

О символьном суммировании и ускорении
сходимости
тригонометрических рядов
Семинар «Компьютерная алгебра»
факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН

Малышев К.Ю.

НИИЯФ МГУ, РУДН имени Патриса Лумумбы

18.03.2026, ver. June 28, 2026

Введение

Вычислительная работа с рядами Фурье необходима для математического моделирования физических процессов и явлений.

- Ускорение сходимости медленно-сходящихся рядов [Скобелев], [Галишникова, Ильинский], [Делицын], [Нерсисян], [Хромов], [Чернышёв А.Д.]
- Суммирование рядов в конечном виде [Найдюк, Прядиев, Ситник], [Репников, Хухрянский], [Рыхлов]

Введение

Указанные проблемы представляют интерес не только для математического моделирования и физики, но и для компьютерной алгебры:

- как составная часть алгоритмов вычисления ("доведение до числа") специальных функций [Richard E. Crandal]
- как составная часть символьных алгоритмов ("без ошибки округления", "алгебра").

Задача символьного суммирования ' — классическая задача компьютерной алгебры [Абрамов], [Петковшек], [Зима], [Егорычев], [Кытманов], ...

Цель работы

Цель:

- Разработка алгоритмов и программ для символьных вычислений с рядами Фурье, рядами по собственным функциям, и др. с возможностями выделения особенностей, ускорения сходимости, получения конечных выражений в элементарных функциях.

Часть излагаемого материала опубликована в работе Malyshev K., Malykh M.D., Sevastianov L.A., Zorin A.V., On Summation of Fourier Series in Finite Form Using Generalized Functions. Mathematics 2025, 13, 538.

Постановка задачи

Рассматриваются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{Q} \sin nx = y, x \in [-\pi, \pi], P \in \mathbb{Q}[n], Q \in \mathbb{Q}[n].$$

- Аналогичные ряды изучались А.Н. Крыловым в работах по ускорению сходимости и его применению к техническим вопросам.
- Данный класс рядов занимает особое место в математическом моделировании: возникает при рассмотрении весьма широкого круга явлений и процессов.
- Это простейший случай рядов по собственным функциям дифференциальных операторов. Результаты, относящиеся к данному случаю могут быть полезны для исследования других рядов. (напр., см. [Дикий], [Пак И.Н.])

Замечательные расходящиеся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi\delta(x), x \in [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos nx = -\frac{1}{4} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{-2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx = -\pi\delta'(x), x \in [-\pi, \pi].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n) \sin nx, x \in [-\pi, \pi], P \in \mathbb{Q}[n]$$

А.Н. Крылов и Л.Эйлер о расходящихся рядах

- Все эти формулы в математике совершенно бесполезны, и сам Эйлер, хотя и привёл их и множество других им подобных, но ни в каких приложениях ими не пользуется, этим самым оттеняя как бы их бесполезность. *А.Н.Крылов*
- Мы устраним все трудности и кажущиеся противоречия, приписывая слову сумма смысл, отличающийся от того, который этому слову обычно придают, и будем называть выражение, из которого при разложении следует указанный ряд, суммой его. *Эйлер*

Можем ли мы использовать эти формулы для символьных вычислений?

Теория Л. Шварца (1950)

- Пространство основных функций: $\mathcal{D}$. Условие периодичности, C^∞
- Пространство обобщённых функций $\mathcal{D}'$. Линейные непрерывные функционалы над $\mathcal{D}$.
- $\widehat{\sin nx} \in \mathcal{D}'$, $\widehat{\cos nx} \in \mathcal{D}'$, $\sin nx \in \mathcal{D}$, $\cos nx \in \mathcal{D}$

Theorem

Всякий элемент $f \in \mathcal{D}'$ единственным образом представляется в виде ряда Фурье, сходящегося в $\mathcal{D}'$:

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Ряды Фурье как обобщённые функции [Shwartz]

Theorem

Пусть $a_n = O(n^k)$, $b_n = O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда тригонометрический ряд с коэффициентами a_n, b_n сходится в $\mathfrak{D}'$ к некоторому элементу $u \in \mathfrak{D}'$ и является рядом Фурье для u .

Theorem

Ряд Фурье элемента пространства $\mathfrak{D}'$ допускает почленное дифференцирование любого порядка. При этом получаются ряды Фурье для производных обобщённых функций из $\mathfrak{D}'$.

Ряды Фурье как обобщённые функции [Shwartz]

Lemma

В пространстве $\mathcal{D}'$ справедливы формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\cos nx} = \pi \widehat{\delta(x, 0)} - \frac{1}{2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\sin nx} = \frac{1}{2} \widehat{\cot \frac{x}{2}}.$$

Зависимость от функционального пространства

Example

$$u = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx = \widehat{\delta(x, \pi)} \in \mathfrak{D}';$$

$$D'(-\pi, \pi) \ni u = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx \rightharpoonup 0 \in D'(-\pi, \pi).$$

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) \in D'(\mathbb{R})$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi) \in D'(\mathbb{R})$$

Суммирование сходящегося ряда Фурье. Шаг 1.

Theorem

Пусть $b_n \in \mathbb{R}(n)$. Тогда найдется такой линейный дифференциальный оператор L и такой многочлен $B_n \in \mathbb{R}[n]$, что сумма ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

является решением в смысле $\mathfrak{D}'$ линейного дифференциального уравнения

$$L[u] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \quad B_n \in \mathbb{R}[n]. \quad (1)$$

Введём для оператора $L \in \mathbb{R}[D^2]$, аннигилирующего знаменатель $Q_n \in \mathbb{R}[n]$ обозначение L_Q .

Суммирование сходящегося ряда Фурье. Шаг 1.

Theorem

Пусть $Q_n \in \mathbb{R}[n^2]$:

$$Q_n = q_N n^{2N} + q_{N-1} n^{2(N-1)} + \dots + q_0.$$

Тогда оператор $L \in \mathbb{R}[D^2]$ имеет вид:

$$L = (-1)^N q_N D^{2N} + (-1)^{N-1} q_{N-1} D^{2(N-1)} + \dots + q_0.$$

Коэффициенты Фурье $B_n \in \mathbb{R}[n]$ имеют вид:

$$B_n = P_n.$$

Если же $Q_n \in \mathbb{Q}[n]$, нужно рассмотреть $Q_n \cdot Q_{-n} \in \mathbb{Q}[n^2]$.

Суммирование сходящегося ряда Фурье. Шаг 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$, $B_n \in \mathbb{R}[n]$ является конечной суммой константы, дельта-функции, котангенса, их производных, обозначим её через f .
- Необходимо найти решение уравнения $L[u] = f$ в пространстве $\mathcal{D}'$.

Обыкновенные дифф. уравнения в $\mathfrak{D}'$

Обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью из $\mathfrak{D}'$ может не иметь решения в этом пространстве. Пример Л.Шварца:

Example

$$L[u] = Du = \hat{\delta}(x)$$

Не имеет решения в $\mathfrak{D}'$.

$$(D\mathfrak{h}, \varphi) = -(\mathfrak{h}, D\varphi) = - \int_0^{\pi} D\varphi(x) dx = \varphi(0) - \varphi(\pi),$$

$$D\mathfrak{h} = \hat{\delta}(x) - \hat{\delta}(\pi).$$

Решение дифференциального уравнения

Theorem

Пусть оператор L имеет порядок q — наибольший порядок дифференцирования в выражении L . Пусть

$$f = \alpha + \alpha_0 \delta(x) + \sum_{n=1}^{q-1} \alpha_n D^n \delta(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Пусть оператор L не имеет нулевого собственного значения при граничных условиях периодичности. Тогда существует единственный элемент $u \in \mathfrak{D}'$, удовлетворяющий уравнению $L[u] = f$ в смысле $\mathfrak{D}'$. Данный элемент выражается в конечном виде кусочно-элементарных функций переменной x . Это выражение может быть найдено за конечное число действий.

Суммирование рядов А.Н. Крылова

Theorem

Пусть после аннигиляции коэффициент B_n — нечетная функция n . Пусть оператор L_Q не имеет нулевого собственного значения при граничных условиях периодичности. Тогда ряд Фурье выражается в виде кусочно-элементарной функции.

Замечание о граничных условиях

Theorem

Пусть коэффициент b_n является правильной дробью. Тогда $u \in C^\infty([-\pi, 0) \cup (0, \pi])$

Это позволяет применять для поиска суммы ряда Фурье ещё и условия Дирихле, вместо условий периодичности.

Нахождение суммы. "Ряды Крылова"

Предположим, что f_{PQ} является суммой дельта-функции, её производных, и константы.

$$f_{PQ} = a + \sum_{k=0}^M d_k \delta^{(k)}(x)$$

Тогда решение краевой задачи имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + h(x) \int_0^x a K(x-s) ds + h(x) \sum_{k=0}^M d_k K^{(k)}(x),$$

$K(x)$ —функция Коши, $h(x)$ —функция Хевисайда, $y_1, \dots, y_n$ — частные решения однородного уравнения.

Эквивалентно – использование явных выражений для функции Грина и её производных.

Пример ряда из класса Крылова

Example

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+n^4} \sin nx$$

Ср. [Крылов], [Пак], [Толстов].

$$L[u] = (D^4 + 1)u = \pi D^3 \delta(x), \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$u(-\pi) = u(\pi) = 0, \quad D^2 u(-\pi) = D^2 u(\pi) = 0.$$

Решение задачи:

$$u = \frac{\pi}{2} \frac{\cosh \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{2\pi+x}{\sqrt{2}} - \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh \frac{2\pi+x}{\sqrt{2}}}{\cosh \pi\sqrt{2} - \cos \pi\sqrt{2}} + \pi \mathfrak{h}(x) \cosh \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Пусть нарушены условия для класса Крылова

Theorem

Пусть после аннигиляции коэффициент B_n не является нечетной функцией n . Пусть оператор L_Q не имеет нулевого собственного значения при граничных условиях периодичности. Пусть если все корни полинома $Q_n \in \mathbb{R}[n]$ являются простыми и принадлежат полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда ряд Фурье может быть выражен в конечном виде.

Вопрос об условиях, при которых u выражается в конечном виде сводится к задаче интегрирования в элементарных функциях по Лиувиллю: к вопросу об элементарности квадратур, содержащих квазиполиномы и котангенс. Сформулировано простейшее достаточное условие.

Пусть нарушены условия для класса Крылова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\lambda} \sin nx = y, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\lambda} \cos nx = z.$$

"Annihilation":

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = \pi \delta(1, x) + \frac{\lambda}{2} \cot \frac{x}{2}, \quad y(-\pi) = 0, y(\pi) = 0;$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda^2 z = -\frac{\lambda}{2} + \pi \lambda \delta(x) - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{-2}, \quad z'(-\pi) = 0, z'(\pi) = 0.$$

Возможность находить выражение сумм в элементарных функциях сводится к возможности находить интеграл вида

$$\int \sin \lambda x \cot \frac{x}{2} dx.$$

Это возможно, если λ рациональное число [Liouville].

Преобразование Гильберта

$$u \in \mathfrak{D}', \quad \mathbb{H}u = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cot \frac{t-x}{2} dt$$

Можно доказать, что суммирование ряда с рациональным коэффициентом разложения сводится к нахождению сумм рядов класса Крылова и их Гильбертовых образов. Заметим, что

$$\mathbb{H}^2 = -1.$$

Теорема о ряде с рациональным коэффициентом разложения

Theorem

Имеет место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{Q} \sin nx = K_1 + \mathbb{H}K_2,$$

где K_1 – ряд класса Крылова по синусам, K_2 – ряд класса Крылова по косинусам, $\mathbb{H}$ – преобразование Гильберта.

Lemma

Всякий ряд Фурье класса Крылова по косинусам является производной (в $\mathfrak{D}'$) от ряда класса Крылова по синусам.

Что дальше ?

Далее рассмотрим некоторые примеры, когда полученные результаты могут быть полезны для исследования рядов, не удовлетворяющих перечисленным выше условиям теорем.

Не-Крыловские ряды.

Идея взята в работе [Крутинь, Тучкин, Шестопалов, 1991]

Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(iny - nz)}{n^k}, \quad k > 1$$

может быть сделана как угодно быстрой. Заметим, что

$$\frac{1}{n^k} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)} = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Заметим, что ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(iny - nz)}{n + m}$$

—суммируются в конечном виде.

Не-Крыловские ряды

Наши результаты позволяют, для тригонометрических рядов, улучшать сходимость за меньшее число шагов.

Преобразование Куммера. Не-Крыловские ряды.

Метод А.Н. Крылова можно рассматривать как частный случай преобразования Куммера

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - u_n) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где необходимо подобрать u_n так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (w_n - u_n)$$

—быстросходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

—суммируется в конечном виде

Новые ряды-1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + \frac{1}{4}} = i \left({}_2F_1 \left(-\frac{i}{2}, 1; 1 - \frac{i}{2}, e^{-ix} \right) + \dots \right)$$

Новые ряды-1

Легко видеть,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + \frac{1}{4}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4 - \frac{1}{16}}$$

–быстросходящийся ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - \frac{1}{4}} = -2 \sin \frac{x}{2} \log \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

– конечное выражение.

Новые ряды-2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4 \pm \frac{1}{16}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4 + \frac{1}{16}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-b)(n-c)(n+b+c)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-b^2 - bc - c^2)n^2 + (b^2c + bc^2)n - \frac{1}{16}}{(n^4 - \frac{1}{16})n(n-b)(n-c)(n+b+c)} \sin nx = O\left(\frac{1}{n^6}\right) \end{aligned}$$

Надо:

$$b \in \mathbb{Q}, \quad c \in \mathbb{Q}, \quad b \neq c \neq 0.$$

Выводы

- Представлен алгоритм нахождения конечного выражения для суммы тригонометрического ряда Фурье с рациональным коэффициентом разложения, основанный на теории обобщённых функций.
- Использование обобщённых функций позволяет сводить вопрос о предствимости суммы ряда Фурье в элементарных функциях к классической задаче об интегрировании в элементарных функциях по Лиувиллю.
- Рассмотрена зависимость результатов от применяемого функционального пространства.

Автор благодарен М.Д. Малых, Л.А. Севастьянову, А.В. Селиверстову, М.В. Алексееву за ценные обсуждения!
This work is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 20-11-20257).

Thank you for your time and attention!

© 2022, Ksaverii Malyshev Creative Commons Attribution-Share Alike
3.0 Unported.

Пример. Задача о функции Грина конечного отрезка

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, 0 < x < \pi, t > \tau, 0 \leq \tau < +\infty; \\ g|_{t=\tau} = 0, \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \delta(x-s), 0 < x < \pi, 0 < s < \pi; \\ g|_{x=0} = 0, g|_{x=l} = 0, \tau < t < +\infty \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\delta(x-s)$ – дельта-функция Дирака. Функция Грина g имеет вид ряда Фурье [Тихонов, Самарский]:

$$g = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n(t-\tau) \sin ns \sin nx. \quad (3)$$

Этот ряд нетрудно выразить в конечном виде.

Пример. Задача о функции Грина конечного отрезка.

Theorem

Ряд фурье для функции Грина g является элементарной функцией следующего вида:

$$g = \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{atan} \left(\cot \frac{t - \tau - x + s}{2} \right) + \operatorname{atan} \left(\cot \frac{t - \tau + x - s}{2} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{atan} \left(\cot \frac{t - \tau - x - s}{2} \right) - \operatorname{atan} \left(\cot \frac{x + s + t - \tau}{2} \right) \right)$$

Вне точек разрыва функции g :

$$g = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x - s + T}{2\pi} \right] + \left[\frac{-x + s + T}{2\pi} \right] - \left[\frac{-x - s + T}{2\pi} \right] - \left[\frac{x + s + T}{2\pi} \right] \right).$$

Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа, «floor», $T = t - \tau$.

Специальные функции

Внешне похожие ряды Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{2k}}, k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{2k+1}}, k = 1, 2, \dots$$

не имеют выражений в виде кусочно-полиномиальных и иных кусочно-элементарных функций. Но для них существуют выражения через Дзита-функции Гурвица, полигамма-функции, и т.д. Общее название: функции Клаузена.

Метод А.Н. Крылова [Л.В. Канторович, В.И. Крылов]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(U \left(\frac{1}{n} \right) \sin nx + V \left(\frac{1}{n} \right) \cos nx \right)$$

$$U \left(\frac{1}{n} \right) = u_1 \frac{1}{n} + u_2 \frac{1}{n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right), u_1, u_2 \in \mathbb{R};$$

$$V \left(\frac{1}{n} \right) = v_1 \frac{1}{n} + v_2 \frac{1}{n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right), v_1, v_2 \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Функция Грина g является примером решения задачи, выражаемого в конечном виде по данному способу ускорения сходимости.

Реализация метода в CAS Sage

Описанная схема ускорения сходимости может быть легко запрограммирована. При этом, код будет корректно работать, если входные функции U и V достаточно хороши. На практике коэффициенты разложения являются функциями номера n , и могут не разлагаться в ряды по степеням $\frac{1}{n}$. В задачах математической физики, к которым А.Н. Крылов применял указанный способ, коэффициенты Фурье являлись рациональными функциями номера n . Поэтому для начала будем полагать, что U и V находятся в поле $\mathbb{Q}(n)$.

- В систему Sage встроена возможность работы с полиномиальными кольцами и их полями частных
- Факт расходимости ряда может быть легко распознан
- Данный класс рядов Фурье суммируется в виде известных трансцендентных функций стандартными средствами CAS

Реализация метода в CAS Sage

Для простоты сегодня оставим в стороне вопросы продолжения функций за пределы отрезка, на котором произведено разложение в ряд Фурье.

Основные функции программы

Here U is the function $U(n)$ given by symbolic expression. The prefixes c and s are used to indicate which series is being considered: by cosines (c) or by sines (s).

- `is_elementary_c(V)` |
- `c_series(V,M)` |, `summation_c(V)` |. Finding a partial sum of order M and a sum in closed form using sage tools.
- `kryloff_c_slow(V,k)` | Returns the expression in closed form for the slowly converging part of the Fourier series. The Taylor polynomial of order k is used. Only those terms are singled out that lead to expressions in elementary functions (logarithm and Bernoulli polynoms).
- `c_rapid(V,k,M)` | Returns the order M partial sum of the accelerated convergence series.

Examples

```
sage: load('kryloff-1.sage')\\
sage: U=x/(x^2+1)\\
sage: summation_s(U)\\
1/4*(imag_part(hypergeometric((2, -I + 1, I + 1), (-I + 2, 1
sage: f=s_series(U,40)\\
sage: g=kryloff_s_slow(U,5)+s_rapid(U,5,3)\\
sage: m=plot([f,g],z,0,2*pi)
```

Замечания

- Данный способ ускорения сходимости действительно позволяет получать конечные выражения, но для весьма узкого класса рядов Фурье
- Суммирование «замечательных» рядов Фурье находится за рамками метода Крылова: выражения для них полагаются известными
- Ускорение сходимости до произвольного порядка убывания коэффициентов Фурье невозможно

Пример. Задача о возбуждении колебаний мягким молоточком

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < \pi, t > \tau, 0 \leq \tau < +\infty; \\ g|_{t=\tau} = 0, \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=\tau} = 0, 0 < x < \pi, 0 < s < \pi; \\ g|_{x=0} = 0, g|_{x=l} = 0, \tau < t < +\infty \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь $f(x, t)$ – известная функция. Колебания описываются рядом Фурье [Тихонов, Самарский]:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nS \cos(n\delta) \cos(n) \sin n(t - \frac{\tau}{2}) \sin nx}{n(1 - \alpha n^2)(1 - \beta n^2)}. \quad (5)$$

Вопрос представимости данного ряда в конечном виде не столь прост.