ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2012, № 2, с. 3–11

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.92+004.94

СЕМИНАР ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ В 2010–2011 г.г.

© 2012 г. С. А. Абрамов*, А. А. Боголюбская, В. А. Ростовцев****

**Вычислительный центр РАН*
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
***Объединенный институт ядерных исследований*
141980 Дубна, Московская область
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, abogol@jinr.ru, rost@jinr.ru
Поступила в редакцию 14.07.2011

Годовой отчет о работе научно-исследовательского семинара по компьютерной алгебре.

1. О СЕМИНАРЕ

В семинаре рассматриваются новые результаты в области компьютерной алгебры — символьные алгоритмы и их реализация, соответствующие вопросы системного программирования.

В 2010–2011 учебном году семинар проводился совместно факультетом вычислительной математики и кибернетики (ВМК) и НИИ ядерной физики МГУ. Встречи участников проходили раз в месяц по третьим средам на ВМК. В июне 2011 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) состоялось традиционное заседание, организованное совместно с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ СОБРАНИЯ СЕМИНАРА

С сентября по апрель были прочитаны следующие доклады[1].

Д.Е. Хмельнов (ВЦ РАН; dennis_khmelnov@mail.ru) *Компьютерно-алгебраические методы решения систем линейных обыкновенных уравнений, основанные на индуцированных рекурренциях.*

Предлагается несколько компьютерно-алгебраических (символьных) алгоритмов решения систем линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и $q-$разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Алгоритмы основаны на индуцированных рекурренциях. Обсуждаются результаты экспериментального сравнения эффективности реализованного программного обеспечения с существующими известными альтернативами.

В.Г. Романовский (Университет Марибора, Словения; valery.romanovsky@uni-mb.si) *Бифуркации предельных циклов в системах полиномиальных дифференциальных уравнений с нерадикальным идеалом Баутина.*

Представлен алгоритмический подход к исследованию проблемы цикличности (проблемы оценки числа предельных циклов, появляющихся при малых возмущениях из особой точки типа центра или фокуса) некоторых классов полиномиальных систем. Подход основан на комплексификации системы и изучении идеала фокусных величин (идеала Баутина). Предполагается, что идеал I, порожденный первыми фокусными величинами, определяет то же алгебраическое многообразие, что и идеал Баутина B. Если идеал I радикален, то цикличность ограничена сверху числом K. Если же идеал I не радикальный, то иногда оказывается возможным отобразить его в полиномиальную подалгебру, где образ I является радикальным идеалом. Большинство вычислений выполняется с использованием

[1] Перечень докладов, прочитанных в 1995–2010 г.г., опубликован в [1]–[16].

алгоритмов, основанных на теории базисов Гребнера.

Д.В. Трушин (Мех-мат МГУ; trushindima@yandex.ru) *Дифференциальные идеалы.*

Предлагаются подходы к решению следующих трех проблем: нахождение критерия конечности дифференциальных стандартных базисов, описание квазиспектра алгебры разделенных степеней и построение алгебраической теории конструируемых дифференциальных полей.

И.Г. Ключников (ИПМ РАН; ilya.klyuchnikov@gmail.com) *Выявление и доказательство свойств функциональных программ методами суперкомпиляции.*

Предлагается новый алгоритм суперкомпиляции для функционального языка высшего порядка, ориентированный на трансформационный анализ. Алгоритм основан на существующих алгоритмах суперкомпиляции для функциональных языков первого порядка.

Разработанный алгоритм реализован в экспериментальном суперкомпиляторе HOSC, являющимся первым суперкомпилятором для языка Haskell, для которого формально доказаны теоремы корректности и завершаемости.

А.Б. Арансон (НИИ дальней радиосвязи, Москва; aboar@yandex.ru) *Программы для вычисления степенных разложений решений нелинейных систем ОДУ алгоритмами степенной геометрии.*

Представлены программы вычисления степенных разложений решений нелинейных систем ОДУ алгоритмами степенной геометрии. Эти программы написаны на языке C++ и на языке системы символьных вычислений Maxima. Демонстрируется вычисление первых членов степенных разложений действительных решений в нуле и бесконечности по времени для системы ОДУ Эйлера-Пуассона, описывающей движение твердого тела около неподвижной точки. (Система Эйлера-Пуассона состоит из шести автономных ОДУ первого порядка с шестью параметрами и имеет три первых интеграла при любых допустимых значениях параметров.) При условиях на параметры системы Эйлера-Пуассона, допускающих редукцию Н. Ковалевского, с помощью разработанных программ были вычислены носители уравнений и трех первых интегралов системы, а также пары нормальный конус – укороченная система. Число пар составило 53637 для случая, когда время стремится к нулю и 53456 для случая, когда время стремится к бесконечности. Для всех этих пар были выполнены вычисления и получено 58 вещественных степенных разложений решений в нуле.

Д.Дж. Джеффри (Университет Западного Онтарио, Канада; djeffrey@uwo.ca) *Интегрирование: распрямление преобразований.*

Одна из причин ошибок, регистрируемых пользователями систем компьютерной алгебры при вычислении определенных интегралов, состоит в том, что функции, получаемые с помощью алгоритма Риша, содержат точки ветвления. Поэтому стандартный метод Ньютона-Лейбница не работает без дополнительных корректирующих действий. Вводится понятие “распрямляющего преобразования” и описывается несколько преобразований такого рода. Приводятся примеры вычисления интегралов. Описывается алгоритм распрямления для класса рациональных тригонометрических полиномов.

С.А. Гутник (МФТИ, МГИМО; s.gutnik@inno.mgimo.ru), В.А. Сарычев (ИПМ РАН; sarychev@keldysh.ru). *Исследование положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов с использованием методов компьютерной алгебры.*

Представлен анализ положений равновесия спутника на круговой орбите в гравитационном поле Земли с заданным постоянным моментом и главными центральными моментами инерции с использованием символьно-численных методов. Движение спутника относительно центра масс описывается системой дифференциальных уравнений Лагранжа. Стационарные уравнения движения представляют собой систему из шести алгебраических уравнений второго порядка с параметрами, представляющими проекции моментов на оси связанной с корпусом спутника системы координат. С использованием методов компьютерной алгебры было проведено построение базиса Гребнера для данной алгебраической системы. Показано, что при небольшом модуле вектора постоянного момента существуют 24 положения равновесия спутника. Рассмотрены точки бифуркации, в которых происходит смена числа равновесных решений. В пространстве параметров системы численно построены области с постоянным числом равновесий спутника и исследована эволюция этих областей.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ; sergeyabramov@mail.ru), Д.Е. Хмельнов (ВЦ РАН; dennis_khmelnov@mail.ru) *Особые точки решений линейных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами.*

Рассматриваются системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно m неизвестных функций одной переменной x. Коэффициенты систем являются полиномами над некоторым числовым полем. Каждая система состоит из m независимых уравнений. Уравнения имеют произвольные порядки. Предлагается алгоритм, который для заданной системы S описанного типа строит ненулевой полином $d(x)$ такой, что если S обладает аналитическим решением с особенностью в точке a, то $d(a) = 0$.

В.Г. Романовский (Университет Марибора, Словения; valery.romanovsky@uni-mb.si) *Обратимость и инварианты полиномиальных систем ОДУ.*

Описывается алгоритм вычисления порождающего множества инвариантов группы вращений полиномиальных двумерных систем дифференциальных уравнений (инвариантов Сибирского). С использованием методов вычислительной алгебры показана взаимосвязь обратимости, инволюции и инвариантов Сибирского. Охарактеризовано множество всех обратимых систем в заданном семействе комплексных двумерных полиномиальных дифференциальных систем и предложен эффективный алгоритм нахождения этого множества. Также обсуждается применение инвариантов к изучению периодических колебаний и бифуркаций предельных циклов в полиномиальных системах ОДУ.

А.Д. Брюно (ИПМ РАН, abruno@keldysh.ru), А.Б. Батхин (ИПМ РАН; batkhin@gmail.com) *Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

Е.С. Шемякова (ВЦ РАН; shemyakova. katya@gmail.com) *Алгебраическая структура преобразований Дарбу операторов* $D_xD_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)$.

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

Е.В. Зима (Университет Уилфрида Лорье, Ватерлоо, Канада) *Синтетическое деление в контексте неопределенного суммирования.*

Предлагается основанная на бессдвиговой факторизации и прямой проверке делимости модификация алгоритма неопределенного рационального суммирования. В случае несуммируемости заданной рациональной функции алгоритм гарантирует минимальность как степени знаменателя несуммируемой части, так и степени знаменателя суммируемой части. Алгоритм решает задачу с временными затратами, полиномиальными по размеру входа и линейными по минимально возможному размеру результата суммирования. Это позволяет удалить из алгоритма суммирования все несущественные зависимости времени выполнения алгоритма от дисперсии суммируемой рациональной функции. Результат распространен на случай квази-рационального неопределенного суммирования. Обсуждается компактное представление промежуточных результатов и реализация алгоритма в системе Maple.

3. ДВУХДНЕВНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ В ОБЪЕДИНЕННОМ ИНСТИТУТЕ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (ДУБНА)

По установившейся традиции в июне 2011 г. в Дубне прошло совместное заседание семинаров ВМК МГУ, НИИЯФ МГУ и Лаборатории информационных технологий ОИЯИ. По существу, это была двухдневная конференция по компьютерной алгебре и ее приложениям.

Вниманию участников были предложены следующие выступления.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ; sergeyabramov@mail.ru), М. Баркату (Лиможский университет, Франция; moulay.barkatou@unilim.fr), Э. Пфлюгель (Кингстонский университет, Великобритания; E.Pfluegel@kingston.ac.uk) *Системы дифференциальных уравнений произвольного порядка с усеченными коэффициентами.*

Пусть дана линейная однородная дифференциальная система с коэффициентами в виде степенных рядов от x, и нужно выяснить, обладает ли эта система решениями с компонентами в виде лорановых рядов. Если решения существуют, то начиная с какой степени можно отбросить все члены коэффициентов исходной системы, чтобы первые n членов разложений решений определялись из полученной усеченной системы однозначно? В предположении, что ряды, служащие коэффициентами исходной системы, заданы алгоритмически, показано, что сформулированные вопросы приводят в общем случае к неразрешимым алгоритмическим проблемам. Однако эти проблемы разрешимы в скалярном случае, а также когда заранее известно, что ведущая матрица системы является обратимой в кольце матриц над полем лорановых рядов.

В.П. Гердт (ОИЯИ, Дубна; gerdt@jinr.ru), Ю.А. Блинков (Саратовский ГУ; BlinkovUA@info.sgu.ru) *Вычислительно эффективные инволютивные деления.*

Рассматривается класс парных инволютивных делений, для которых инволютивное разбиение переменных порождено локальным антиградуированным порядком на мономах и заданной перестановкой переменных. В качестве представителя данного класса проанализировано деление, порожденное антиградуированным лексикографическим порядком. Экспериментально показано, что в подавляющем большинстве случаев это деление более эффективно для построения инволютивных базисов, чем классическое деление Жане, которое порождается чисто лексикографическим порядком. Это отражается не только на том, что для построения базиса требуется рассмотрение меньшего числа немультипликативных продолжений, что приводит к более компактным базисам, но и на большей устойчивости объема вычислений по отношению к перестановкам переменных.

О.В. Тарасов (ОИЯИ, Дубна; otarasov@jinr.ru) *Оптимальные базисы и базисы Гребнера для редукции скалярных Фейнмановских интегралов.*

Предлагается новый тип минимальных наборов обобщенных рекуррентных соотношений для сведения Фейнмановских интегралов к базисным интегралам. В качестве примеров рассматриваются рекуррентные соотношения для однопетлевых безмассовых интегралов вершинного типа и двухпетлевых вакуумных интегралов с произвольными массами. Эти примеры показывают, что вычисления по новым соотношениям на два порядка быстрее, чем по соотношениям Ткачева-Четыркина, и в пять раз быстрее вычислений по обычным обобщенным рекуррентным соотношеням.

В.В. Корняк (ОИЯИ, Дубна; kornyak@jinr.ru) *Перестановочная интерпретация квантовой механики.*

Унитарные операторы в гильбертовых пространствах — т.е. унитарные представления некоторых групп симметрий — лежат в основе математического описания квантовых явлений. Эти группы можно считать конечными без всякого риска нарушить физическое содержание проблемы. Показывается, что любую квантово-механическую проблему можно свести к перестановкам, а наблюдаемые величины могут быть выражены в терминах перестановочных инвариантов.

В вычислениях использовалась авторская реализация алгоритмов работы с группами, написанная на C, и система компьютерной алгебры GAP.

М.В. Зинин (ОИЯИ, Дубна; mzinin@gmail.com) *Пакет* BIBasis *для вычисления булевых инволютивных базисов и базисов Гребнера в системах компьютерной алгебры* REDUCE *и* Macaulay2.

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

А.Б. Арансон (НИИ дальней радиосвязи, Москва; aboar@yandex.ru) *Программы для* *вычисления степенных разложений решений нелинейных систем ОДУ алгоритмами степенной геометриии.*

Повторение доклада, сделанного на семинаре в МГУ (см. раздел „Регулярные собрания семинара").

В.Ф. Еднерал (НИИЯФ МГУ; edneral@theory.sinp.msu.ru), В.Г. Романовский (Университет Марибора, Словения; valery.romanovsky@uni-mb.si) *О нормальных формах* $(p : q)$*-резонансных систем ОДУ.*

Предлагается обобщение понятия изохронности двумерных вещественных полиномиальных автономных систем ОДУ на случай комплексных $(p : q)$-резонансных векторных полей. Обобщенная задача изучается в случае квадратичной системы и системы с однородными кубическими нелинейностями. Основными инструментами исследования являются алгоритмы, основанные на теории базисов Гребнера.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ; sergeyabramov@mail.ru), А.А. Рябенко (ВЦ РАН; ryabenko@cs.msu.ru) *Линейные* q*-разностные уравнения, зависящие от параметра.*

Рассматриваются линейные q-разностные уравнения с полиномиальными коэффициентами, зависящими от одного параметра. Предлагается параметрический вариант алгоритма аккуратного q-суммирования и q-алгоритма Цейлбергера. Описывается реализация предложенных алгоритмов в системе Maple.

С.А. Гутник (МФТИ, МГИМО; s.gutnik@inno.mgimo.ru) *Символьно-численные методы исследования динамики осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов.*

Исследуется динамика вращательного движения осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. С использованием систем Mathematica и Maple получены уравнения стационарных движений спутника, численно определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Проведено исследование устойчивости полученных положений равновесия.

А.В. Королькова, Д.С. Кулябов, Н.А. Немчанинова (РУДН, Москва; yamadharma@gmail.com, aserpiente@gmail.com, nanemchaninova@gmail.com) *Применение тензорного формализма для волноводов.*

Предлагается использовать тензорный формализм, хорошо известный по общей теории относительности и реализованный во многих системах символьных вычислений, например в Cadabra, для волноводов. Описан переход из векторной формы записи в тензорную.

Е.С. Шемякова (ВЦ РАН, Москва; shemyakova.katya@gmail.com) *Алгебраическая структура преобразований Дарбу операторов* $D_xD_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)$.

Повторение доклада, сделанного на семинаре в МГУ (см. раздел „Регулярные собрания семинара").

С.И. Хашин (Ивановский ГУ; khash2@mail.ru) *Численное упрощение нелинейных систем уравнений.*

Предлагаются новые подходы к решению системы уравнений Бутчера, возникающей при построении схем Рунге-Кутта высоких порядков (для больших порядков количество уравнений в этой системе достигает многих сотен).

Вычисления проведены в двух режимах: со стандартной точностью *double* и с помощью библиотеки GMP со 100 десятичными знаками после запятой. Проведено сравнение результатов, полученных численными методами и методами компьютерной алгебры.

Р. Краглер (Университет прикладных наук Вайнгартена, Германия; kragler@hs-weingarten.de) *Решение некоторых видов уравнений с частными производными методом обратных дифференциальных операторов.*

Описывается вариант метода обратных дифференциальных операторов для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Предполагается, что соответствующие рассматриваемым уравнениям дифференциальные операторы разлагаются на множители первого порядка. В качестве правых частей уравнений допускаются, в частности, показательная, тригонометрические и гиперболические функции с аргументом, являющимся линейной функцией независимых переменных. Рассматривается целый ряд примеров, демонстрирующих эффективность описанного метода и особенности его реализации в системе Mathematica. Отмечается, что встроенные процедуры системы Mathematica покрывают лишь часть возможностей предлагаемого метода.

Ю.А. Блинков, П.В. Фокин (Саратовский ГУ; BlinkovUA@info.sgu.ru, fokinpv@gmail.com) *Внутреннее представление булевых многочленов в виде ZDD-диаграмм.*

Рассматривается применение ZDD-диаграмм (Zero-suppressed Decision Diagram) в качестве внутреннего представления многочленов в булевом кольце. Для некоторых классов булевых многочленов и для указанного представления дается оценка сложности по памяти. Приводятся результаты экспериментальной проверки эффективности работы с ZDD-диаграммами при построении инволютивных базисов средствами языков C/C++.

М. Спиридонова (ИМИ БАН, София, Болгария; mspirid@math.bas.bg), И. Попова (Страховая компания Евроинс, София, Болгария; irina.rp2000@gmail.com) *Решение дифференциальных уравнений с использованием систем Mathematica и Matlab.*

Представлен программный пакет, ориентированный на Mathematica и Matlab, позволяющий получать информацию о встроенных средствах символьного и численного решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Предлагаются пакеты для решения линейных (локальных и нелокальных) краевых задач с использованием операционного исчисления.

С.И. Сердюкова (ОИЯИ, Дубна; sis@jinr.ru), Ю.М. Шукринов (ОИЯИ, Дубна; shukrinv@theor.jinr.ru) *Численно-аналитический метод вычисления вольт-амперных характеристик для систем Джозефсоновских переходов (случай периодических граничных условий).*

Представлены новые результаты по ускорению вычислений напряжений в каждой точке вольт-амперной характеристики. В случае непериодических граничных условий решение системы n нелинейных дифференциальных уравнений удалось свести к решению одного уравнения. В случае периодических граничных условий число уравнений удалось уменьшить в два раза. Полученные результаты позволили построить асимптотику при больших t решения рассматриваемой системы $[(n+1)/2]$ нелинейных дифференциальных уравнений. Асимптотические формулы вычисляются для каждого значения силы тока с использованием системы Reduce 3.8.

Метод опробован на расчете петли гистерезиса для системы 19 джозефсоновских переходов. Численные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием предлагаемого смешанного численно-аналитического метода. При этом время счета сократилось в пять с лишним раз.

И.П. Юдин (ОИЯИ, Дубна; yudin@jinr.ru) *Метод функций влияния в аналитическом алгоритме решения задач нелинейной динамики ионов в магнитном поле.*

На основе метода функций влияния с использованием матричного формализма получены аналитические алгоритмы решения уравнения нелинейной динамики заряженных частиц в соленоидальном магнитном поле. Впервые выведены формулы для аберрационных коэффициентов нелинейной оптики до третьего порядка включительно. В качестве приложения рассмотрена адронная терапия.

А.Н. Воропаев (Петрозаводский ГУ; voropaev@psu.karelia.ru) *Вычислительная сложность явных формул для подсчета циклов в графах.*

Предлагается новый подход к подсчету циклов, основанный на перечислении форм замкнутых маршрутов фиксированной длины.

П. Физиев (Софийский университет „Св. Климент Охридский“, Болгария и ОИЯИ, Дубна; fiziev@theor.jinr.ru) *Функции Хойна и дифференциальная геометрия в системе Maple 15.*

Приводится краткий обзор основных свойств функций Хойна и их многочисленных применений для решения различных физических задач. Особо отмечаются некоторые проблемы, возникающие при применении процедур системы Maple 15, предназначенных для выполнения вычислений с функциями Хойна. Обсуждается и иллюстрируется полезность нового пакета Differential Geometry, встроенного в Maple 15.

Д. Дж. Джеффри (Университет Западного Онтарио, Канада; djeffrey@uwo.ca). *Исследование функций Стильтьеса и вполне монотонных функций с использованием системы Maple.*

С помощью системы Maple найдены новые свойства функций Стильтьеса.

С. Ф. Адлай (ВЦ РАН, Москва; SemjonAdlaj @gmail.com) *Итерационный алгоритм вычисления эллиптического интеграла.*

Предлагается итерационный алгоритм вычисления эллиптического интеграла, не обязательно полного, основанный на обращении известной формулы удвоения точек эллиптической кривой. Исторический комментарий: наткнувшись на совпадение вплоть до 11-го знака величины, обратной арифметико-геометрическому среднему чисел 1 и $\sqrt{2}$, с деленной на π полудлиной лемнискаты Бернулли, фокусное расстояние которой $\sqrt{2}$, Гаусс записал в своем дневнике 30 мая 1799 г., что это "несомненно откроет совершенно новый раздел анализа" [McKean H. Moll V. *Elliptic Curves*, p. 66]. Впоследствии Гаусс нашел высокоэффективный метод вычисления полного эллиптического интеграла.

Доклад посвящается 70-летию Сергея Яковлевича Степанова.

Д.А. Ашкадов (СПбГПУ; dmitry.ashkadov@ gmail.com), Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru) *Вычисление спектра и матричных элементов операторов Кокстера-Лапласа в векторных пространствах, порожденных таблицами Юнга.*

Исследуется спектр операторов Кокстера-Лапласа, действующих в векторных пространствах, порожденных всеми таблицами Юнга некоторой фиксированной формы.

Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru) *О пересечении универсальных базисов Гребнера идеала и его подидеала.* Рассматривается вопрос о том, когда некоторое подмножество базиса Гребнера идеала является частью редуцированного базиса подидеала, порожденного этим подмножеством.

А.А. Гусев, В.П. Гердт, В.А. Ростовцев, С.И. Виницкий (ОИЯИ, Дубна; gooseff@jinr.ru, gerdt@jinr.ru, rost@jinr.ru, vinitsky@thsun1. jinr.ru) *Символьный алгоритм теории возмущения для расчета спектральных и оптических характеристик сфероидальных квантовых точек.*

Представлен символьный алгоритм расчета спектральных и оптических характеристик сфероидальных квантовых точек, реализованный в системах Maple и Mathematica. Область параметров задачи, при которых возможно применение алгоритма, оценивается численно с помощью программ KANTBP и ODPEVP [Comp. Phys. Commun. v. 179, 2008, p. 685–693; ibid. v. 177, 2007, p. 649–675.], реализованных на Фортране.

Ю.Г. Палий (ОИЯИ, Дубна; palii@jinr.ru) *Базис кольца инвариантов группы Вейля алгебры Ли su(2) × su(3).*

Найдены фундаментальные инварианты группы Вейля алгебры Ли su(2) $\times$ su(3), соответствующей группе локальных преобразований квантовой системы кубит-кутрит. Группа Вейля является произведением группы $\mathbb{Z}/2$ на группу перестановок $\mathfrak{S}_3$ и действует в корневом пространстве алгебры Ли su(6). Построено отображение полиномиальных локальных инвариантов матрицы плотности изучаемой системы до 4-го порядка включительно в алгебру инвариантов группы Вейля.

Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru), О.Ю. Канжелева (СПбГПУ; olga.kanzheleva@gmail.com) *Полиномиальная интерполяция над кольцами вычетов* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Рассматривается задача полиномиальной интерполяции и $p-$адической аппроксимации в кольцах вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

И.В. Амирханов, Н.Р. Саркар, И. Сархадов, З. Тухлиев, З.А Шарипов (ОИЯИ, Дубна; camir@jinr.ru, nsarker@mail.ru, ibrohim@jinr.ru, zafar_23@mail.ru, ZARIF@jinr.ru) *Аналитичес-*

кое и численное исследования решений краевых задач для квазипотенциального уравнения.

Приводятся результаты сравнительного анализа решений квазипотенциального уравнения, соответствующих различным значениям параметра задачи ε, с решением уравнения Шредингера. Исследуются свойства этих решений. Установлено, что при малых ε спектры решений квазипотенциального уравнения совпадают со спектром решения уравнения Шредингера, а при увеличении ε появляются новые уровни.

Исследования проведены с помощью системы Maple.

С.Н. Тычков (ИПУ РАН, Москва; sergey.lab06@yandex.ru) *Исследование формальной интегрируемости переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных с помощью мультискобки Кругликова-Лычагина.*

Показывается, что векторное поле $X = \frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ обладает не равным константе гармоническим первым интегралом тогда и только тогда, когда функция $b(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(b^2+1)\Delta b - 2b(b_x^2 + b_y^2) = 0$.

А.А. Боголюбская, И.Л. Боголюбский (ОИЯИ, Дубна; abogol@jinr.ru, bogolubs@jinr.ru) *О локализованных решениях в двух- и трехмерной глюодинамике.*

Обсуждается возможность существования солитонов в двумерной и трехмерной SU(2) глюодинамике. Представлены гамильтонианы в терминах радиальных функций; соответствующие преобразования выполнены с помощью системы Maple. Исследуются локализованные в пространстве распределения поля Янга-Миллса, на которых реализуются локальные минимумы гамильтонианов. Рассматриваются возможные физические применения таких решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Семинар по компьютерной алгебре на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1995-1996 г. // Программирование, 1997, № 1. С. 75–77.

2. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Научно-исследовательский семинар “Компьютерная алгебра” в 1996-1997 г. // Программирование, 1998, № 1. С. 69–72.

3. *Абрамов С.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1997-1998 г. // Программирование, 1998, № 6. С. 3–7.

4. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1998-1999 г. // Программирование, 2000, № 1. С. 8–12.

5. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1999-2000 г. // Программирование, 2001, № 1. С. 3–7.

6. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2000-2001 г. // Программирование, 2002, № 2. С. 6–9.

7. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2001-2002 г. // Программирование, 2003, № 2. С. 3–7.

8. *Абрамов С.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2002-2003 г. // Программирование, 2004, № 2. С. 3–7.

9. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2003-2004 г. // Программирование, 2005, № 2. С. 3–9.

10. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2004-2005 г. // Программирование, 2006, № 2. С. 3–7.

11. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2005-2006 г. // Программирование, 2007, № 2. С. 3–8.

12. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2006-2007 г. // Программирование, 2008, № 2. С. 3–8.

13. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2007-2008 г. // Программирование, 2009, № 2. С. 3–9.

14. “Mathematical Modeling and Computational Physics (CAAP’2009)”. Book of abstracts of the internationl conference. Dubna, July 7–11, 2009. Dubna, 2009.

15. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2008-2009 г. // Программирование, 2010, № 2. С. 3–8.

16. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2009-2010 г. // Программирование, 2011, № 1. С. 3–8.