ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2012, № 2, с. 45–54

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.92+004.94

ЗНАМЕНАТЕЛИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА *

© 2012 г. С. А. Абрамов, Д. Е. Хмельнов
Вычислительный центр РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, dennis_khmelnov@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2011

Предлагается алгоритм поиска универсального знаменателя рациональных решений системы линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Уравнения системы могут иметь произвольные порядки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск рациональных решений (т.е. решений, имеющих вид рациональных функций) линейных разностных уравнений и систем представляет самостоятельный интерес и, кроме этого, входит как часть в различные компьютерно-алгебраические алгоритмы.

Пусть k — поле характеристики 0. Для кольца полиномов и поля рациональных функций от x с коэффициентами в поле k мы в дальнейшем используем обычные обозначения $k[x]$ и $k(x)$. В статье рассматриваются системы вида

$$A_r(x)y(x+r)+\cdots+A_1(x)y(x+1)+ \\ +A_0(x)y(x)=b(x), \quad (1)$$

где

- $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x)$ суть квадратные матрицы порядка m, элементы которых принадлежат $k[x]$ (запись: $A_0(x)$, $A_1(x)$, $\ldots$, $A_r(x) \in \mathrm{Mat}_m(k[x])$), при этом предполагается, что матрицы $A_0(x)$, $A_r(x)$ ненулевые,
- $b(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_m(x))^T \in k[x]^m$ — правая часть системы,
- $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T$ — столбец неизвестных.

Число r называется порядком системы.

Система

$$A_r(x)y(x+r)+\cdots+A_1(x)y(x+1)+ \\ +A_0(x)y(x)=0 \quad (2)$$

— однородная система, соответствующая (1). Мы предполагаем, что ее уравнения независимы над $k[x,\phi]$, где ϕ — оператор сдвига:

$$\phi(y(x)) = y(x+1).$$

Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T \in k(x)^m$ системы (1) называется рациональным. Если $y(x) \in k[x]^m$, то это решение также является полиномиальным (частный случай рационального решения).

Хорошо известны (см. [7, 11, 13, 12, 10]) алгоритмы поиска всех рациональных решений нормальных систем уравнений первого порядка:

$$y(x+1) = A(x)y(x), \quad (3)$$

где $A(x)$ обратимая в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$ матрица. Алгоритмы из [7, 11, 12, 10] основаны на нахождении некоторого универсального знаменателя рациональных решений исходной системы, или, как для краткости мы будем писать, универсального знаменателя для исходной системы, т.е. такого полинома $U(x) \in k[x]$, что если система имеет рациональное решение $y(x) \in k(x)^m$, то оно может быть представлено как $\frac{1}{U(x)}z(x)$, где

*Частичная поддержка РФФИ, грант 10-01-00249-а.

$z(x) \in k[x]^m$. Зная универсальный знаменатель, можно сделать подстановку и преобразовать исходную систему в систему для $z(x)$, а затем применить один из известных алгоритмов (см., например, [7, 11, 5]) поиска полиномиальных решений.

Предложенный в [12] алгоритм $\mathbf{A}_U$ построения универсальных знаменателей для систем вида (3) был усовершенствован в [10], и там же было показано, что новый вариант $\mathbf{A}'_U$ этого алгоритма имеет меньшую сложность, чем алгоритмы из [7, 11]. Он имеет также меньшую сложность, чем $\mathbf{A}_U$. Алгоритмы $\mathbf{A}_U, \mathbf{A}'_U$ и алгоритмы из [7, 11] находят один и тот же универсальный знаменатель $U(x)$.

В разделе 2 вводятся необходимые понятия и рассказывается об основной идее алгоритма $\mathbf{A}'_U$. В разделе 3 мы показываем, как эта идея обобщается на случай систем вида (1); важную роль здесь играет построение так называемых охватывающих систем, о которых будет заранее сказано в разделе 2.3. Новый алгоритм построения универсального знаменателя вместе с алгоритмом из [5] построения полиномиальных решений дает эффективный (как показывают наши эксперименты) алгоритм построения всех рациональных решений. Насколько известно авторам, это первый алгоритм такого рода, применимый к произвольным системам вида (1).

Построение универсального знаменателя и собственно рациональных решений может быть выполнено и с помощью преобразования исходной системы в систему первого порядка. В разделе 5 мы показываем преимущества предлагаемого в статье алгоритма перед алгоритмом, основанном на этом преобразовании.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. *Порядки по отношению к неприводимым полиномам*

Введем ряд обозначений. Запись $f(x) \perp g(x)$ будет обозначать взаимную простоту полиномов $f(x),\ g(x) \in k[x]$; если $F(x) \in k(x)$, то $\mathrm{den} F(x)$ представляет собой нормированный (со старшим коэффициентом 1) полином такой, что $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den} F(x)}$ для некоторого $f(x) \in k[x]$, $f(x) \perp \mathrm{den} F(x)$. Множество нормированных неприводимых полиномов из $k[x]$ будет обозначаться через $\mathrm{Irr}(k[x])$. Если $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$, $f(x) \in k[x]$, то $\mathrm{val}_{p(x)} f(x)$ определяется как максимальное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $p^n(x) | f(x)$ ($\mathrm{val}_{p(x)} 0 = \infty$), и $\mathrm{val}_{p(x)} F(x) = \mathrm{val}_{p(x)} f(x) - \mathrm{val}_{p(x)} g(x)$ для $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x) \in k[x]$. Для двух произвольных ненулевых рациональных функций $r(x)$, $s(x)$ и $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$ выполняются соотношения

$$\mathrm{val}_{p(x)}(r(x)s(x)) = \mathrm{val}_{p(x)} r(x) + \mathrm{val}_{p(x)} s(x),$$

$$\mathrm{val}_{p(x)}(r(x)+s(x)) \geqslant \min\{\mathrm{val}_{p(x)} r(x),\ \mathrm{val}_{p(x)} s(x)\}.$$

Если $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))^T \in k(x)^m$, то $\mathrm{den} F(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^m \mathrm{den} F_i(x)$ и $\mathrm{val}_{p(x)} F(x) = \min_{i=1}^m \mathrm{val}_{p(x)} F_i(x)$, где lcm — обозначение наименьшего общего кратного полиномов.

Для произвольной матрицы $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_m(k(x))$ мы определяем $\mathrm{den} A(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^m \mathrm{lcm}_{j=1}^m \mathrm{den}\, a_{ij}(x)$.

2.2. *Нормальные системы уравнений первого порядка*

Для системы (3) положим

$$V(x) = \mathrm{den} A(x-1),\ \ W(x) = \mathrm{den} A^{-1}(x).$$

Тогда для любого рационального решения $y(x)$ этой системы и для любого $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$ выполнено неравенство

$$\mathrm{val}_{p(x)} y(x) \geqslant -\min \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x+j)} V(x), \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x-j)} W(x) \right\} \quad (4)$$

([12]), пользуясь которым можно, во-первых, эффективно найти такое конечное множество M неприводимых полиномов, что если знаменатель некоторого рационального решения этой системы делится на $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$, то $p(x) \in M$, и, во-вторых, определить некоторый универсальный знаменатель

$$U(x) = \prod_{p(x) \in M} p^{\gamma_{p(x)}}(x), \quad (5)$$

где $\gamma_{p(x)}$ обозначает абсолютную величину правой части неравенства (4).

Алгоритм $\mathbf{A}'_U$ отличается от $\mathbf{A}_U$ тем, что учитывает возможность равенства показателей $\gamma_{p(x)}$ для различных (иногда многих) $p(x)$, отличающихся друг от друга сдвигом на целое число. Входными данными для $\mathbf{A}'_U$ служат полиномы $V(x)$ и $W(x)$, связь которых с какой-либо системой уравнений для этого алгоритма значения не имеет.

В разделе 3 мы покажем, как находить $V(x)$ и $W(x)$ для системы (2), чтобы затем универсальный знаменатель для нее мог вычисляться алгоритмом $\mathbf{A}'_U$. Существенную роль здесь играет возможность построения так называемых охватывающих систем для данной системы.

2.3. *Охватывающие системы*

Для любой системы S вида (1) можно построить *l-охватывающую* систему $\bar{S}$

$$\bar{A}_r(x)y(x+r)+\dots+\bar{A}_1(x)y(x+1)+ \\ +\bar{A}_0(x)y(x)=\bar{b}(x), \quad (6)$$

ведущая матрица которой обратима в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$, а множество решений содержит все решения системы S. Аналогично, можно построить *t-охватывающую* систему $\bar{\bar{S}}$

$$\bar{\bar{A}}_r(x)y(x+r)+\dots+\bar{\bar{A}}_1(x)y(x+1)+ \\ +\bar{\bar{A}}_0(x)y(x)=\bar{\bar{b}}(x), \quad (7)$$

ее трейлинговая матрица обратима в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$, и множество решений содержит все решения системы S. При этом элементы матриц и правых частей, входящих в (6), (7), принадлежат $k[x]$. Не исключается равенство нулю матриц $\bar{A}_0(x)$, $\bar{\bar{A}}_r(x)$ — как одной из них, так и обеих.

Построение охватывающих систем может быть выполнено алгоритмами EG ([6]) и EG′ ([8]); алгоритм EG′ является усовершенствованной версией алгоритма EG.

Примечание 1. *Если $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$ являются l- и t-охватывающими системами, построенными алгоритмом EG′ для (1), то l- и t-охватывающие системы, построенные алгоритмом EG′ для (2), совпадают с однородными системами, соответствующими $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$.*

Алгоритм EG′ заключается в последовательном повторении двух этапов — *редукции* и *сдвига*; повторение продолжается пока строки ведущей (трейлинговой) матрицы остаются линейно зависимыми над k. На этапе редукции находятся коэффициенты зависимости, а затем уравнение, отвечающее одной из зависимых строк, заменяется линейной комбинацией других уравнений, и строка ведущей (трейлинговой) матрицы становится нулевой. На этапе сдвига к новому уравнению применяется оператор ϕ (или соответственно ϕ^{-1}). Следование некоторому простому правилу выбора заменяемых зависимых строк гарантирует завершение выполнения алгоритма.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Вначале рассмотрим однородный случай (2). Если ведущая матрица $A_r(x)$ системы (2) обратима в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$, то эту систему можно переписать как систему вида (3):

$$Y(x+1)=A(x)Y(x),$$

где

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_m \\ \hat{A}_0(x) & \hat{A}_1(x) & \dots & \hat{A}_{r-1}(x) \end{pmatrix} \quad (8)$$

($\hat{A}_k(x) = -A_r^{-1}(x)A_k(x)$, I_m — единичная матрица порядка m),

$$Y(x)=\big(y(x)^T, y(x+1)^T,\dots, \\ y(x+r-1)^T\big)^T, \quad (9)$$

матрица $A(x)$ принадлежит $\mathrm{Mat}_{rm}(k(x))$, вектор $Y(x)$ имеет rm компонент. Если дополнительно матрица $A_0(x)$ обратима в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$, то $A(x)$ обратима в $\mathrm{Mat}_{rm}(k(x))$:

$$A^{-1}(x)=\begin{pmatrix} \check{A}_1(x) & \dots & \check{A}_{r-1}(x) & \check{A}_r(x) \\ I_m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I_m & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

($\check{A}_k(x) = -A_0^{-1}(x)A_k(x)$). Следовательно, если матрицы $A_0(x), A_1(x)$ обратимы, то универсальный знаменатель для системы (2) может быть найден применением алгоритма $\mathbf{A}'_U$ к

$$V(x) = \mathrm{den}A(x-r), \ \ W(x) = \mathrm{den}A^{-1}(x);$$

привлечение $A(x-r)$ вместо $A(x-1)$ в качестве $V(x)$ правомерно в силу того, что нам нужен универсальный знаменатель только для компонент $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ вектора $Y(x)$.

Теперь рассмотрим систему (2) без предположения об обратимости матриц $A_0(x)$ и $A_r(x)$ в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$ Для исходной системы можно найти l- и t-охватывающие системы вида (6) и (7) с нулевыми правыми частями. Любое решение исходной системы будет также решением системы

$$\begin{aligned}\bar{A}_r(x+1)y(x+r+1) + \big(\bar{A}_{r-1}(x+1) + {}\\ + \bar{\bar{A}}_r(x)\big)\, y(x+r) + \dots + \big(\bar{A}_0(x+1) + {}\\ \bar{\bar{A}}_1(x)\big)\, y(x+1) + \bar{\bar{A}}_0(x)y(x) = 0,\end{aligned} \quad (11)$$

в которой ведущая и трейлинговая матрицы обратимы в $\mathrm{Mat}_m(k(x))$, что позволяет применить описанный выше подход. Таким образом, получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\bar{A}_r(x)$ — ведущая матрица l-охватывающей системы, и $\bar{\bar{A}}_0(x)$ — трейлинговая матрица t-охватывающей системы для однородной системы (2). Пусть $U(x)$ — результат применения алгоритма $\mathbf{A}'_U$ к $V(x) = \mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(x-r)$, $W(x) = \mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x)$. Тогда полином $U(x)$ является универсальным знаменателем для системы (2).*

Оказывается, при построении универсальных знаменателей для неоднородных систем можно игнорировать правые части.

Теорема 1. *Пусть $U(x)$ — универсальный знаменатель для системы (2), полученный как описано в лемме 1. Пусть при этом l- и t-охватывающие системы для (2) найдены алгоритмом EG'. Тогда $U(x)$ является универсальным знаменателем для системы (1) при любой правой части $b(x) \in k[x]^m$.*

Доказательство. Запишем систему (11) в виде

$$\begin{aligned}B_{r+1}(x)y(x+r+1) + \dots + B_1(x)y(x+1) + {}\\ + B_0(x)y(x) = 0,\end{aligned}$$

здесь

$$B_{r+1}(x) = \bar{A}_r(x), \ \ B_0(x) = \bar{\bar{A}}_0(x). \quad (12)$$

Согласно примечанию 1, найдется такая правая часть $c(x) \in k[x]^m$, что любое решение системы (1) будет также решением системы

$$\begin{aligned}B_{r+1}(x)y(x+1) + \dots + B_1(x)y(x+1) + {}\\ + B_0(x)y(x) = c(x),\end{aligned} \quad (13)$$

Добавляя к $y(x)$ компоненту $y_{m+1}(x)$, мы можем преобразовать (13) в однородную систему

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{r+1}(x)y(x+r+1) + \dots + \tilde{B}_1(x)y(x+1) + {}\\ + \tilde{B}_0(x)y(x) = 0\end{aligned} \quad (14)$$

такую, что если $(y_1(x), y(2), \dots, y_m(x))^T$ удовлетворяет системе (13), то $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x), 1)^T$ удовлетворяет системе (14):

$$\tilde{B}_0(x) = \begin{pmatrix} & & & -c_1(x) \\ & B_0(x) & & \vdots \\ & & & -c_m(x) \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_1(x) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_1(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{B}_i(x) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_i(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i = 2, 3, \dots, r+1.$$

Домножение последнего уравнения системы (14) на -1 и исключения в последнем столбце трейлинговой матрицы дают систему

S_1:

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_{r+1}(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} y(x+r+1) + \dots$$
$$+ \dots \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_0(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} y(x) = 0.$$

Применяя ко всем кроме последнего уравнениям системы (14) оператор ϕ, а к последнему уравнению — оператор ϕ^r, мы получаем систему S_2:

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_{r+1}(x+1) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} y(x+r+2) + \dots$$
$$\dots + \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_0(x+1) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} y(x+1) = 0.$$

Складывая системы S_1 и S_2, мы получаем

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_{r+1}(x+1) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} y(x+r+2) + \dots$$
$$\dots + \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_0(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} y(x) = 0. \quad (15)$$

Любое решение системы (14) является решением системы (15), поэтому любой универсальный знаменатель для (15) является универсальным знаменателем для (14). Знаменатели ведущей и трейлинговой матриц системы (15) равны соответственно $\mathrm{den} B_r(x+1)$ и $\mathrm{den} B_0(x)$. Используя (12), получаем

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_{r+1}(x+1) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \bar{A}_r^{-1}(x+1) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B_0(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \bar{\bar{A}}_0^{-1}(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этого применение леммы 1 к системе (15) дает требуемое. □

Теорема 1 дает алгоритм построения универсального знаменателя для произвольной системы (1):

С помощью алгоритма EG' (см. раздел 2.3) найти l- и t-охватывающие системы (6), (7) для системы (1) и положить $V(x) = \mathrm{den} \bar{A}_r^{-1}(x-r)$, $W(x) = \mathrm{den} \bar{\bar{A}}_0^{-1}(x)$. Далее с помощью алгоритма $\mathbf{A}'_U$ найти универсальный знаменатель (5) для исходной системы.

Если алгоритм $\mathbf{A}'_U$ для данных $V(x), W(x)$ находит полином $U(x)$, и при этом полиномы $V'(x)$, $W'(x)$ таковы, что $V(x)|V'(x)$, $W(x)|W'(x)$, то для $V'(x)$, $W'(x)$ алгоритм $\mathbf{A}'_U$ найдет такой полином $U'(x)$, что $U(x)|U'(x)$. Поэтому вместо $V(x) = \mathrm{den} \bar{A}_r^{-1}(x-r)$, $W(x) = \mathrm{den} \bar{\bar{A}}_0^{-1}(x)$ можно взять $V(x) = \det \bar{A}_r(x-r)$, $W(x) = \det \bar{\bar{A}}_0(x)$. Такие $V(x), W(x)$ легче вычислять, но они могут привести к универсальному знаменателю бóльшей степени. Еще заметим, что теорема 1 выявляет аналогию предложенного алгоритма с алгоритмом для скалярного случая

$$a_r(x)y(x+r) + \dots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = \psi(x),$$

$a_1(x), \dots, a_{r-1}(x), \psi(x) \in k[x]$, $a_0(x), a_r(x) \in k[x] \setminus \{0\}$ ([2, 12, 10]): с точностью до постоянных множителей $\mathrm{den}(a_r(x-r))^{-1} = a_r(x-r)$, $\mathrm{den}(a_0(x))^{-1} = a_0(x)$. "Скалярный" алгоритм из [2] пригоден и для систем, если вместо $a_r(x-r), a_0(x)$ использовать $V(x), W(x)$, и, фактически, на этом основан алгоритм из [7] для нормальных систем. Но, как уже говорилось, алгоритм $\mathbf{A}'_U$ имеет меньшую сложность.

В предложенном алгоритме поиска универсального знаменателя алгоритм EG$'$, видимо, впервые за время его использования в компьютерной алгебре, применяется к самой исходной системе разностных уравнений, а не к так называемой индуцированной рекуррентной системе, которой удовлетворяют коэффициенты искомых решений при разложении в подходящем базисе. При этом предложенная в [4] дифференциальная версия EG$_\delta$ алгоритма EG$'$ применялась для поиска рациональных решений именно к исходной дифференциальной системе. Это еще раз подтверждает родственность алгоритмов EG$_\delta$ и EG$'$, и, чтобы подчеркнуть ее, в [4] алгоритм EG$'$ получил еще одно название EG$_\sigma$ (обозначения δ и σ для отображений, которые обладают свойствами дифференцирования и соответственно сдвига, используются, например, в теории полиномов Оре).

4. РЕАЛИЗАЦИЯ

Система Maple ([15]) содержит пакет `LinearFunctionalSystems`, предоставляющий процедуры для поиска решений систем обыкновенных уравнений (в том числе и разностных). Пакет реализует алгоритмы, основанные на построении индуцированных рекуррентных систем и нахождении для них охватывающих систем с помощью EG$'$. Процедура `RationalSolutions` этого пакета находит рациональные решения лишь нормальных систем вида (3), она основана на алгоритме из [7] и использует в своей работе процедуру `UniversalDenominator` того же пакета, применимую для построения универсальных знаменателей только таких систем. В нашей новой реализации процедура `UniversalDenominator` использует алгоритм из раздела 3 и опирается на описанную в [10] реализацию алгоритма $\mathbf{A}'_U$ и описанную в [9] реализацию алгоритма EG$'$ в пакете `LinearFunctionalSystems`. В итоге процедуры `UniversalDenominator` и `RationalSolutions` становятся применимыми к любым системам вида (1).

Продемонстрируем работу этих процедур с помощью системы разностных уравнений, приведенной на справочной странице процедуры `RationalSolutions` в системе Maple.

```
> with(LinearFunctionalSystems):
> sys:=[(x+3)*(x+6)*(x+1)*(x+5)*x*y1(x+1)-
        (x-1)*(x+2)*(x+3)*(x+6)*(x+1)*
        y1(x)-x*(x^6+11*x^5+41*x^4+65*x^3+
        50*x^2-36)*y2(x)+
        6*(x+2)*(x+3)*(x+6)*(x+1)*x*y4(x),
        (x+6)*(x+2)*y2(x+1)-x^2*y2(x),
        (x+6)*(x+1)*(x+5)*x*y3(x+1)+
        (x+6)*(x+1)*(x-1)*y1(x)-
        x*(x^5+7*x^4+11*x^3+4*x^2-5*x+6)*
        y2(x)-y3(x)*(x+6)*(x+1)*(x+5)*x+
        (x+6)*(x+1)*x*3*(x+3)*y4(x),
        (x+6)*y4(x+1)+x^2*y2(x)-
        (x+6)*y4(x)];
  vars:=[y1(x), y2(x), y3(x), y4(x)]:
```

$$
\begin{gathered}
sys := [(x+3)(x+6)(x+1)(x+5)xy1(x+1)- \\
(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)(x+1)y1(x)- \\
x(x^6+11x^5+41x^4+65x^3+50x^2-36)y2(x)+ \\
6(x+2)(x+3)(x+6)(x+1)xy4(x), \\
(x+6)(x+2)y2(x+1)-x^2y2(x), \\
(x+6)(x+1)(x+5)xy3(x+1)+ \\
(x+6)(x+1)(x-1)y1(x)- \\
x(x^5+7x^4+11x^3+4x^2-5x+6)y2(x)- \\
y3(x)(x+6)(x+1)(x+5)x+ \\
3(x+6)(x+1)x(x+3)y4(x), \\
(x+6)y4(x+1)+x^2y2(x)-(x+6)y4(x)]
\end{gathered}
$$

Найдем для этой системы универсальный знаменатель и рациональное решение (их можно было найти и старой версией программы, так как система имеет вид (3), записанный в эквивалентной форме, освобожденной от знаменателей).

```
> UniversalDenominator(sys, vars);
```

$$\frac{1}{(x+5)(x+4)^2(x+3)^2(x+2)^3(x+1)^4x^3(x-1)}$$

```
> RationalSolutions(sys, vars);
```

$$\left[\frac{(4(-7108272\_c_2+\_c_1)}{(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)}, 0,\right.$$

$$(5x^5\_c_2+50x^4\_c_2+175x^3\_c_2+250x^2\_c_2-$$

$$35541240x\_c_2+5x\_c_1-28433088\_c_2+4\_c_1)/$$

$$(5x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)), 0]$$

Теперь преобразуем систему, сдвинув три из четырех ее уравнений.

```
> sys2:=[eval(sys[1],x=x+1),
        eval(sys[2],x=x+3),
        sys[3],eval(sys[4],x=x+2)];
```

$$sys := [(x+4)(x+7)(x+2)(x+6)(x+1)y1(x+2)-$$

$$x(x+3)(x+4)(x+7)(x+2)y1(x+1)-$$

$$(x+1)((x+1)^6+11(x+1)^5+41(x+1)^4+$$

$$65(x+1)^3+50(x+1)^2-36)y2(x+1)+$$

$$6(x+3)(x+4)(x+7)(x+2)(x+1)y4(x+1),$$

$$(x+9)(x+5)y2(x+4)-(x+3)^2y2(x+3),$$

$$(x+6)(x+1)(x+5)xy3(x+1)+$$

$$(x+6)(x+1)(x-1)y1(x)-$$

$$x(x^5+7x^4+11x^3+4x^2-5x+6)y2(x)-$$

$$y3(x)(x+6)(x+1)(x+5)x+$$

$$3(x+6)(x+1)x(x+3)y4(x),$$

$$(x+8)y4(x+3)+(x+2)^2y2(x+2)-$$

$$(x+8)y4(x+2)]$$

Получившаяся система имеет четвертый порядок, ее ведущая и трейлинговая матрицы необратимы над полем рациональных функций. Такая система уже не может быть решена с помощью старой версии программы. Применим новую версию.

```
> UniversalDenominator(sys2, vars);
```

$$\frac{1}{(x+5)(x+4)^2(x+3)^2(x+2)^3(x+1)^4x^3(x-1)}$$

```
> RationalSolutions(sys2, vars);
```

$$\left[\frac{(4(-7108272\_c_2+\_c_1)}{(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)}, 0,\right.$$

$$(5x^5\_c_2+50x^4\_c_2+175x^3\_c_2+250x^2\_c_2-$$

$$35541240x\_c_2+5x\_c_1-28433088\_c_2+4\_c_1)/$$

$$(5x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)), 0]$$

Как и следовало ожидать, найденное решение совпадает с решением исходной системы.

Наши эксперименты показывают, что новая версия программы позволяет решать системы достаточно большого размера и порядка. Например, были проведены эксперименты, для которого были сгенерированы 16 наборов по 10 разностных систем с $m = 3, 6, 9, 12$ и $r = 5, 10, 15, 20$ соответственно. Все системы были построены таким образом, что имели случайно сгенерированные рациональные решения. Был произведен поиск рациональных решений всех систем в каждом наборе с использованием новой программы. Результаты экспериментов представлены в таблице – в ячейках указано общее время (в секундах) поиска рациональный решений всех систем в каждом из наборов.

	$m=3$	$m=6$	$m=9$	$m=12$
$r=5$	4.265	14.203	53.109	130.376
$r=10$	9.812	48.828	234.969	455.719
$r=15$	37.688	263.484	894.094	1962.578
$r=20$	254.921	1021.390	5013.687	26160.547

Отметим, что для случая $m = 12, r = 20$ большую часть общего времени (17314.594 секунд) занял лишь один пример, который оказался более неудобным для решения, чем в среднем.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В СИСТЕМУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Если $r = 1$ в (1), т.е. система имеет вид

$$A_1(x)y(x+1) + A_0(x)y(x) = b(x), \tag{16}$$

и ранг матрицы $A_1(x)$ над $k(x)$ равен s, $0 < s < m$, то после редукции (см. раздел 2.3) систему можно переписать в виде пары, состоящей из линейных разностной и алгебраической систем

$$B_1(x)y(x+1) + B_0(x)y(x) = g(x),$$
$$R(x)y(x) = h(x),$$

где матрицы $B_1(x), B_0(x)$ имеют размер $s \times m$, и при этом ранг $B_1(x)$ равен s, а матрица $R(x)$ имеет размер $(m-s) \times m$, и ее ранг равен $m-s$ в силу независимости над $k[x,\phi]$ уравнений исходной системы.

Далее можно применить подход, имеющий некоторые общие черты с рассмотренным в [14] подходом для дифференциального случая (см. также [4, раздел 2.3]). Сдвигая систему $R(x)y(x) = h(x)$, получаем

$$R(x+1)y(x+1) = h(x+1). \tag{17}$$

Теперь в системе $B_1(x)y(x+1)+B_0(x)y(x) = g(x)$ с помощью (17) исключаем некоторые $y_i(x+1)$ для $m-s$ различных значений индекса i, а затем с помощью уравнений алгебраической системы $R(x)y(x) = h(x)$ исключаем неизвестные $y_i(x)$, имеющие те же значения индекса. Если получается разностная система с ведущей матрицей ранга меньше, чем s, то повторяем эти действия (переходим от разностной системы к паре, состоящей из разностной и алгебраической систем) и т.д. В итоге получаем разностную систему первого порядка

$$\tilde{A}_1(x)\tilde{y}(x+1) + \tilde{A}_0(x)\tilde{y}(x) = \tilde{b}(x),$$

с обратимой в $\mathrm{Mat}_{\tilde{m}}(k(x))$ ведущей матрицей $\tilde{A}_1(x)$. Если ранг матрицы $\tilde{A}_0(x)$ меньше $\tilde{m}$, то к новой разностной системе применяются аналогичные действия, но имеющие целью сделать обратимой трейлинговую матрицу $\tilde{A}_0(x)$ (порядок разностной системы еще уменьшится) и т.д. В итоге получим разностную систему

$$\tilde{\tilde{A}}_1(x)\tilde{\tilde{y}}(x+1) + \tilde{\tilde{A}}_0(x)\tilde{\tilde{y}}(x) = \tilde{\tilde{b}}(x) \tag{18}$$

с невырожденными ведущей и трейлинговой матрицами ранга размера $\tilde{\tilde{m}}$, а также соотношение

$$y(x) = T(x)\tilde{\tilde{y}}(x), \tag{19}$$

позволяющее выразить исходные неизвестные (16) через входящие в (18) неизвестные ($T(x)$ – матрица размера $m \times \tilde{\tilde{m}}$ с элементами из $k(x)$). Система (18) может быть приведена к виду (3), при этом избавиться от правой части помогает введение дополнительной неизвестной функции. Затем можно применить любой из алгоритмов [7, 11, 13, 12, 10] для нахождения универсального знаменателя ее решений. После этого можно либо с помощью найденного универсального знаменателя найти все рациональные решения получившейся системы и получить решения исходной системы (16) посредством (19), либо преобразовать найденный универсальный знаменатель в универсальный знаменатель решений (16), используя знаменатели коэффициентов $T(x)$, и с его помощью найти все рациональные решения исходной системы.

Введение дополнительных неизвестных функций (9) позволяет переписать любую систему вида (1) как систему вида (16):

$$M_1(x)Y(x+1) + M_0(x)Y(x) = B(x), \tag{20}$$

где

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_r(x) \end{pmatrix},$$

$$M_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_m \\ A_0(x) & A_1(x) & \dots & A_{r-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $M_1(x), M_0(x)$ принадлежит $\mathrm{Mat}_{rm}(k(x))$, векторы $Y(x), B(x)$ имеют rm компонент. Известно, что при больших r переход от системы (1) к системе первого порядка неудобен из-за возникновения матриц больших размеров, работа с которыми трудоемка.

В качестве примера вновь рассмотрим систему четвертого порядка из раздела 4. Для этой системы матрицы $M_1(x), M_0(x)$ в (20) имеют размер 16×16, обе матрицы необратимы. Перейдем к системе (18) с невырожденными матрицами размера 4×4

и соответствующему соотношению (19) с матрицей $T(x)$ размера 16×4. Наша программа в системе Maple выполняет эту работу за 104.719 секунды. Далее с помощью алгоритма из [10] найдем универсальный знаменатель $u(x)$ для получившейся системы. Наша программа, описанная в [10], выполняет эту работу за 42.797 секунды. Построение соответствующего рационального решения занимает еще 0.468 секунды, а вычисление рациональных решений исходной системы с помощью (19) – еще 0.079 секунды. Альтернативный вариант требует 0.266 секунды на преобразование $u(x)$ в универсальный знаменатель решений исходной системы и еще 6.734 секунды на построение соответствующего рационального решения. В данном случае первый вариант оказался быстрее. Возможно, в каких-то случаях ситуация будет обратной, но для целей сравнения с алгоритмом из раздела 3 это не важно: общая часть этих вариантов уже заняла намного больше времени, чем весь поиск рационального решения с помощью программы, обсуждавшейся в разделе 4, потребовавший лишь 1.422 секунды. Нами были проведены дополнительные эксперименты по сравнению алгоритма из раздела 3, основанного на применении EG$'$, и алгоритма, основанного на переходе к системе первого порядка, которые подтвердили этот вывод. Для этого были сгенерированы 4 набора по 10 разностных систем с $m = 5$ и $r = 5, 10, 15, 20$ соответственно. Коэффициенты всех этих систем были полиномами степени не выше 2 с целыми корнями; системы генерировались так, чтобы число ненулевых коэффициентов составляло 50%. Результаты экспериментов представлены в таблице. В ячейках указано общее время (в секундах) построения рациональных решений сравниваемыми методами для всех систем в каждом из наборов. Дополнительно в скобках указано соответствующее общее время построения универсальных знаменателей (для метода, основанного на сведении к системе первого порядка, – время построения системы (18) и универсального знаменателя ее решений; далее использовался вариант построения рационального решения этой системы и вычисление рационального решения исходной системы с помощью соотношния (19)). Отметим, что универсальный знаменатель решения каждой построенной описанным образом системы нетривиален, соответственно, несмотря на то, что такая система имеет почти всегда лишь тривиальное рациональное решение, для того чтобы установить этот факт требуется полноценная работа алгоритма построения рационального решения, поэтому такие эксперименты подходят для сравнения рассматриваемых методов.

	Применение EG$'$	Первый порядок
$r = 5$	6.564 (1.609)	14.186 (10.000)
$r = 10$	26.281 (2.046)	181.172 (157.858)
$r = 15$	31.628 (2.831)	402.841 (328.736)
$r = 20$	21.484 (2.734)	1051.188 (895.952)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 29., 1989, № 11. С. 1611–1620.

2. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Программирование, 1995, № 6. С. 3–11.

3. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей // Программирование, 2011, № 2. С. 28–39.

4. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фунд. и прикл. мат. (принято к печати).

5. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // Программирование, 2004, № 2. С. 8–16.

6. *Abramov S.* EG–eliminations // J. of Difference Equations and Applications **5**, 1999. P. 393–433.

7. *Abramov S., Barkatou M.* Rational solutions of first order linear difference systems // *ISSAC'98 Proceedings* , 1998. P. 124–131.

8. *Abramov S., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems // Proc. of ISSAC'2001, ACM Press, 2001. P. 1–6.

9. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* Regularization of linear recurrence systems // Transactions of the A.M. Liapunov Institute **4**, 2003. P. 158–171.

10. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators // CASC'2010 Proceedings, 2010. P. 4–18.

11. *Barkatou M.* Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization // ISSAC'99 Proceedings, 1999. P. 277–282.

12. *Gheffar A., Abramov S.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // Adv. in Appl. Maths, 2010. P. 352–364.

13. *Van Hoeij M.* Rational solutions of linear difference equations // ISSAC'98 Proceedings, 1998. P. 120–123.

14. *Quere M.P., Villard G.* An algorithm for the reduction of linear DAE // ISSAC'1995 Proceedings, 1995. P. 223–231.

15. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/