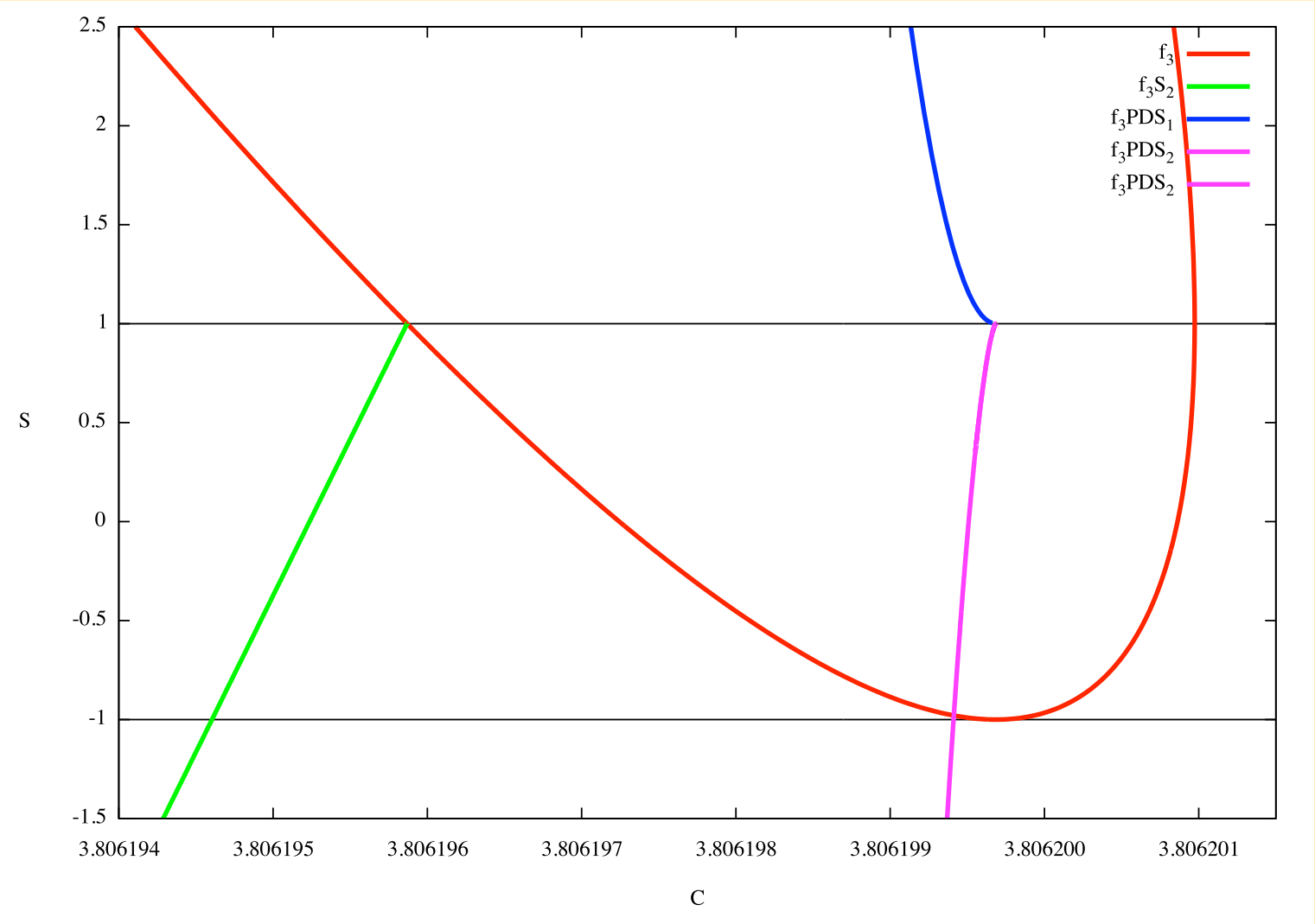


Новые семейства двояко симметричных решений

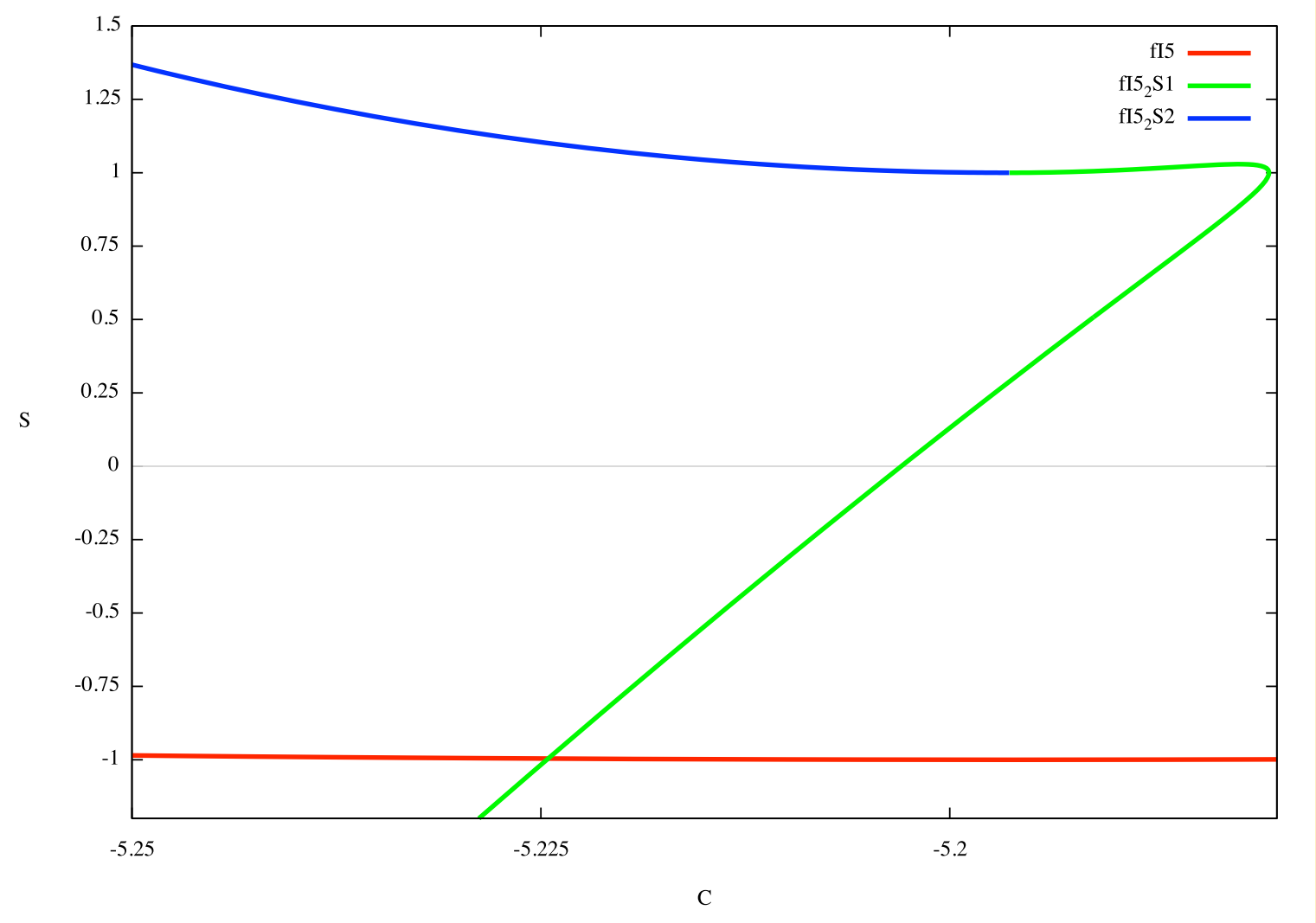
Было обнаружено два сценария взаимодействия семейства двояко симметричных решений с семействами однократно симметричных двояко периодических решений.

- Первый сценарий: в окрестности двояко симметричного решения с периодом T при $S < -1$ (или $S > -1$) имеется две пары взаимно симметричных семейств однократно симметричных решений с периодом $T_1 \approx 2T$. Одна пара семейств при этом устойчива, а другая пара неустойчива.
- Второй сценарий: в окрестности двояко симметричного решения с периодом T при $S < -1$ имеется одна пара семейств однократно симметричных решений с одним типом симметрии и периодом T_1, а при $S > -1$ имеется другая пара семейств однократно симметричных решений с другим типом симметрии и периодом T_1.

Первый сценарий реализуется для семейства f_3.



Второй сценарий реализуется для семейства пятиоборотных квазиспутниковых периодических решений.



Библиография I

Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. Серия «Классики науки». М. : Наука, 1971. 772 с.

Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М. : Наука, 1972. 720 с.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.

Крейсман Б. Б. Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел // Космические исследования. 2005. Т. 43, № 2. С. 1–23.

Библиография II

Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability // Astron. & Astrophys. 1969. Vol. 1. P. 223–238.

Батхин А. Б., Батхина Н. В. Задача Хилла. Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!