Необходимое условие и достаточное условие существования рациональных решений однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

П.В. Тришин

Красноярский математический центр

27 сентября 2023 г.

История задачи

Вопрос о разрешимости разностного уравнения

$$\sum_{\alpha_1=0}^{N} p_{\alpha_1}(z_1)R(z_1+\alpha_1)=r(z_1)\ ,$$

где $p_{\alpha_1}(z_1)$ – заданные полиномы, $r(z_1)$ – рациональная функция, в классе рациональных функций поставлен уже более 50 лет назад.

История задачи

В работах 1974 и 1989 гг. найден эффективный алгоритм решения задачи, который не только ищет решение, но и отвечает на вопрос о разрешимости уравнения.

Абрамов С. А. “Решение линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами в поле рациональных функций”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **14**:4 (1974), 1067–1070.

Абрамов С. А. “Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**:11 (1989), 1611–1620.

Краткое описание алгоритма

Основная идея заключается в поиске универсального знаменателя. Универсальный знаменатель – это полином, делящийся на знаменатель любого рационального решения РУ. После того, как знаменатель найден задача решения РУ в классе рациональных функций сводится к задаче решения РУ в классе полиномов.

Алгоритм поиска рациональных и полиномиальных решений реализован в пакете **LREtools** системы компьютерной математики Maple.

Исследования многомерного случая

В 2012 г. доказана алгоритмическая неразрешимость проверки существования полиномиальных решений РУ с полиномиальными коэффициентами.
В 2013 г. доказано аналогичный факт для рациональных решений.

Abramov S., Petkovšek, M., On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations, *Proc. of the 14th Int. Workshop Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2012), Maribor, Slovenia, September 2012; Lect. Notes Comput. Sci.*, 2012, vol. 7442, pp. 1–11.

Парамонов С. В. О рациональных решениях линейных уравнений с частными производными или разностями, *Программирование*, **1**(2013), 11–14.

Постановка задачи

Ставится задача поиска рациональных решений уравнения

$$\sum_{\alpha \in A} p_\alpha R(z_1 + \alpha_1, \ldots, z_n + \alpha_n) = 0 \,, \qquad (1)$$

$A \subset \mathbb{Z}^n$, $p_\alpha \in \mathbb{C}$. Будем считать, что $0 \in A$ и $\mathrm{Ch}(A)$ – имеет размерность n.
Многочлен $P(\zeta) = \sum_{\alpha \in A} p_\alpha \zeta^\alpha$ называется характеристическим многочленом уравнения (1). Используя операторы сдвига $\delta_j R = R(z_1, \ldots, z_j + 1, \ldots, z_n)$ уравнение (1) можно переписать в виде

$$P(\delta) R(z) = 0 \,.$$

Определение рационального решения

Рациональная функция $R(z_1,\dots,z_n)=\frac{N(z_1,\dots,z_n)}{D(z_1,\dots,z_n)}$ является аналитической в дополнении $\mathbb{C}^n\setminus\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}=\{z\in\mathbb{C}^n : D(z)=0\}$. Выражение $\sum_{\alpha\in A}p_\alpha R(z+\alpha)$ определено и голоморфно в дополнении $\mathbb{C}^n\setminus(\mathfrak{S}-A)$, где $\mathfrak{S}-A:=\{z\in\mathbb{C}^n : z+\alpha\in\mathfrak{S},\ \forall\alpha\in A\}$. Будем говорить, что R является *рациональным решением разностного уравнения*, если она удовлетворяет (1) для всех z из множества $\mathbb{C}^n\setminus(\mathfrak{S}-A)$ и не продолжается аналитически в $\mathfrak{S}$.

Одномерный случай

Если $R(z_1)$ рациональное решение уравнения

$$\sum_{\alpha_1=0}^{N} p_{\alpha_1} R(z_1+\alpha_1) = 0 \ , \qquad (2)$$

то $R(z_1)$ имеет конечное число полюсов и всегда найдется полюс z_1^0 с минимальным значением $\mathrm{Re}\, z_1$. Разрешая уравнение (2) относительно слагаемого $p_N R(z_1+N)$ можно построить аналитическое продолжение решения в окрестность полюса z_1^0, ведь все слагаемые $p_{\alpha_1} R(z_1+\alpha_1)$, $\alpha_1 < N$ определены и голоморфны в окрестности точки z_1^0 (данная процедура носит название *метод шагов*). Перебирая все полюса мы построим аналитическое продолжение решения $R(z_1)$ в $\mathbb{C}$.

Пример рационального решения

Функция

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)}$$

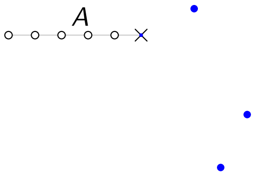
удовлетворяет разностному уравнению

$$R(z_1, z_2) - R(z_1 + 1, z_2 + 1) + R(z_1 + 1, z_2) - R(z_1 + 2, z_2 + 1) = 0 \; .$$

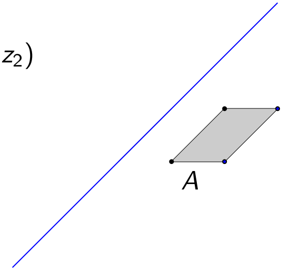
Отличия одномерного и двумерного случая

Метод шагов неприменим для аналитического продолжения решения если $\#(\mathfrak{S} \cap A) \neq 1$.

$(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1)$



$(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2)$



Двумерный случай

Теорема

Если рациональная функция $r(z) = \frac{q(z_1, z_2)}{p(z_1, z_2)}$, *где* q *и* p *взаимно простые многочлены, является решением разностного уравнения (1), то у многоугольника* $\mathrm{Ch}\,(A)$ *есть параллельные стороны и* $r(z)$ *имеет вид*

$$r(z) = \frac{q(z)}{\prod_i \left(\langle z, n_i \rangle - q_i\right)^{k_i}},$$

где n_i *– нормали к параллельным сторонам* $\mathrm{Ch}\,(A)$, $q_i \in \mathbb{C}$, $k_i \geqslant 0$.

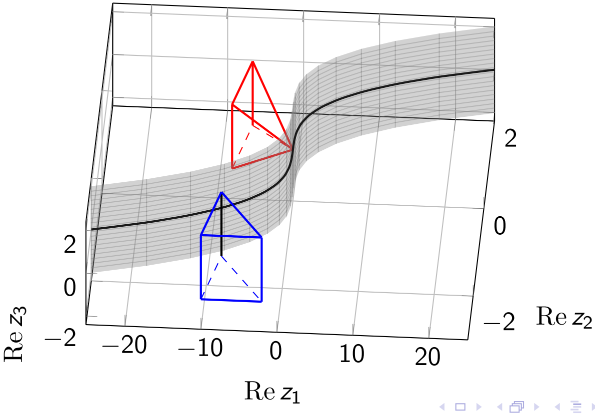
Тришин П.В. О свойствах мероморфных решений разностных уравнений и решениях гамма-типа // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, №3. С. 645–658.

Многомерный случай

Заметим, что многогранник $\mathrm{Ch}(A)$ и особое множество $\mathfrak{S}$ рационального решения уравнения (1) не могут пересекаться только по одной вершине $\mathrm{Ch}(A)$, так как в этом случае, разрешая уравнение (1) относительного слагаемого, соответствующего этой вершине, мы бы смогли построить аналитическое продолжение решения на неприводимую компоненту множества $\mathfrak{S}$.

$\sigma = \mathfrak{S}$

Алгебраическая гиперповерхность σ является расслоением $\sigma^{n-k-1} \times l^k$, где σ^{n-k-1} – поверхность размерности $n-k-1$, а l^k – прямая такая, что $l^k \cap \mathbb{R}^n \supset \Gamma^k$, Γ^k – грань многогранника $\mathrm{Ch}(A)$ размерности k.



Уравнение для σ

Гиперповерхность σ задается следующим равенством

$$D(L_1(z), \ldots, L_{n-k}(z)) = 0 \, , \tag{3}$$

где D – полином от $n-k$ переменных, а L_i – однородные линейные функции такие, что $l^k = \{z \in \mathbb{C}^n : L_i(z) = c_i, i = 1, \ldots, n-k\}$. Причем плоскость $l^k \cap \mathbb{R}^n$, не может пересекать многогранник $\mathrm{Ch}(A)$ по вершине.

С другой стороны

Допустим σ пересекается с множеством A по нескольким точкам, минимум по двум. Тогда $z+\alpha\in\sigma$ (для $z\in U(z_0)\cap\sigma$), где $\alpha=a''-a'$. Значит и для полинома D, определяющего σ, будет выполняться $D(z+\alpha)\equiv D(z)$.
Цепочкой равенств

$$D(z+t\alpha)=D(L^{-1}L(z+t\alpha))=D'(L(z+t\alpha))=D'(L(z)+tL(\alpha)))=$$
$$=D'(L(z)+(0,\ldots,0,t))=D'(L(z))=D(L^{-1}L(z))=D(z)\ ,$$

где $D'(w)=D(L^{-1}(w))$, мы показываем, что на слоях $z+t\alpha$ он инвариантен. Значит полином $D(z)$ можно представить как композицию $D'(L_1(z),\ldots,L_{n-1}(z))$ некоторого полинома от $n-1$ переменной и однородных линейных функций, определяющих прямую $t\alpha$.

$\sigma \in \mathfrak{S}$

Если же $\mathfrak{S}$ состоит из нескольких неприводимых гиперповерхностей, то эти гиперповерхности могут препятствовать применению метода шагов только в том случае, если они связаны равенством $\sigma' + \alpha \equiv \sigma$, где $\{\sigma, \sigma'\} \subset \mathfrak{S}$, α – некоторый вектор, соединяющий две точки множества A.
Тогда в $\mathfrak{S}$ нужно выбрать "крайнюю" гиперповерхность следующим образом – поместить в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus \mathfrak{S}$ многогранник $\mathrm{Ch}(A)$, ближняя к нему и будет та, с которой мы начнем попытку аналитического продолжения решения.

Неприводимые компоненты $\mathfrak{S}$

Получается, что с каждой неприводимой гиперповерхностью σ из $\mathfrak{S}$ можно ассоциировать некоторую k-мерную грань Γ^k многогранника $\mathrm{Ch}(A)$ и k-мерную плоскость l^k такую, что $l^k \cap \mathbb{R}^n \supset \Gamma^k$, $l^k = \{z \in \mathbb{C}^n : L_i(z) = c_i, i = 1, \ldots, n-k\}$, а σ задается равенством (3).

Выбор линейных функций

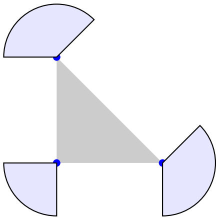
В качестве однородных линейных функций L_i, $i = 1, \dots, n-k$ для представления (3) можно выбрать функции $L_i = \langle z, q_i \rangle$, где q_i – нормали $n-k$ гиперграней смежных к Γ^k.
Из всего набора нормалей к гиперграням $\mathrm{Ch}(A)$ нужные выделяются следующим условием – они попадают в двойственный конус к грани Γ^k. *Двойственным конусом* к точке v многогранника $\mathrm{Ch}(A)$ называется конус

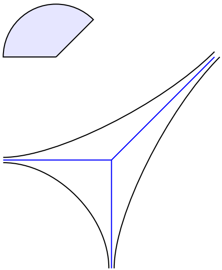
$$C_v = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle = \max_{a \in \mathrm{Ch}(A)} \langle x, a \rangle \right\} .$$

M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Advances in Mathematics*, **151**(2000), №1, 45–70.

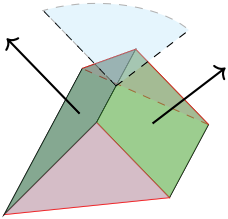
Двойственный конус в теории амеб и тропической геометрии

Многогранник Ньютона и амеба многочлена $1+\zeta_1+\zeta_2$.





Пример двойственного конуса



Теорема 1. *Если рациональная функция* $R(z) = N(z)/D(z)$ *является решением уравнения (1), тогда существует непустой набор плоскостей* $\{l_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ *и граней* $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ *многогранника Ньютона характеристического полинома уравнения таких, что*

1. *Имеет место включение* $\Gamma_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, q_{ij}\rangle = c_{ij}, i = 1, \ldots, n-k(j)\} \subset l_j$, *где* q_{ij} *– нормали к граням многогранника* $\mathrm{Ch}(A)$, *попадающие в двойственный конус к грани* Γ_j, $k(j) = \dim \Gamma_j \leqslant \dim l_j$;
2. *Для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* j *пересечение* $(l_j + x) \cap \mathrm{Ch}(A)$ *не является вершиной* $\mathrm{Ch}(A)$;
3. *Знаменатель* $D(z) = D_1(z) \cdot \ldots \cdot D_{\#\mathfrak{S}}(z)$, *каждый множитель которого является композицией*

$$D_j(z) = D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle) \ ,$$

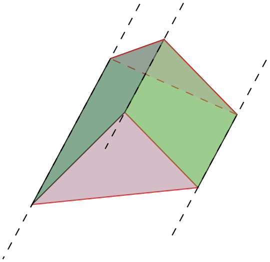
где D_{Γ_j} *– полином от* $n - k(j)$ *переменных. То есть*

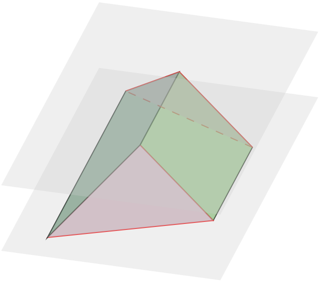
$$R(z) = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^{\#\mathfrak{S}} D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle)} \ . \qquad (4)$$

Необходимое условие

Необходимое условие: *Для существования рационального решения уравнения (1) необходимо, чтобы существовала хотя бы одна плоскость* l, $1 \leqslant \dim l \leqslant n-1$ *такая, что любой сдвиг* $l+x$, $x \in \mathbb{R}^n$ *не пересекал* $\mathrm{Ch}(A)$ *только по вершине.*

Пример многогранника, удовлетворяющего необходимому условию





Подкольцо $\mathbb{C}_\Gamma[z]$

Таким образом, с каждой гранью многогранника Ньютона характеристического полинома, удовлетворяющей необходимому условию мы ассоциируем знаменатель рационального решения вида

$$D_\Gamma(\langle z, q_1\rangle, \dots, \langle z, q_{n-\dim\Gamma}\rangle) ,$$

где q_i – нормали гиперграней из двойственного конуса к грани Γ. Полиномы такого вида образуют подкольцо в кольце полиномов, обозначим его $\mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Периодические полиномы

Любое рациональное решение разностного уравнения имеет вид

$$\frac{N(z)}{\Pi(z)A(z)} \,,$$

где Π – периодический полином, A – апериодический.
Полином $\Pi \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ называется *периодическим*, если следующее множество бесконечно

$$\mathrm{Spread}(\Pi, \Pi) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \gcd(\Pi(z), \Pi(z+\alpha)) \neq 1\} \,,$$

и *апериодическим* в противном случае.

M. Kauers, C. Schneider, Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations, *arXiv:1005.0602*, (2010).

Лемма 1

Если Γ это грань а $I_\Gamma \supset \Gamma$ это плоскость, то для всех $\alpha \in I_\Gamma \cap \mathbb{Z}^n$ выполняется $D_\Gamma(z+\alpha) = D_\Gamma(z)$, откуда следует, что $\gcd(D(z), D(z+\alpha)) = D_\Gamma(z)$.
Теперь видно, что множество $\mathrm{Spread}(D, D) = \cup_{j=1}^{N}(I_{\Gamma_j} \cap \mathbb{Z}^n)$ бесконечно.

Лемма 1. *Знаменатель рационального решения уравнения (1) является периодическим полиномом.*

Далее мы будем искать универсальный числитель, удовлетворяющий всему семейству полиномов из $\mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Поиск числителя

Итак, с каждой гранью Γ ассоциируем рациональную функцию $R_\Gamma(z) = \frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(z)}$ которую подставляем в уравнение и приводим выражение к общему знаменателю, в числителе получим несколько слагаемых вида

$$\sum_{\alpha \in (I_\Gamma + x) \cap A} p_\alpha N_\Gamma(z+\alpha) \prod_\beta D_\Gamma(\langle z+\beta, q_1\rangle, \ldots, \langle z+\beta, q_{n-k}\rangle)$$

каждое из которых следует приравнять к нулю.

Система разностных уравнений на $N_\Gamma(z)$

Получим систему разностных однородных уравнений с постоянными коэффициентами на неизвестный полином $N_\Gamma(z)$:

$$\left\{ \sum_{\alpha \in (I_\Gamma + x) \cap A} p_\alpha N_\Gamma(z+\alpha) = 0 \text{ , где } x \in \mathbb{R}^n \ : \ (I_\Gamma + x) \cap A \neq \varnothing \right\} \qquad (*)$$

Достаточное условие разрешимости системы

Каждое уравнение системы имеет вид

$$\sum_{\alpha \in (I_\Gamma + x) \cap A} p_\alpha N_\Gamma(z+\alpha) = 0 \,,$$

и оно разрешимо, если $\sum_{\alpha \in (I_\Gamma + x) \cap A} p_\alpha = 0$.

Abramov S., Petkovšek, M., On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations, *Proc. of the 14th Int. Workshop Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2012), Maribor, Slovenia, September 2012; Lect. Notes Comput. Sci.*, 2012, vol. 7442, pp. 1–11.

Критерий разрешимости

Теорема 2. *Множество функций* $\{\frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(z)}\}$, *где* $N_\Gamma(z)$ *– некоторый полином, а* $D_\Gamma(z)$ *произвольный элемент из подкольца* $\mathbb{C}_\Gamma[z]$, *удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l_\Gamma + x) \cap A} p_\alpha = 0 ,$$

где l_Γ *– это прямая, содержащая грань* Γ *и* $\dim \Gamma = \dim l$.

Достаточное условие

Достаточное условие: *Если существует прямая $l \subset \mathbb{R}^n$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\sum_{\alpha \in (l+x)\cap A} p_\alpha = 0 \ ,$$

то уравнение (1) разрешимо в классе рациональных функций.

При выполнении достаточного условия функции вида $\frac{1}{D_l(z)}$, где $D_l(z) \in \mathbb{C}_l[z]$ являются решениями уравнения (1). При этом, если $\dim l > \dim \Gamma$, где $\Gamma \subset l$, то $\mathbb{C}_l[z] \subsetneq \mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Алгоритм поиска рационального решения

1. Проверяем необходимое условие существования решения;
2. С каждой гранью ассоциируем подкольцо $\mathbb{C}_\Gamma[z]$;
3. Составляем систему разностных уравнений на неизвестный числитель $N_\Gamma(z)$;
4. Проверяем критерий разрешимости системы;
5. Фиксируя степень $N_\Gamma(z)$ решаем систему методом неопределенных коэффициентов.

Sturmfels, B., Solving Systems of Polynomial Equations. *CBMS Regional Conferences Series*, vol. 97. Amer. Math. Soc., Providence (2002).

Пример 1

Пусть характеристическим полиномом уравнения (1) является $1 + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$, тогда уравнение (1) запишется в виде

$$R(z) + \sum_{j=1}^{n} R(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + 1, z_{j+1}, \dots, z_n) = 0\ .$$

Поскольку всякая плоскость может пересекать (при подходящем сдвиге) симплекс по вершине, то для данного уравнения не выполняется необходимое условие существования рационального решения. Следовательно, оно не разрешимо в классе рациональных функций.

Пример 2

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{\alpha_i \in \{0,1\}} (-1)^{|\alpha|} R(z_1 + \alpha_1, \ldots, z_n + \alpha_n) = 0 \qquad (4)$$

с характеристическим полиномом $\sum_{\alpha_i \in \{0,1\}} (-1)^{|\alpha|} \zeta^{\alpha}$.
Многогранником Ньютона характеристического полинома в этом примере является гиперкуб. У гиперкуба 2^n вершин, 2^n гиперграней, $2^{n-k} C_n^k$ граней размерности k, из которых C_n^k не параллельны (при одной вершине).

Одномерных граней при одной вершине получается n, они не параллельны. Каждую такую j грань при вершине 0 можно задать $(n-1)$ уравнениями

$$\langle x, q_i \rangle = 0 \ , i = 1, \dots, n, i \neq j \ ,$$

где $q_i = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$.
С каждой такой гранью можно ассоциировать решение вида

$$R^{n-1}(z) = \frac{N(z)}{D^{n-1}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)} \ ,$$

где D^{n-1} – полином от $n-1$ переменных.

$$\sum_{\alpha_i\in\{0,1\}} \frac{(-1)^{|\alpha|}N(z+\alpha)}{D^{n-1}(z_1+\alpha_1,\dots,z_{j-1}+\alpha_{j-1},z_{j+1}+\alpha_{j+1},\dots,z_n+\alpha_n)} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_i\in\{0,1\}\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{|\alpha_1+\dots[j]\dots+\alpha_n|}N(z_1+\alpha_1,\dots,z_j,\dots,z_n+\alpha_n)}{D^{n-1}(z_1+\alpha_1,\dots[j]\dots,z_n+\alpha_n)} -$$

$$- \sum_{\substack{\alpha_i\in\{0,1\}\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{|\alpha_1+\dots[j]\dots+\alpha_n|}N(z_1+\alpha_1,\dots,z_j+1,\dots,z_n+\alpha_n)}{D^{n-1}(z_1+\alpha_1,\dots[j]\dots,z_n+\alpha_n)} = 0\ ,$$

где последнее равенство возможно только если полином $N(z)$ не зависит от z_j.

Получается, что с каждым ребром ассоциируется рациональное решение

$$R^{n-1}(z) = \frac{N(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)}{D^{n-1}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)} \,,$$

где N и D^{n-1} – произвольные полиномы от $(n-1)$ переменных. А для каждой из n гиперграней при вершине 0 можно ассоциировать решение вида

$$\frac{N(z_j)}{D^1(z_j)} \,, j = 1, \dots, n \,.$$

Решением уравнения (4) ассоциированным с каждой из C_n^k гранью размерности k многогранника Ньютона характеристического полинома является функция

$$R^{n-k}(z) = \frac{N(z[k])}{D^{n-k}(z[k])} ,$$

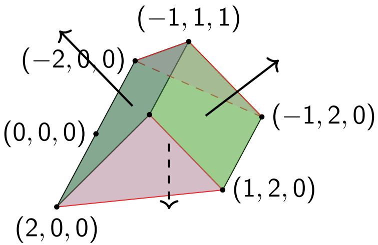
где N и D^{n-k} – произвольные полиномы от $(n-k)$ переменных $z[k]$ из набора $\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Пример 3

Рассмотрим разностное уравнение, которому соответствует характеристический полином

$$P(\zeta) = 2 - \zeta_1^2 - \zeta_1^{-2} + 2\zeta_1\zeta_2^2 - \zeta_1^{-1}\zeta_2^2 + \zeta_1^{-1}\zeta_2\zeta_3 - 2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \,. \qquad (5)$$

Множество A состоит из: $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(-2,0,0)$, $(1,2,0)$, $(-1,2,0)$, $(-1,1,1)$, $(1,1,1)$.


$(-1, 1, 1)$
$(-2, 0, 0)$
$(0, 0, 0)$
$(-1, 2, 0)$
$(1, 2, 0)$
$(2, 0, 0)$

В данном примере у многогранника Ньютона характеристического полинома есть три одномерных грани (ребра) и три двумерных грани, удовлетворяющих необходимому условию существования рационального решения. Они определяются тремя нормалями $q_1 = (0, 0, -1)$, $q_2 = (0, 1, 1)$, $q_3 = (0, -1, 1)$.

Гиперграни:

$$\langle x, q_1 \rangle = 0, \langle x, q_2 \rangle = 2, \langle x, q_3 \rangle = 0 \ .$$

Ребра:

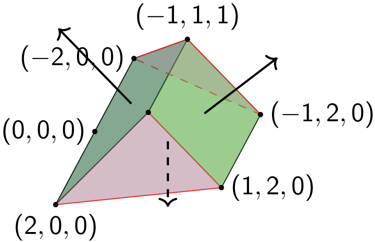
$$\begin{cases} \langle x,q_1\rangle=0 \\ \langle x,q_2\rangle=2 \end{cases}, \begin{cases} \langle x,q_2\rangle=2 \\ \langle x,q_3\rangle=0 \end{cases}, \begin{cases} \langle x,q_1\rangle=0 \\ \langle x,q_3\rangle=0 \end{cases} .$$

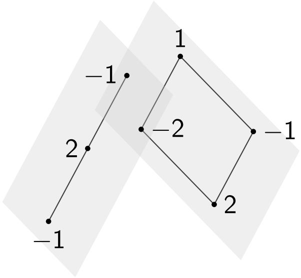
Возможно три решения, ассоциированных с гипергранями:

$$R_1^1(z) = \frac{N_1^1(z)}{D^1(z_3)}, R_2^1(z) = \frac{N_2^1(z)}{D^1(z_3 + z_2)}, R_3^1(z) = \frac{N_3^1(z)}{D^1(z_3 - z_2)} \ .$$

И три решения, ассоциированных с ребрами:

$$R_1^2(z) = \frac{N_1^2(z)}{D^2(z_3, z_3 + z_2)}, R_2^2(z) = \frac{N_2^2(z)}{D^2(z_3 - z_2, z_3 + z_2)},$$
$$R_3^2(z) = \frac{N_3^2(z)}{D^2(z_3, z_3 - z_2)} \ .$$


(−1, 1, 1)
(−2, 0, 0)
(0, 0, 0)
(−1, 2, 0)
(1, 2, 0)
(2, 0, 0)


1
−1
−2
−1
2
2
−1

Критерий теоремы 2 выполняется только для гиперплоскости $z_3 + z_2 = 2$, поэтому только R_2^1 является решением. Рассмотрим уравнение $P(\delta)R_2^1(z) = 0$, откуда получим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} 2N_1^2(z_1, z_2, z_3) - N_1^2(z_1 + 2, z_2, z_3) - N_1^2(z_1 - 2, z_2, z_3) = 0 \ , \\ 2N_1^2(z_1 + 1, z_2 + 2, z_3) - N_1^2(z_1 - 1, z_2 + 2, z_3) + \\ + N_1^2(z_1 - 1, z_2 + 1, z_3 + 1) - 2N_1^2(z_1 + 1, z_2 + 1, z_3 + 1) = 0 \ . \end{cases}$$

Решением первого уравнения является функция
$N_1^2(z) = c_1(z_2, z_3) \cdot z_1 + c_0(z_2, z_3)$, подставляя ее во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} c_1(z_2+2, z_3) = c_1(z_2+1, z_3+1)\ , \\ c_0(z_2+2, z_3) = c_0(z_2+1, z_3+1)\ . \end{cases}$$

видим, что данным уравнениям удовлетворяют любые полиномы вида $c_1(z_2+z_3)$ и $c_0(z_2+z_3)$.
Значит рациональная функция

$$R_2^1(z) = \frac{c_1(z_2+z_3) \cdot z_1 + c_0(z_2+z_3)}{D^1(z_3+z_2)}\ ,$$

где D^1, c_1 и c_0 – произвольные полиномы от одной переменной, удовлетворяет уравнению с характеристическим полиномом (5).