ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2013, № 2, с. 3–10

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

СЕМИНАР ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ В 2011–2012 гг.

© 2013 г. С. А. Абрамов*, А. А. Боголюбская, В. А. Ростовцев****

**Вычислительный центр РАН*
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
***Объединенный институт ядерных исследований*
141980 Дубна Московской области
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, abogol@jinr.ru, rost@jinr.ru
Поступила в редакцию 10.07.2012

Годовой отчет о работе научно-исследовательского семинара по компьютерной алгебре.

1. О СЕМИНАРЕ

В семинаре рассматриваются новые результаты в области компьютерной алгебры — символьные алгоритмы и их реализация, соответствующие вопросы системного программирования.

В 2011–2012 учебном году семинар собирался раз в месяц по третьим средам на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, а в мае 2012 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) состоялось традиционное заседание, организованное совместно с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ.

Web–страница семинара

`http : //www.ccas.ru/sabramov/seminar/doku.php`

содержит информацию о планируемых и состоявшихся ранее докладах.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ СОБРАНИЯ СЕМИНАРА

С сентября по апрель были прочитаны следующие доклады[1].

В.П. Гердт (ОИЯИ, Дубна; gerdt@jinr.ru). *Анализ аппроксимируемости систем уравнений в частных производных конечными разностями.*

[1]Перечень докладов, прочитанных в 1995–2011 гг., опубликован в [1]–[17].

Рассматриваются конечно-разностные аппроксимации полиномиально-нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых являются рациональными функциями от независимых переменных. Общепринятое понятие (слабой) аппроксимации исходных уравнений сопоставляется с понятием сильной аппроксимации, введенным ранее автором для линейных дифференциальных систем и обобщенным недавно на нелинейные системы. Для ортогональных и равномерных сеток предлагается алгоритмическая процедура проверки сильной аппроксимируемости методами компьютерной алгебры, основанная на приведении в инволюцию исходной дифференциальной системы и построении разностного стандартного базиса для рассматриваемой аппроксимации. В качестве примеров изучаются конечно-разностные аппроксимации некоторых переопределенных линейных дифференциальных систем и две аппроксимации для двумерных нелинейных уравнений Навье-Стокса. Предложенная процедура устанавливает, что одна из этих двух аппроксимаций является сильной, а другая нет.

В.В. Корняк (ОИЯИ, Дубна; kornyak@jinr.ru). *Вычислительная теория групп и квантовая физика.*

Вычислительная теория групп изучает конечные (или конечно-представленные) группы конструктивными алгоритмическими методами.

Предлагается новая – “конечная” формулировка квантовой механики, основанная на конечных группах и их представлениях над конструктивными числовыми системами. Обсуждаются алгоритмы, необходимые для построения “конечной” квантовой механики.

А.А. Михалев (Мех-мат МГУ, Москва; aamikhalev@mail.ru). *Примитивные элементы свободных алгебр.*

Многообразие линейных алгебр над полем называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной. Многообразия всех алгебр, коммутативных алгебр, антикоммутативных алгебр, алгебр Ли, суперапгебр Ли, $p-$алгебр Ли и $p-$суперапгебр Ли являются основными типами шрайеровых многообразий алгебр.

Пусть $A(X)$ – свободная алгебра шрайерового многообразия алгебр с множеством X свободных образующих. Система элементов $u_1, \ldots, u_n$ алгебры $A(X)$ называется примитивной, если существует множество Y свободных образующих алгебры $A(X)$, содержащее элементы $u_1, \ldots, u_n$.

Для свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий алгебр построены и реализованы алгоритмы распознавания примитивных систем элементов, а также алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до свободных порождающих множеств.

Доклад основан на совместных работах автора с К. Шампаньер, А.А. Чеповским, А.В. Михалевым, И.П. Шестаковым, У.У. Умирбаевым, Дж. Ю, А.А. Золотых.

А.В. Смирнов (НИИВЦ МГУ, Москва; asmirnov@gmail.com). *Алгоритмы вычисления фейнмановских интегралов.*

Фейнмановские интегралы являются фундаментальными величинами при построении квантово-полевых амплитуд в рамках теории возмущений, в частности, они возникают при вычислениях в рамках Стандартной Модели физики элементарных частиц. На современном уровне исследований в конкретной задаче может требоваться вычисление миллионов интегралов Фейнмана, что, естественно, невозможно без современных компьютеров. Согласно классическому подходу, задача вычисления фейнмановских интегралов сводится, во-первых, к их редукции к относительно небольшому числу мастер-интегралов и, во-вторых, к вычислению последних. Предлагаются новые алгоритмы редукции и вычисления фейнмановских интегралов.

С.П. Царев (Сибирский Федеральный Университет, Красноярск; sptsarev@mail.ru). *О структуре решетки правых делителей линейного обыкновенного дифференциального оператора.*

В 1996 г. автором был предложен алгоритм полного перечисления всех возможных факторизаций заданного линейного обыкновенного дифференциального оператора (ЛОДО) на неприводимые множители над полем рациональных функций. Полное описание всех возможных структур, выдаваемых данным алгоритмом, до сих пор неизвестно. Приводятся новые результаты исследования структуры всех возможных факторизаций заданного ЛОДО над произвольным дифференциальным полем коэффициентов. Удобным алгебраическим инструментом для этого описания является теория модулярных решеток.

А.Б. Батхин (ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва; batkhin@gmail.com). *Точные решения шестого уравнения Пенлеве.*

Предлагается метод построения точных решений шестого уравнения Пенлеве (PVI) в виде конечных сумм степенных функций с рациональными показателями степени. Метод существенно использует алгоритмы степенной геометрии для построения степенных разложений решений обыкновенного дифференциального уравнения и алгоритмы компьютерной алгебры.

Д.С. Кулябов, А.В. Королькова, М.Н. Геворкян, Л.А. Севастьянов (ФМиЕН РУДН, Москва; yamadharma@gmail.com, avkorolkova@gmail.com, mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru, sevast@sci.pfu.edu.ru). *Применение симплектических интеграторов для задачи распространения электромагнитных волн.*

Для численного решения дифференциальных уравнений предлагается использовать методы, сохраняющие структуру решений, а именно, методы геометрических интеграторов. Рассматривается метод симплектического интегратора в применении к задачам распространения электромагнитных волн в волноводе. Подробно рассматриваются вспомогательные задачи: запись уравнений Максвелла в криволинейных голономных координатах; получение гамильтониана для уравнений Максвелла.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, ВМК МГУ, Москва; sergeyabramov@mail.ru), Д.Е. Хмельнов (ВЦ РАН, Москва; dennis_khmelnov@mail.ru). *О валюацях мероморфных решений линейных разностных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами.*

Рассматривается несколько алгоритмов получения нижних оценок валюаций (например, порядков полюсов) компонент мероморфных решений разностных линейных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами. Наряду с алгоритмами, основанными на идеях, в каком-то виде уже применявшихся в компьютерной алгебре при работе с нормальными разностными системами первого порядка, предлагается новый алгоритм, использующий «тропические» вычисления. Показывается, что последний алгоритм, обеспечивая хорошую точность оценок, является при этом и достаточно быстрым.

А.М. Денисов (ВМК МГУ, Москва; den@cs.msu.ru). *Неединственность решения бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных в пространстве Шварца.*

Рассматривается задача, возникающая в двумерной доплеровской томографии. Требуется определить две функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из пространства Шварца в ограниченной области, являющиеся решением бесконечной системы уравнений в частных производных. Система обладает некоторыми свойствами симметрии. Решение сформулированной задачи не единственно. Предлагается для обсуждения вопрос о выделении некоторых специальных классов единственности решения сформулированной задачи.

М.В. Зинин (ООО “Андер Девелопмент”, Москва; mzinin@gmail.com). *Символьные алгоритмы и программы вычисления булевых базисов Грёбнера.*

Кратко описываются наиболее распространенные алгоритмы вычисления базисов Грёбнера и обсуждаются аспекты применений этих алгоритмов в задаче построения булевых базисов Грёбнера. Предлагается вариант инволютивного алгоритма для эффективного решения этой задачи. Представлена реализация алгоритма в виде пакетов для открытых систем компьютерной алгебры REDUCE и Macaulay2.

3. ДВУХДНЕВНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ В ОБЪЕДИНЕННОМ ИНСТИТУТЕ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (ДУБНА)

По установившейся традиции в мае 2012 г. в Дубне прошло совместное заседание семинаров “Компьютерная алгебра” факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН и семинара Лаборатории информационных технологий ОИЯИ. По существу, это была двухдневная конференция по компьютерной алгебре и ее приложениям[2].

Вниманию участников были предложены следующие выступления.

В.П. Иванников (ИСП РАН, Москва; ivan@ispras.ru). *О верификации программ.*

Рассматриваются вопросы верификации больших программных комплексов, таких, например, как операционные системы.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, ВМК МГУ, Москва; sergeyabramov@mail.ru), М. Петковшек (Университет Любляны, Словения; Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si). *О полиномиальных решениях линейных уравнений с частными производными и разностями.*

Вопрос о том, имеет ли данное линейное уравнение с частными производными или разностями с полиномиальными коэффициентами ненулевое полиномиальное решение, в общем случае неразрешим алгоритмически. Но дифференциальное или разностное уравнение $L(y) = 0$, $y = y(x_1, \ldots, x_m)$, $m > 1$, с постоянными коэффициентами имеет ненулевое полиномиальное решение если и только если коэффициент уравнения при y равен нулю, причем в последнем

[2] *Примечание С.А. Абрамова и А.А. Боголюбской.* Эта конференция была посвящена восьмидесятилетию В.А. Ростовцева, см. поздравительную статью в N^o 3 за 2012 г.

случае уравнение имеет полиномиальное решение любой степени.

С.Ф. Адлай (ВЦ РАН, Москва; SemjonAdlaj@gmail.com). *Высокоэффективная арифметика эллиптических кривых.*

Алгоритмы деления точек эллиптической кривой позволят с высокой точностью вычислять (неполные) эллиптические интегралы, в изобилии возникающие среди решений задач теоретической механики. Указывается подход, позволивший получить новые алгоритмы быстрых и точных вычислений для задач, в которых традиционные методы вычисления не позволяют добиваться желаемой точности за разумное время.

В.В. Корняк (ОИЯИ, Дубна; kornyak@jinr.ru). *Квантовая механика и билинейные перестановочные инварианты конечных груп.*

Любая квантово-механическая задача может быть сформулирована в инвариантном подпространстве перестановочного представления некоторой группы (без потери физического содержания достаточно рассматривать конечные группы). Скалярные произведения в инвариантных подпространствах, необходимые для формулировки правила Борна, представляют собой линейные комбинации некоторого набора независимых билинейных инвариантных форм перестановочного представления. Предлагается алгоритм вычисления полного набора таких форм для любой группы перестановок.

А.Н. Воропаев (Петрозаводский ГУ; voropaev@psu.karelia.ru). *Подсчёт k-угольников в конечных проективных плоскостях по явным формулам для определения количества циклов в графах.*

На примере графов конечных проективных плоскостей демонстрируется техника символьных преобразований явных выражений для подсчёта циклов фиксированной длины. Циклы длины $2k$ в графе плоскости соответствуют k-угольникам в плоскости. Ранее были известны многочлены, представляющие зависимость чисел k-угольников в плоскости от её порядка, при $k = 3, 4, 5, 6$.

Благодаря учёту того, что графы конечных проективных плоскостей двудольны и не содержат циклов длины 4, при выводе явных формул для подсчёта циклов удалось продвинуться до значения длины цикла 20. Путём аналитических преобразований из выведенных явных формул были получены многочлены, выражающие зависимость количества k-угольников в плоскости от её порядка при $k = 3, 4, \ldots, 10$.

А.Д. Брюно (ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва; abruno@keldysh.ru), В.Ф. Еднерал (НИИЯФ МГУ, Москва; edneral@theory. sinp.msu.ru). *Нормальные формы уравнений Эйлера-Пуассона.*

Обсуждаются итоги проверки одной гипотезы о первых интегралах уравнений Эйлера-Пуассона с помощью программного пакета построения нормальных форм.

Д. Штефанеску (Бухарестский университет, Румыния; stef@rms.unibuc.ro). *Оптимизация границ корней полиномов.*

Исходя из оценки Лагранжа, одной из лучших известных оценок положительных корней полиномов одной переменной, выводится оценка абсолютных величин корней полиномов с комплексными коэффициентами. Обсуждаются некоторые новые оценки корней полиномов с вещественными коэффициентами.

С.И. Сердюкова, Ю.М. Шукринов (ОИЯИ, Дубна; sis@jinr.ru, shukrinv@theor.jinr.ru). *Определение критической точки ВАХ системы джозефсоновских переходов. Периодические и непереодические с $\gamma = 0$ граничные условия.*

Решается проблема выбора точки перехода от аналитического расчета к численному в задаче нахождения вольт-амперной характеристики системы 9 джозефсоновских переходов. Для вычислений используется система REDUCE 3.8.

С.В. Парамонов (ВМК МГУ, Москва; s.v.paramonov@yandex.ru). *О дробно-рациональных решениях линейных однородных уравнений с частными производными или разностями.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.А. Гутник (МФТИ, МГИМО, Москва; s.gutnik@inno.mgimo.ru). *Символьно-численные методы исследования динамики осесимметричного спутника под действием гравитационного и гиростатического моментов.*

Исследуется динамика вращательного движения осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и гиростатического моментов. С использованием систем компьютерной алгебры Mathematica и Maple получены уравнения стационарных движений спутника, численно определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Проведено исследование устойчивости полученных положений равновесия.

Д.С. Кулябов, А.В. Королькова (ФМиЕН РУДН, Москва; yamadharma@gmail.com, avkorolkova@gmail.com). *Тензорные вычисления в системах компьютерной алгебры.*

Рассматриваются возможности тензорных вычислений в свободно распространяемых пакетах-компьютерной алгебры. Выделяется несколько типов тензорных расчётов, обсуждается специфика и область применения каждого типа.

В качестве примеров реализации тензорных вычислений приводятся специализированная система Cadabra и универсальная система Maxima как типичные представители своих категорий. Особенности их применения демонстрируются на примере уравнений Максвелла в криволинейных координатах.

Статья по теме доклада готовится к публикации в № 3, 2013 г.

М.Н. Геворкян (ФМиЕН РУДН, Москва; mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru). *Особенности системы компьютерной алгебры Sage.*

Предлагается обзор возможностей свободной системы компьютерной алгебры Sage, разрабатываемой на языке Python с 2005 года (www.sagemath.org), ее взаимодействие с другими системами компьютерной алгебры (GAP, Maxima, Singular) и пакетами численных расчетов (GSL, SciPy, NumPy, ATLAS). Веб-интерфейс Sage Notebook обеспечивает возможность удаленной работы; в качестве системы визуализации используется библиотека Matplotlib (которая, в частности, позволяет использовать LaTeXкод при создании графических изображений). Отдельно обсуждается использование команд Sage непосредственно в LaTeX-документах.

Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru). *Универсальный инволютивный базис и бордер-базисы Роббиано.*

Описывается в геометрических терминах класс инволютивных делений, допускающий конструкцию универсального инволютивного базиса. Обсуждается связь этой конструкции универсальных инволютивных базисов с бордер-базисами Роббиано.

Ю.А. Блинков, С.В. Иванов (Саратовский ГУ; BlinkovUA@ info.sgu.ru, evilgraywolf@gmail.com), Л.И. Могилевич (ПФ МГУПС, Саратов; mogilevich@sgu.ru). *Математическое и компьютерное моделирование нелинейных волн деформаций в оболочке, содержащей вязкую жидкость.*

Обсуждается использование средств компьютерной алгебры в анализе распространения нелинейных волн деформаций в физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

В.П. Гердт (ОИЯИ, Дубна; gerdt@jinr,ru), А. Хашеми (Технологический университет, Исфахан, Иран; Amir.Hashemi@cc.iut.ac.ir). *Об использовании критериев Бухбергера в алгоритме G^2V вычисления базисов Гребнера.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

Д.А. Янович (ОИЯИ, Дубна; yan@jinr.ru). *Параллельное модулярное вычисление базисов Грёбнера и инволютивных базисов.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

П.В. Фокин, Ю.А. Блинков (Саратовский ГУ; fokinpv@gmail.com, BlinkovUA@info.sgu.ru). *ZDD диаграммы с общим кэшем.*

Предлагается использовать ZDD диаграммы с общим кэшем для представления булевых полиномов при построение инволютивных базисов Грёбнера. Такое представление ускоряет выполнение операций над булевыми полиномами. Обсуждаются программные реализации на Python и C++.

Е.С. Шемякова (ВЦ РАН, Москва; shemyakova.katya@gmail.com). *Доказательство того, что вронскианы Дарбу описывают все возможные преобразования Дарбу порядка два.*

Преобразования Дарбу (ПД) используются для точного решения линейных и нелинейных уравнений с частными производными. Вронскианы Дарбу — это формулы, позволяющие строить ПД по некоторому числу частных решений исходного уравнения. Ранее было доказано, что хорошо известные преобразования Лапласа являются единственными ПД порядка один, которые нельзя построить с помощью вронскианов Дарбу. Предлагается доказательство того, что любое ПД порядка два можно построить с помощью вронскианов Дарбу.

Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru), А.Б. Терентьев (СПбГТУ, Санкт-Петербург; alterterrific@gmail.com). *Моделирование марковских процессов с асимптотически центральной мерой на трехмерных диаграммах Юнга.*

Рассматриваются проблемы компьютерного моделирования марковских случайных блужданий на трехмерном графе Юнга. Вершины этого графа соответствуют трехмерным диаграммам Юнга, а пути из корневой вершины – трехмерным таблицам Юнга. Используется интерпретация таблиц Юнга как мономиальных упорядочений. Это позволяет привлекать параметризацию Роббиано допустимых упорядочений для исследования отклонений переходных вероятностей вдоль разных путей, соединяющих две фиксированные диаграммы Юнга.

И.П. Юдин (ОИЯИ, Дубна; yudin@jinr.ru). *Аналитический алгоритм решения задач нелинейной динамики заряженных частиц в тороидальном магнитном поле с использованием метода функций влияния.*

Предлагаются аналитические алгоритмы решения уравнения нелинейной динамики заряженных частиц в тороидальном магнитном поле, полученные методом функций влияния с использованием матричного формализма. Даются формулы для аберрационных коэффициентов нелинейной оптики до третьего порядка включительно. В качестве приложения рассмотрен тороидальный спектрометр для физики высоких энергий.

С.Д. Мешвелиани (ИПС РАН, Переславль-Залесский; mechvel@botik.ru). *О проекте интерфейса DoCon-Haskell — Axiom.*

Описывается интерфейс систем DoCon и Axiom. Интерфейс основан на обмене строками, именованных трубках (Unix named pipes) и т.д.

А.М. Рапортиренко (ОИЯИ, Дубна; ram@sunct1.jinr.ru). *Локальная версия системы AXIOM.*

Описывается версия системы AXIOM, в которой присутствуют компоненты ALDOR и NAG link. В настоящее время эта версия работает с использованием gcl версии Common LISP.

Н.А. Малашонок, М.А. Рыбаков (ТГУ им. Державина, Тамбов; namalaschonok@gmail.com, mixail08101987@mail.ru). *Символьно-численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с требуемой точностью.*

Приводится алгоритм символьного решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на применении преобразования Лапласа. Возможно получение требуемой точности решения исходной системы. Алгоритм входит в состав библиотеки алгоритмов системы Mathpar.

Статья по теме доклада готовится к публикации в № 3, 2013.

Л. Хай, А.А. Гусев, С.И. Виницкий, О. Чулуунбаатар, В.П. Гердт, В.А. Ростовцев (ОИЯИ, Дубна; luonglehai_tcl@yahoo.com.vn, gooseff@jinr.ru, vinitsky@thsun1.jinr.ru, chuka@jinr.ru, gerdt@jinr.ru, rost@jinr.ru). *Символьно-численный алгоритм для расчёта ридберговских состояний и скоростей распада в сильных магнитных полях.*

Рассматривается краевая задача для уравнения Шрёдингера в цилиндрических координатах. Эта задача описывает примесные состояния в квантовых проволоках или в водородоподобных атомах в сильном однородном магнитном поле. Исходная задача редуцируется с помощью метода Канторовича к граничной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно продольных переменных. Представлен символьно-численный алгоритм, реализованный в системе Maple, который позволяет получать аналитические выражения для эффективных потенциалов, собственных функций и собственных значений, элементов матрицы дипольных моментов.

Р.Т. Файзуллин (ОмГТУ, Омск; frt@omgtu.ru). *Сведение задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ к основным задачам линейной алгебры.*

Показывается, что задача ВЫПОЛНИМОСТЬ может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений с положительной определенной симметрической матрицей. Построена функция от коэффициентов разложения по собственным векторам этой матрицы, глобальный минимум которой отвечает решению задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Предлагается эвристический тест определения значимого числа бит в решении проблемы факторизации.

В.С. Рихвицкий (ОИЯИ, Дубна; rqvtsk@mail.ru) *Цифровая Вселенная: Петлевая Квантовая Космология Абэя Аштекара, логический аспект.*

Приводится пример петлевой квантовой космологической модели типа Бьянки II в виде базы знаний на языке предикатов; предполагается, что реальность сущностей в рамках базы знаний заключается в том, что при обработке запросов к базе знаний ответ доставляет стандартный механизм логического вывода. Язык предикатов дополнен некоторыми предикатами, использующими аналитические вычисления в системе Maple.

Г.И. Малашонок (ТГУ им. Державина, Тамбов; malaschonok@gmail.com). *Треугольные разложения матриц в коммутативных областях.*

Предлагаются два новых рекурсивных алгоритма вычисления треугольного разложения в коммутативной области для матрицы общего вида, имеющих сложность матричного умножения. Оба алгоритма вычисляют разложение вида $A = LdU$, где L — нижняя треугольная матрица, U — верхняя треугольная матрица, d — матрица перестановок, домноженная на обратную диагональную матрицу. Каждая из матриц, стоящих в правой части, имеет такой же ранг, что и матрица A. Кроме того, в первом алгоритме одновременно вычисляется присоединенная матрица к блоку матрицы A, имеющему максимальный ранг.

Г.И. Малашонок (ТГУ им. Державина, Тамбов; malaschonok@gmail.com). *Интеллектуальная математическая система Mathpar.*

Дается характеристика веб-сервиса Mathpar (http://mathpar.com), предназначенного для проведения символьных и численных вычислений в научных исследованиях, инженерных расчетах и образовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Семинар по компьютерной алгебре на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1995–1996 г. // Программирование, 1997, No 1. С. 75–77.

2. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Научно-исследовательский семинар “Компьютерная алгебра” в 1996–1997 г. // Программирование, 1998, No 1. С. 69–72.

3. *Абрамов С.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1997–1998 г. // Программирование, 1998, No 6. С. 3–7.

4. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1998–1999 г. // Программирование, 2000, No 1. С. 8–12.

5. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1999–2000 г. // Программирование, 2001, No 1. С. 3–7.

6. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2000–2001 г. // Программирование, 2002, No 2. С. 6–9.

7. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2001–2002 г. // Программирование, 2003, No 2. С. 3–7.

8. *Абрамов С.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2002–2003 г. // Программирование, 2004, No 2. С. 3–7.

9. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2003–2004 г. // Программирование, 2005, No 2. С. 3–9.

10. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2004–2005 г. // Программирование, 2006, No 2. С. 3–7.

11. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2005–2006 г. // Программирование, 2007, No 2. С. 3–8.

12. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2006–2007 г. // Программирование, 2008, No 2. С. 3–8.

13. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2007–2008 г. // Программирование, 2009, No 2. С. 3–9.

14. "Mathematical Modeling and Computational Physics (CAAP'2009)". Book of abstracts of the internationl conference. Dubna, July 7-11, 2009. Dubna, 2009.

15. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2008-2009 г. // Программирование, 2010, No 2. С. 3–8.

16. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2009-2010 г. // Программирование, 2011, No 2. С. 3–8.

17. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2010-2011 г. // Программирование, 2012, No 2. С. 3–10.