ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2011, № 2, с. 3–8

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.92+004.94

СЕМИНАР ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ В 2009-2010 г.г.

© **2011 г.** С.А. Абрамов*, А.А. Боголюбская**,
В.Ф. Еднерал***, В.А. Ростовцев**
**Вычислительный центр РАН*
119991 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
***Объединенный институт ядерных исследований*
141980 Дубна Московской области
****НИИ ядерной физики МГУ*
119991 Москва, Воробьевы горы
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, abogol@jinr.ru, rost@jinr.ru, edneral@theory.sinp.msu.ru
Поступила в редакцию 12.10.2010 г.

Годовой отчет о работе научно-исследовательского семинара по компьютерной алгебре.

1. О СЕМИНАРЕ

В семинаре рассматриваются новые результаты в области компьютерной алгебры — символьные алгоритмы и их реализация, соответствующие вопросы системного программирования.

В 2009–2010 учебном году семинар собирался, как правило, раз в месяц по третьим средам на факультете вычислительной математики и кибернетики и в НИИ ядерной физики МГУ, а в мае 2010 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) состоялось традиционное заседание, организованное совместно с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ. Web–страница семинара `http://theory.sinp.msu.ru/dokuwiki/calg:main` содержит информацию о планируемых и состоявшихся ранее докладах.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ СОБРАНИЯ СЕМИНАРА

С сентября по апрель были прочитаны следующие доклады[1].

С.П. Поляков (ВЦ РАН; s.p.polyakov@gmail.com) *Символьные алгоритмы, связанные с задачами суммирования.*

Исследуются два подхода к задачам суммирования рациональных функций, один из которых избегает полной факторизации знаменателей, а другой основан на такой факторизации. В рамках обоих подходов обсуждаются алгоритмы суммирования рациональных функций и предлагаются новые алгоритмы суммирования с дополнительной минимизацией степеней знаменателя просуммированной части и числителя остатка. Дополнительно доказывается корректность алгоритма Цейлбергера в однородном случае. Демонстрируется, что этот случай может иметь место при любом порядке оператора Цейлбергера. Предлагается алгоритм построения аннулирующего оператора минимального порядка. Все обсуждаемые алгоритмы реализованы в среде Maple.

А.И. Зобнин (Мех-мат МГУ; al_zobnin@mail.ru) *Обыкновенные дифференциальные многочлены и дифференциальные стандартные базисы.*

Рассматриваются решенные и нерешенные задачи теории дифференциальных стандартных базисов (в частности, критерии их конечности при различных упорядочениях).

Ю.А. Климов (ИПМ им.М.В.Келдыша РАН; yuklimov@keldysh.ru) *Специализация программ на объектно-ориентированных языках методом частичных вычислений.*

На основе существующих методов частичных вычислений для функциональных и объектно-ориентированных программ предлагается новый

[1] Перечень докладов, прочитанных в 1995–2009 г.г., опубликован в [1-15]

метод специализации программ на объектно-ориентированных языках, впервые обеспечивающий специализацию всех основных конструкций таких языков, как C# и Java, и обладающий поливариантностью. Разработанный метод реализован в экспериментальном специализаторе CILPE для промежуточного объектно-ориентированного языка CIL платформы Microsoft .NET и опробован на модельных задачах, показавших возможность ускорения программ до 10 и более раз.

А.В. Климов (ИППМ РАН; arkady.klimov@gmail.com) *Алгебра деревьев выбора и ее использование при построении графа алгоритма и трансляции с фортрана в язык потоков данных.*

Распараллеливающая компиляция Фортрана требует проведения анализа программы для построения ее графа потоковых зависимостей (решетчатого графа, графа алгоритма). Предлагается метод построения графа алгоритма, основанный на использовании деревьев выбора – специальной синтаксической структуры, удобной для представления как промежуточных результатов анализа (таких как эффекты операторов и описания состояний), так и самого графа. Также предлагается система операций над деревьями выбора, в терминах которых удобно выражаются алгоритмы анализа программ и построения графа зависимостей. Анализ используется в компиляторе Фортрана в язык потоковой модели вычислений PolyDFL.

А.А. Кытманов (Сибирский федеральный университет, Красноярск; kytmanov@lan.krasu.ru) *Построение алгоритмов компьютерной алгебры на основе методов теории функций.*

Предлагается алгоритм исключения неизвестных из систем нелинейных неалгебраических уравнений, основанный на многомерном логарифмическом вычете, и алгоритм построения класса интегральных представлений в областях многомерного комплексного пространства и класса вычетов — аналогов многомерного логарифмического вычета.

А. Геффар (Лиможский университет, Франция; f_gheffar@yahoo.fr), С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ; sergeyabramov@mail.ru) *Порядки рациональных решений разностных уравнений относительно неприводимых полиномов.*

Обсуждаются два алгоритма, которые для заданного линейного разностного уравнения с коэффициентами в виде рациональных функций над полем k характеристики 0 строят конечное множество M неприводимых в $k[x]$ полиномов, такое, что если данное уравнение имеет решение $F(x) \in k(x)$ и при этом ${}_{p(x)}F(x) < 0$ для неприводимого $p(x)$, то $p(x) \in M$. Затем каждый из алгоритмов вычисляет некоторую нижнюю границу для ${}_{p(x)}F(x)$. Алгоритмы применимы как к скалярным уравнениям, так и к системам линейных уравнений первого порядка и основываются на комбинациях обновленных подходов, использованных в более ранних алгоритмах нахождения универсальных знаменателей (Абрамов, Баркату) и границ знаменателей (ван Хое). Проводится сравнение сложностей представленных алгоритмов.

А.А. Гусев, С.И. Виницкий, О. Чулуунбаатар, В.А. Ростовцев (ОИЯИ и Международный университет “Дубна”; gooseff@jinr.ru, vinitsky@thsun1.jinr.ru, chuka@jinr.ru, rost@jinr.ru) *Разработка символьно-численных алгоритмов решения низкоразмерных краевых задач квантовой механики методом Канторовича — приведением к обыкновенным дифференциальным уравнениям.*

Обсуждаются символьно-численные алгоритмы решения эллиптических задач методом Канторовича для примесных состояний в моделях квантовых точек, квантовых проволок и ям. Программная реализация выполнена в среде Maple-Fortran. В перспективе возможен переход к среде типа Mathematica-Delphi.

М.Г. Кокотчикова, Д.С. Кулябов, Л.А. Севастьянов (РУДН; mgkokotchikova@gmail.com, yamadharma@gmail.com, leonid.sevast@gmail.com) *Регуляризованный метод восстановления функции по зашумленным значениям ее производных в точках сетки.*

Решается задача восстановления функции, заданной на круге Q по измеренным с погрешностью значениям производных в точках сетки $T = t_1, t_2, ..., t_k \in Q$ диафрагмы Гартмана. Для устойчивого восстановления применяется метод регуляризации Тихонова, на основе которого разработан символьно-численный метод построения матрицы стабилизирующего функционала, реализованный в системах символьных вычислений Axiom и Matlab.

3. ДВУХДНЕВНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ В ОБЪЕДИНЕННОМ ИНСТИТУТЕ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (ДУБНА)

По установившейся традиции в мае 2010 г. в Дубне прошло совместное заседание семинаров ВМК МГУ, НИИЯФ МГУ и Лаборатории информационных технологий ОИЯИ. По существу, это была двухдневная конференция по компьютерной алгебре и ее приложениям.

Вниманию участников были предложены следующие выступления.

В.П. Гердт (ОИЯИ; gerdt@jinr.ru), Д. Робертс (ТУ, Ахен, ФРГ; daniel@momo.math.rwth-aachen.de) *Алгоритмическая проверка согласованности дискретных разностных аппроксимаций для систем линейных уравнений в частных производных.*

Предлагается алгоритм проверки согласованности конечно-разностных аппроксимаций на однородных и ортогональных сетках для линейных уравнений в частных производных с помощью построения и анализа соответствующих разностных базисов Гребнера или инволютивных базисов.

С.А. Абрамов (Вычислительный Центр РАН, МГУ; sergeyabramov@mail.ru) *О некоторых разрешимых и неразрешимых проблемах, связанных с q-разностными уравнениями с параметрами.*

Рассматриваются линейные q-разностные уравнения с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметров. Для случая, когда в качестве основного поля выступает $\mathbf{Q}(q)$, предлагается алгоритм, распознающий существование числовых значений параметров, при которых уравнение имеет полиномиальное (рациональное) решение. Доказывается, что такой алгоритм невозможен, если допустимыми значениями параметров являются полиномы или рациональные функции от q.

А.М. Рапортиренко (ОИЯИ; ram@sunct1.jinr.ru) *PSL версия системы Reduce для 64-битовых ОС Windows.*

Обсуждается реализация PSL и Reduce для семейства 64-битовых операционных систем Windows. Основным недостатком 32-битовых реализаций были ограничения на максимальный объем используемой оперативной памяти (не более 128M). В предлагаемой реализации таких ограничений нет.

А.А. Гусев, С.И. Виницкий, В.П. Гердт, В.А. Ростовцев, О. Чулуунбаатар (ОИЯИ и Международный университет “Дубна”; gooseff@jinr.ru, vinitsky@thsun1.jinr.ru, gerdt@jinr.ru, rost@jinr.ru, chuka@jinr.ru), Т.А. Толстова (Тверской ГУ; tana0731@mail.ru) *Символьно-численный алгоритм редукции двумерной краевой задачи с применением параметрических функций.*

Представлен символьно-численный алгоритм редукции эллиптической двумерной краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Используется разложение решения по набору функций одной переменной и зависящих от второй переменной как от параметра. Алгоритм реализован в среде Maple-Fortran и применен для построения асимптотических разложений рассматриваемой краевой задачи.

М.Г. Кокотчикова, Д.С. Кулябов, Л.А. Севастьянов (РУДН; mgkokotchikova@gmail.com, yamadharma@gmail.com, leonid.sevast@gmail.com) *Применение регуляризованного метода восстановления функции для задач оптики.*

Продолжение предыдущего доклада этих же авторов (см. раздел “Регулярные собрания семинара”).

В силу оптической специфики задачи для восстановления функции предлагается воспользоваться полиномами Цернике, образующими ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$. Для регуляризованного восстановления матрицы дискретного преобразования гартманограмм в векторы коэффициентов Фурье оптической поверхности используется реализованный в системах Axiom и Matlab символьно-численный алгоритм построения матрицы стабилизирующего функционала.

Н.М. Глазунов (НУА, Киев, Украина; glanm@yahoo.com) *Свойства вещественных функций и гомологическая алгебра.*

Задачи о свойствах (поведение, особенности, существование и нахождение экстремума) достаточно гладких вещественных функций представляются интервальными категориями и функторами и исследуются компьютерным гомолого-алгебраическим методом. Показывается, что метод применим и к исследованию недифференцируемых функций.

М.Н. Геворкян, Д.С. Кулябов (РУДН; mngevorkyan@gmail.com, yamadharma@gmail.com) *Использование операционного подхода для описания квантовой фазы.*

Проблема нахождения аналога классической фазы для случая квантового осциллятора до сих пор не полностью решена. Однако существует множество различных подходов. Рассматриваются подходы, в которых фаза интерпретируется как оператор. Дается обзор основных методов построения фазового оператора. Описывается реализация операторов в системе компьютерной алгебры Maxima.

А.В. Королькова, А.И. Черноиванов (РУДН; avkorolkova@gmail.com, tchernoivanov@gmail.com) *Математическая модель динамической системы передачи данных. Анализ возникновения автоколебаний в системе.*

На основе жидкостной модели предлагается модель динамической системы передачи данных с процессом регулирования состояния потока трафика, задаваемым алгоритмом типа Random Early Detection (RED). Для анализа устойчивости решений динамической системы и исследования типов автоколебаний применяется система компьютерной алгебры Maxima.

А.В. Демидова, Д.С. Кулябов (РУДН; avdemid@gmail.com, yamadharma@gmail.com) *Получение стохастических дифференциальных уравнений для многомерных систем рождения-гибели.*

Рассматриваются методы получения стохастических дифференциальных уравнений, и, в частности, уравнений Фоккера-Планка для систем, описанных многомерными процессами рождения-гибели. Предлагается реализация этих методов в системе компьютерной алгебры Maxima.

Н.А. Немчанинова, Н.В. Любинская (РУДН; aryatasilva@gmail.com, nadin@sci.pfu.edu.ru) *Математическое моделирование интегрально-оптического волновода в криволинейных координатах.*

Обсуждается моделирование поведения электромагнитной волны в волноводе с линзой Люнеберга с использованием криволинейных координат, а также модуль в системе Cadabra для автоматизации перехода из декартовых в криволинейные координаты.

В.В. Корняк (ОИЯИ; kornyak@jinr.ru) *Квантовое описание конечных динамических систем.*

Рассматриваются особенности калибровочных симметрий и квантового описания в конструктивных рамках конечных динамических систем. Конструктивность позволяет эффективно использовать методы компьютерной алгебры и вычислительной теории групп при исследовании квантовых моделей разного типа.

Н.М. Глазунов, А.Н. Тимошенко (НУА, Киев, Украина; glanm@yahoo.com, Dr.Aleksandr.Timoshenko@yandex.ru) *Компьютерно-алгебраические аспекты недифференцируемой оптимизации.*

Пусть E^n — евклидово n-мерное пространство, X – замкнутое выпуклое множество, $f_i(x)$ – выпуклые функции, определенные на некотором открытом множестве $Y \subseteq E^n$, включающем X, $i = 0, 1, ..., m$. Рассматривается задача недифференцируемой оптимизации в форме задачи выпуклого программирования: $f^* = \inf f_0(x)$, $x \in X \subseteq E^n$, $f_i(x) \leq 0$. Исследуются компьютерно-алгебраические аспекты этой и некоторых других задач недифференцируемой оптимизации.

Д. Штефанеску (Бухарестский университет, Румыния; stef@rms.unibuc.ro) *Construction of some Irreducible Polynomials.*

Обсуждается ряд методов построения неприводимых полиномов одной и двух переменных с целыми коэффициентами. Главные результаты основываются на факторизации полиномов Шенемана и исследовании многоугольников Ньютона, связанных с полиномами двух переменных. Для проверки неприводимости разностных полиномов в свою очередь предлагается несколько методов, использующих свойства наклонов в многоугольнике Ньютона. Рассматриваются вычислительные аспекты теории.

Ю.А. Блинков (Саратовский ГУ; BlinkovUA@info.sgu.ru), В.П. Гердт (ОИЯИ; gerdt@jinr.ru), М.В.Зинин (ООО “Акронис”, Москва; mzinin@gmail.com) *Сравнительный анализ программных реализаций построения булевых инволютивных базисов.*

На примерах задач выполнимости булевых формул приведен сравнительный анализ различных реализаций на C/C++ построения булевых инволютивных базисов. В реализациях используются как собственные менеджеры памяти, так и стандартные; разные представления мономов и полиномов; инволютивные деления Жане и Поммаре; плотные и разреженные деревья Жане поиска инволютивных делителей.

Д.А. Янович (ОИЯИ, Дубна; yan@jinr.ru) *Параллельное вычисление базисов Гребнера и Жане при помощи MPI.*

Рассматривается параллельная модификация алгоритма для вычисления базисов Гребнера и Жане, использующая технологию MPI. Особое внимание уделяется минимизации обменов между вычислительными узлами. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

А.А. Мюлляри, Н.Д. Гогин (Университет г. Турку, Финляндия; amyllari@gmail.com, alemio@utu.fi) *Весовые многочлены для времени ожидания в игре Penney Ante с q-гранной костью.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

М.А. Рыбалкин (СПбГПУ; michael.rybalkin@gmail.com), Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru) *Перестановочные двучлены над конечными полями и кольцами* Z/nZ.

Изучаются свойства перестановочных двучленов над конечными полями и кольцами Z/nZ. Исследуется вопрос о генерации перестановочных двучленов для произвольных больших конечных полей и демонстрируется возможность обобщения криптографического протокола RSA с использованием перестановочных двучленов.

А.Б. Арансон (НИИ дальней радиосвязи, Москва; aranson@cbgrad.ru) *Вычисление степенных разложений решений модифицированной системы ОДУ Н. Ковалевского алгоритмами степенной геометрии.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

И.В. Амирханов, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар, И. Сархадов, З.А Шарипов (ОИЯИ; camir@jinr.ru, muzafarov@jinr.ru, nsarker@mail.ru, ibrohim@jinr.ru, ZARIF@jinr.ru) *Исследование решений краевых задач для квазипотенциального уравнения с использованием оператора сдвига.*

С использованием системы Maple исследуются решения краевых задач для квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом.

А.А. Боголюбская, И.Л. Боголюбский (ОИЯИ; abogol@jinr.ru, bogolubs@jinr.ru) *О двумерных солитонах в SU(2) глюодинамике.*

Указывается возможность существования солитонов в двумерной SU(2) глюодинамике. Соответствующий гамильтониан в результате преобразований, выполненных с помощью системы Maple, представлен в терминах радиальных функций. Исследуются локализованные полевые распределения, на которых реализуются локальные минимумы этого гамильтониана. Обсуждаются физические применения таких решений.

Н.М. Глазунов, В.С. Мацюк (НУА, Киев, Украина; glanm@yahoo.com) *О вычислении тензорных полей на многообразиях.*

Рассматриваются методы представления и вычисления тензора Римана, тензора Риччи и тензора энергии-импульса на римановых и псевдоримановых многообразиях. Представлен метод вычисления тензорных произведений на касательных и кокасательных расслоениях.

И. Димовский, М. Спиридонова (ИМИ БАН, Болгария; dimovski@math.bas.bg, mspirid@math.bas.bg) *Резонансы в колебательных системах с интегральным краевым условием.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.И. Сердюкова, Ю.М. Шукринов (ОИЯИ, Дубна; sis@jinr.ru, shukrinv@theor.jinr.ru) *Численно-аналитический метод вычисления ВАХ для системы джозефсоновских переходов.*

Обсуждается использование системы Reduce 3.8 для нахождения асимптотических членов при вычислении напряжений в каждой точке вольт-амперной характеристики.

С.Н. Тычков (ИПУ РАН; jevastiq@gmail.com) *О гармонических интегралах.*

На вопрос о том, каким должно быть векторное поле

$$\nabla = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y,$$

чтобы решения уравнения $\nabla u = 0$ были гармоническими функциями, дается следующий ответ: функция $b(x, y)$ должна удовлетворять условию $\Delta b(b^2 + 1) - 2b(b_x^2 + b_y^2) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Семинар по компьютерной алгебре на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1995-1996г. // Программирование, 1997, No 1. С. 75–77.

2. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Научно-исследовательский семинар "Компьютерная алгебра" в 1996-1997 г. // Программирование, 1998, No 1. С. 69–72.

3. *Абрамов С.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1997-1998 г. // Программирование, 1998, No 6. С. 3–7.

4. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1998-1999 г. // Программирование, 2000, No 1. С. 8–12.

5. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1999-2000 г. // Программирование, 2001, No 1. С. 3–7.

6. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2000-2001 г. // Программирование, 2002, No 2. С. 6–9.

7. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2001-2002 г. // Программирование, 2003, No 2. С. 3–7.

8. *Абрамов С.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2002-2003 г. // Программирование, 2004, No 2. С. 3–7.

9. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2003-2004 г. // Программирование, 2005, No 2. С. 3–9.

10. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2004-2005 г. // Программирование, 2006, No 2. С. 3–7.

11. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2005-2006 г. // Программирование, 2007, No 2. С. 3–8.

12. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2006-2007 г. // Программирование, 2008, No 2. С. 3–8.

13. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2007-2008 г. // Программирование, 2009, No 2. С. 3–9.

14. "Mathematical Modeling and Computational Physics (CAAP'2009)". Book of abstracts of the international conference. Dubna, July 7-11, 2009. Dubna, 2009.

15. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2008-2009 г. // Программирование, 2010, No 2. С. 3–6.

Таблица 9. Алгоритмы построения неоднородных наборов.

Алгоритм	Область применения	Класс алгоритма	Временная сложность и затраты по памяти	М
Выбрасывание лишних значений	Необходимы дальнейшие исследования.	Редуцирующий	Зависит от размеров исходного набора	-
Двойная проекция	(2; n+1+t, (n?t)n+1, st), n - степень простого числа, 1?t?n и 1?s?n?t	Редуцирующий	O(N(k+1)) Память:O(Nk)	-
Комбинирование блоков	(2; k, n1 ... nk) и k > max(n1 ... nk) Необходимы дальнейшие исследования.	Рекурсивный	O(n2+klog2k), Память: O(n2(n+1)+k(?logn+1k?(n2-1)+1)), где n ? d и n=pm, p - простое число, k?1	-