

Министерство образования Московской области
*ГООУ ВО МО “Государственный
социально-гуманитарный университет”*
факультет математики, физики, химии, информатики

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИКИ**

ТРУДЫ
XVI ПРИОКСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
5-7 июня 2025 года

Коломна
2026

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.16 я73
Д 50

Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским
советом ГСГУ

Рецензенты:

Белов Владимир Викторович, доктор технических наук,
профессор кафедры вычислительной и прикладной математики
Рязанского государственного радиотехнического университета;
Хэкало Сергей Павлович, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математики и методики преподавания
математических дисциплин
Государственного социально-гуманитарного университета

Редакционная коллегия:

В.П. Лексин, д.ф.-м.н., профессор;
Р.Р. Гонцов, к.ф.-м.н., доцент;
О.Н. Бирюков, к.ф.-м.н., доцент

Д 50 Дифференциальные уравнения и смежные вопросы
математики: Труды XVI приокской научной конферен-
ции. — Коломна: ГСГУ, 2026. — 159 с.

В сборнике представлено содержание докладов участников конференции.

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.16 я73

© ГОУ ВО МО "Государственный
социально-гуманитарный университет", 2026.
© Авторы статей, 2026.

Содержание

Лексин В. П. Памяти академика Андрея Андреевича Болибруха (вступительное слово)	5
Абрамов С. А., Рябенко А. А. Продолжения полиномиальных матриц	13
Артамонов Д. В. Монодромия систем ГКЗ: обзор общего подхода	24
Ахметьев П. М., Смирнов А. Ю. Комбинаторная формула для M -инварианта магнитных линий I	38
Ахметьев П. М., Смирнов А. Ю. Комбинаторная формула для M -инварианта магнитных линий II	69
Байбакова Ж. Р. Ожерелье Антуана и его топологические свойства	97
Винник К. С. Ковёр Серпинского и его фрактальная размерность	104
Краснов В. А. Связь между свойствами объёма и средней кривизны многогранника	112
Лексин В. П. Монодромия систем Жордана–Похгаммера .	120
Мирошниченко А. Н. Канторово множество и его свойства	130
Петров Е. Е. Интеграл Хопфа	135
Смирнов А. Ю. Об одном уравнении, возникающем при исследовании распространения звуковой волны в кристалле с дислокациями	140
Чепыжов В. В. О пределе нулевой вязкости глобальных аттракторов 2D систем Навье–Стокса с сухим трением	143
Vyugin I., Dutta S. On the Fibonacci numbers over $\mathbb{F}_p$	154

Сведения об авторах	157
---------------------------	-----

Памяти академика Андрея Андреевича Болибруха (вступительное слово)

Мы открываем шестнадцатую Приокскую научную конференцию "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики", посвящённую памяти академика Андрея Андреевича Болибруха, в связи с семидесятипятилетием со дня рождения.

С. В. Аллёнов

Наша мемориальная конференция открывается 5 июня 2025 года, месяц спустя после преждевременной смерти Сергея Владимировича Аллёнова, бессменного организатора нашей конференции и издателя её трудов. Он умер от беспощадной и бескомпромиссной онкологической болезни в возрасте всего 44 лет. Мы, конечно, посвятим его памяти отдельную конференцию, а сейчас вспомним об Андрее Андреевиче Болибрухе, ставшем также преждевременной жертвой онкологического заболевания.

Андрей Андреевич Болибрух

Андрей Болибрух родился 30 января 1950 года в Москве. Отец его, Андрей Власьевич Болибрух, был участником Великой Отечественной Войны, которую закончил в звании майора. После окончания ВОВ продолжал служить в советской армии и дослужился до звания генерал-лейтенанта. К сожалению, он преждевременно умер от болезни сердца в возрасте 54 лет, занимая должность первого заместителя командующего Краснознаменным Прибалтийским Военным Округом. Мать Андрея посвятила себя воспитанию Андрея и его сестры. Скорее всего, в связи со службой отца, Андрей заканчивал школьное обучение в Ленинграде в физико-математических классах знаменитой 45 школы, о которой он оставил тёплые воспоминания [4, 5]. В школьные годы он увлёкся математикой и достиг успехов в ней, став призёром всесоюзной олимпиады школьников.

Так он решил поступать в МГУ им. М. В. Ломоносова на механико-математический факультет, куда он поступил в 1967 году после окончания школы. В годы обучения на мехмате он при выборе на третьем курсе более узкой специализации выбрал кафедру высшей геометрии и топологии, которой в то время руководил академик П. С. Александров, а его научным руководителем стал Михаил Михайлович Постников. Под руководством М. М. Постникова он изучал топологию многообразий и, в частности, теорию бордизмов многообразий с различными типами соотношений на характеристические классы этих многообразий.

Первые научные результаты в теории фуксовых систем

Андрей Андреевич в 1972 году был рекомендован в аспирантуру по кафедре высшей геометрии и топологии, где он продолжил заниматься алгебраической топологией под руководством М. М. Постникова. Михаил Михайлович поставил задачу изучить спектральную последовательность Адамса и её различные разновидности и, как ближайшую цель, стать лучшим специалистом в стране в этом направлении. К началу семидесятых годов по этой тематике существовал огромный объём исследований и было получено много результатов по вычислению гомотопических групп сфер и групп кобордизмов, но, естественно, как правило не окончательных и далеко неполных. Андрей отнёсся к такой не слишком конкретной постановке аспирантского задания без особого энтузиазма. Однако, начал добросовестно изучать работы по спектральным последовательностям в рамках семинара М. М. Постникова по алгебраической топологии и её приложениям и в рамках выездных математических школ в Загорске (ныне Сергиев Посад) и во Фрязино, которые организовал Алексей Викторович Чернавский весной 1972 и 1973 годов для своих аспирантов и аспирантов Михаила Михайловича. Эти школы проходили на дачах Ф. А. Богомолова и М. А. Штанько (точнее, на дачах названных впоследствии известных математиков).

У Андрея и автора этих строк публикаций по их темам по итогам первого года аспирантуры не появилось. Весной-осенью 1973 года Алексей Викторович Чернавский начал читать

учебный для аспирантов и для него спецкурс по комплексным многообразиям в Стекловке (Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР), опираясь в основном на известную монографию Чжень-шень-шеня по этой тематике. Основной целью спецкурса было разобраться с применениями комплексного анализа в теории фейнмановских интегралов, которые были изложены в переведённых книгах: Ф. Фам "Введение в топологическое исследование особенностей Ландау" и Р. Хуа, В. Теплиц "Гомологии и фейнмановские интегралы". В процессе чтения спецкурса он познакомился с Валентиной Алексеевной Голубевой, которая уже несколько лет, по рекомендации физика-теоретика Остапа Степановича Парасюка, занималась фейнмановскими интегралами, их ветвлением и уравнениями, которым они удовлетворяют. Где-то в начале 1974 года, после того как Алексею Викторовичу пришлось уйти из института Стеклова из-за подписи в защиту А. С. Есенина-Вольпина, он предложил создать небольшой семинар по комплексной тематике, связанной с топологией комплексных расслоений на комплексных многообразиях. Этот семинар с числом участников не более 6-7 человек начал работать на квартире В. А. Голубевой и работал еженедельно примерно в течение полутора лет. В то время В. А. Голубева, опять с подсказки О. С. Парасюка, была увлечена ветвлением фейнмановских интегралов и решений уравнений, которым они удовлетворяют. Парасюк также обратил внимание Голубевой на проблему Римана-Гильберта, которая, естественно, возникает в контексте ветвления интегралов и решений аналитических уравнений с особенностями. Проблема Римана-Гильберта, а именно, вычисление ветвления решений "хороших", как правило линейных, уравнений, и обратная задача построения уравнений с заданным ветвлением решений активно исследовалась на комплексной плоскости и на сфере Римана для линейных аналитических уравнений и систем, начиная с работ самого Римана середины девятнадцатого века и к началу двадцатого века считалась окончательно решённой Иосифом Племелем в 1908 году. Естественное обобщение классической проблемы Римана-Гильберта есть переход от сферы Римана к линейным аналитическим системам на комплексных

проективных пространствах и других многомерных комплексных многообразиях. Выше названные книги вышли в конце шестидесятых годов предыдущего века и в то же время, в 1969 году, в шпрингеровской серии Lecture Notes №163 появилась монография Делиня, где линейные системы дифференциальных уравнений трактовались как связности в голоморфных расслоениях, и самые близкие к классическому одномерному случаю — связности с логарифмическими особенностями. Исполдволь было решено, что будем заниматься многомерной проблемой Римана–Гильберта: и литература есть, и полученных результатов было еще немного. Андрей с энтузиазмом принял новое направление исследований по многомерной проблеме Римана–Гильберта. В рамках небольшого семинара он делал много докладов учебно-реферативного характера по одномерной проблеме Римана–Гильберта на сфере Римана и на римановых поверхностях по работам Атьи, Левеля, Настольда, Рёрля и по многомерной проблеме Римана–Гильберта по работам Жерара и Делиня и других авторов. Первые результаты Андрея были получены по локальной структуре фундаментальных матриц решений интегрируемых регулярных и фуксовых систем нескольких переменных с особенностями на дивизорах с нормальными пересечениями. Они опубликованы в работах [1-5] — это по фактически полному списку работ Андрея Андреевича, содержащемуся в приложении к его книге [2] и в статье [3], которая также содержится в [2], по списку работ к данной статье. В указанных работах Андрей правильно обобщил определение Левеля нормирований для решений регулярных и фуксовых систем на случай нескольких переменных и тем самым правильно сформулировал критерий фуксовости регулярных систем. Первоначальное обобщение нормирований Р. Жерара было неточным. Эти результаты послужили основой кандидатской диссертации, защищённой на мехмате МГУ в июне 1977 года, фактически в срок по окончанию аспирантуры.

Его приняли на работу на кафедру математики в МФТИ, где он много сил уделял работе со студентами и школьниками, создавая для них различные пособия, указанные в списке его работ под номерами [87-100, 103], а также он был вовлечён кол-

легами по кафедре в работу по прикладной тематике и работу по хоздоговорам. Эта деятельность отражена в списке публикаций под номерами [8-10, 12-15, 17, 18, 86].

Контрпример Болибруха

После защиты кандидатской диссертации по локальной теории регулярных и фуксовых систем для функций многих переменных и его вовлечённости в прикладные исследования Андрей не оставил тематику, где он получил первые свои опубликованные результаты. Он продолжал, время от времени, публиковать свои работы по прежней тематике. Используя свой критерий фуксовости для линейных систем на многомерных комплексных многообразиях, построил пример неразрешимости проблемы Римана–Гильберта на двумерном комплексном проективном пространстве. Напомним, что классическая проблема Римана–Гильберта к началу XX века, которую решал Племель, заключалась в реализации представления фундаментальной группы дополнения к заданному дивизору на комплексном многообразии как представления монодромии фуксовой линейной системы дифференциальных уравнений. Или, на языке Делиня голоморфных расслоений и мероморфных связностей в них, проблема Римана–Гильберта состояла в реализации представления фундаментальной группы дополнения к заданному дивизору как представления монодромии логарифмической связности в тривиальном расслоении с особенностями формы связности в точности на заданном дивизоре. Этот контрпример к многомерной проблеме Римана–Гильберта в работе под номером [11], из списка работ Андрея.

К середине восьмидесятых годов Андрей решил вернуться в теоретическую математику и читать или доводить статьи до полного их понимания, по крайней мере им самим. Тогда был богатый выбор статей, в которых использовались аналитические системы дифференциальных уравнений в связи с работами по теоретической физике, упомянем лишь уравнения Книжника–Замолотчикова, появившиеся в 1984 году, и последующее развитие их теории. К тому же времени была обнаружена

в библиотеке мехмата и была прочитана книга Иосифа Племеля "Problems in the sense of Riemann and Klein", вышедшая в 1964 году, в которой, в основном, автор методами теории граничных задач в теории аналитических функций одного комплексного переменного и интегральных уравнений решал проблему Римана–Гильберта на сфере Римана, и это было более детальное изложение его статьи 1908 года, в которой решалась названная известная проблема. Бóльшая часть детального изложения не вызывала никаких вопросов, однако, в заключительном 85 пункте решения задачи, в котором найденная каноническая система функций доводится до примитивной системы функций (названия из книги), которая и решает задачу, изложение вдруг становится сжатым и занимает около половины страницы. Некоторые детали трудно было уяснить на основе текста книги. Более того, в 1979 году появилась работа W. Dekkers "The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ ", в которой аналитические дифференциальные уравнения и системы излагались, повторим еще раз, с использованием понятий голоморфных векторных расслоений и мероморфных связностей в них, как в книге Делиня. Для решения классической проблемы Римана–Гильберта требовалось доказать, для заданного набора различных точек на сфере Римана и заданного представления фундаментальной группы дополнения к этому набору точек, существование мероморфной связности с логарифмическими полюсами в заданном наборе точек в тривиальном расслоении, представление монодромии в пространстве горизонтальных сечений которой (то есть, в пространстве решений системы, получаемой из связности при некоторой голоморфной тривиализации расслоения) эквивалентно заданному представлению фундаментальной группы. Однако, Деккерс, из своих результатов, использующих новые понятия и новую технику, смог получить результаты, из которых следовало решение классической проблемы Римана–Гильберта только для двумерных представлений фундаментальной группы, то есть он не смог воспроизвести результат Племеля. В своем доказательстве Деккерс использовал мероморфную тривиализацию расслоений на сфере Римана, а затем так называемыми калибровочными преобра-

зованиями приводил форму полученной системы к требуемому логарифмическому виду, то есть к форме с простыми полюсами. Андрей заинтересовался работой, так как он имел богатый опыт калибровочных преобразований в многомерном случае, но работал он не с формой связности, а с фундаментальной матрицей решений системы. Он попытался распространить результат Деккерса, работая с фундаментальной матрицей, на трёхмерные представления фундаментальной группы. После многих попыток выполнить требуемые преобразования оставалась, вообще говоря, ненулевой некоторая величина, зависящая от исходных данных, которая мешала привести фундаментальную матрицу решений к нужному виду. Величину, которая мешала, Андрей назвал весом представления фундаментальной группы и построил пример трёхмерного представления фундаментальной группы, для которого вес не равен нулю и не существует калибровочного преобразования, которое его обнуляет. Это была сенсация! Итак, классическая проблема Римана–Гильберта не всегда разрешима, это было обнаружено Андреем Болибрухом в 1988 году. Андрей обратился, в первую очередь, к своему давнему наставнику Алексею Викторовичу Чернавскому с просьбой проверки рассуждений в работе, а затем к известному специалисту по отысканию неточностей и неполноты математических рассуждений, академику Дмитрию Викторовичу Аносову, к тому же осенью 1988 года был организован семинар на мехмате под руководством проф. Бориса Дубровина (однокурсника Андрея), одной из основных целей которого была проверка результата Андрея Болибруха. После обстоятельных проверок в конце 1989 года контрпример Болибруха был опубликован в журнале "Математические заметки" [1] ([25] — по полному списку).

После построения контрпримера появилась новая задача об условиях положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта. Перед тем как обратиться к новым задачам, Андрей написал обзор по истории классической проблемы Римана–Гильберта с подробным изложением своего контрпримера, опубликованный в журнале "Успехи математических наук", 1990, том 46, №2, стр. 3–47. Осенью 1991 года защитил докторскую диссертацию, а затем был быстрый академический и

административный рост, подробно описанный в мемориальной статье [3] и в приложении к книге [2].

Положительная разрешимость классической проблемы Римана–Гильберта

Ещё до защиты докторской диссертации Андрей Андреевич нашёл случаи разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта, связанные с числом особых точек и размером системы [28]. После защиты докторской диссертации он нашёл существенное условие разрешимости проблемы Римана–Гильберта, состоящее в условии неприводимости представления фундаментальной группы дополнения к особым точкам на сфере Римана [32]. Андрей Андреевич и его российские и французские ученики (Бутузов М. А., Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р., Побережный В. А., Дж. Вандамм, С. Малек) активно изучали условия разрешимости проблемы Римана–Гильберта, и с точки зрения разных структур приводимости представлений [30, 33, 35], и с точки зрения выполнения фуксовых соотношений на системы.

Биркгофова стандартная форма и изомонодромные деформации

В Ульме, слушая доклад о приведении аналитических систем к биркгофовой стандартной форме на семинаре под руководством В. Бальзера, Андрей Андреевич с удивлением понял, что методы, которые он использовал при решении проблемы Римана–Гильберта, годны и для задачи о биркгофовой стандартной форме. С этим связана большая серия его работ, которая углубила и расширила эту тематику [37, 40, 42, 43, 49, 54, 62, 63, 77, 79].

Естественно, проблема Римана–Гильберта соприкасается с теорией изомонодромных деформаций фуксовых систем на сфере Римана, которой посвящены работы Андрея Андреевича [34, 47, 55–59, 71, 73, 74]. Редукции уравнений изомонодромной деформации (например, уравнение Шлезингера), которые изучал

Андрей Андреевич, теснейшим образом связаны с уравнениями современной теоретической физики. Имеется неформальный тезис, что любое уравнение теоретической физики можно получить редукцией некоторого уравнения изомонодромной деформации. Андрей Андреевич много сил потратил на изучение подвижных полюсов решений уравнения Шлезингера и их порядков.

Пожелание участникам конференции

Желаю, чтобы каждый участник конференции после общения на ней с другими участниками нашёл свой пример или контр-пример, который послужит ему трамплином в науке и жизни.

Литература

1. Болибрух А. А. *Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой* // Матем. заметки, 46(3), 1989, 118–120.
2. Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. — М: МЦНМО, 2009. — 220 с.
3. Аносов Д. В., Лексин В. П. *Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке (30.01.1950–11.11.2003)* // УМН, 59(6), 2004, 3–22.
4. Болибрух А. А. Воспоминания и размышления о давно прошедшем. — М: МЦНМО, 2013. — 136 с.
5. Bolibruch A. A. *Some memories of Boarding № 45* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 174, 1996, 1–5.

Абрамов С. А., Рябенко А. А.

Продолжения полиномиальных матриц

Аннотация

Добавление членов высоких степеней к элементам невырожденной полиномиальной матрицы может привести к потере невырожденности матрицы. Ранее был предложен алгоритм проверки для заданной полиномиальной матрицы осуществимости такой потери. В предлагаемой новой редакции этот алгоритм, установив возможность потери невырожденности, явно указывает продолжения элементов матрицы путём добавления к ним новых членов (при этом элементы-полиномы могут превращаться в формальные степенные ряды), которые приводят к вырожденной матрице.

1. Введение

Задача распознавания строго невырожденных матриц (т.е. матриц, остающихся невырожденными при любом продолжении элементов матрицы добавлением членов более высоких степеней, что может превращать полиномы в формальные степенные ряды) является разрешимой алгоритмической задачей: в [1, 2] предложен алгоритм, применимый к любой матрице указанного вида и дающий ответ “да”, если матрица строго невырождена, и “нет” — в противном случае. Отметим, что в случае ответа “нет” представлял бы интерес контрпример, подтверждающий, что исходная матрица не является строго невырожденной, т.е. пример продолжения элементов матрицы, приводящего к вырожденной матрице. Такое продолжение могло бы быть использовано в каких-то последующих вычислениях.

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий для заданной невырожденной полиномиальной квадратной матрицы, не являющейся при этом строго невырожденной, построить продолжение, дающее вырожденную матрицу. Это продолжение задается в некотором обозримом виде, даже если число добавляемых членов бесконечно.

Напомним, что кольцо полиномов от x над полем K обозначается через $K[x]$, кольцо формальных степенных рядов — через $K[[x]]$.

В [3] предложен алгоритм, применимый к произвольной невырожденной квадратной матрице $P = (p_{ij})$, в которой все элемен-

ты p_{ij} суть полиномы от x над полем K ; алгоритм позволяет проверить, верно ли, что P *строго невырождена*, т.е. матрица $P+Q$ невырождена при любой матрице Q с элементами из кольца $K[[x]]$ формальных степенных рядов, имеющей, во-первых, такой же размер, как P , и, во-вторых, обладающей свойством $\text{val } Q \geq 1 + \deg P$. Как обычно, валюацией $\text{val } f(x)$ степенного ряда или полинома называется младшая степень x , имеющая в $f(x)$ ненулевой коэффициент; по определению $\text{val } 0 = \infty$. Валюацией матрицы, составленной из степенных рядов или полиномов, называется наименьшая из валюаций всех элементов этой матрицы. Степенью составленной из полиномов матрицы считается наибольшая из всех степеней элементов, при этом $\deg 0 = -\infty$.

Будем говорить, что полином $p(x) \in K[x]$ является *усечением* ряда $f(x) \in K[[x]]$, если $p(x)$ получается из $f(x)$ отбрасыванием всех членов степени большей, чем некоторое целое $d \geq -1$, называемое *степенью усечения*. Усечение $p(x)$ может быть названо в этом случае d -*усечением* ряда $f(x)$. Ряд $f(x)$ называется *продолжением* полинома $p(x)$. Равенство $d = -1$ означает, что $p(x) = 0$ и мы не имеем никакой информации об $f(x)$, кроме его принадлежности $K[[x]]$. Полиномиальная матрица P есть усечение матрицы M с элементами в $K[[x]]$, если каждый элемент матрицы P служит усечением соответствующего элемента матрицы M , которая в этом случае есть продолжение матрицы P .

При заданном d -усечении $p(x)$ ряда $f(x)$ выполнено $f(x) = p(x) + g(x)$, где $g(x) \in K[[x]]$ — некоторый ряд, для которого $\text{val } g(x) \geq d + 1$. *Валюацией усечения* такого вида называем валюацию полинома $p(x)$.

В дальнейшем мы рассматриваем заданную полиномиальную матрицу P как усечение некоторой неизвестной нам матрицы

$$M = (m_{ij}), \quad m_{ij} \in K[[x]].$$

В [3] разбирался случай, когда все элементы P суть усечения элементов матрицы M , при этом степень усечения d одинакова для всех элементов матрицы и совпадает со степенью матрицы P . Строгая невырожденность матрицы P гарантирует для матрицы M ее невырожденность. В [3, предл. 1] доказан критерий, т.е. необходимое и достаточное условие, строгой невы-

рожденности полиномиальной матрицы P :

$$d + \text{val } P^* \geq \text{val } \det P, \quad (1)$$

где $P^* = (p_{ij}^*)$ — матрица алгебраических дополнений элементов матрицы P . Напомним, что алгебраическим дополнением элемента p_{ij} называется $p_{ij}^* = (-1)^{i+j} \bar{P}_{ij}$, где $\bar{P}_{ij}$ — минор элемента p_{ij} ([4, § 5]).

Далее полагаем, что для заданной полиномиальной невырожденной матрицы $P = (p_{ij})$ зафиксированы такие целые числа $d_{ij} \geq -1$, что

$$\deg p_{ij} \leq d_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Если все d_{ij} равны между собой ($d_{ij} = d$), то усечение будет называться *плоским*. Заметим, что степень соответствующей полиномиальной матрицы P может быть меньше d .

Ниже мы исходим из определения строго невырожденного усечения, без предположения, что оно плоское.

Определение 1. Пусть $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, — невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ таковы, что выполнено (2). Будем называть заданное таким образом усечение *строго невырожденным*, если для любой $n \times n$ -матрицы $Q = (q_{ij})$, элементы которой принадлежат $K[[x]]$, $\text{val } q_{ij} \geq d_{ij} + 1$, матрица $P + Q$ невырождена.

Для плоского усечения выполнение условия (1) является критерием ее строгой невырожденности и в том случае, если $d > \deg P$.

2. Переход к плоскому усечению

Определение 2. Пусть имеет место (2) и $d = \max d_{ij}$. Для заданного усечения его *K -завершением* назовем полиномиальную матрицу, полученную добавлением к каждому p_{ij} при $d_{ij} < d$ каких-либо членов степеней $d_{ij} + 1, \dots, d$ с коэффициентами из K . *Формальным завершением* назовем такое завершение, в котором все добавляемые члены имеют попарно различные неопределенные (символьные) коэффициенты.

Из определения 2 видно, что K -завершение является продолжением заданного усечения и продолжение K -завершения является продолжением также и исходного усечения. Отсюда следует, что усечение является строго невырожденным, если и только если каждое его K -завершение, рассматриваемое как плоское d -усечение, — строго невырождено. Если какое-либо K -завершение $P' = (p'_{ij})$ вырождено или не является строго невырожденным, то исходное усечение не является строго невырожденным.

Задача в том, чтобы для заданного усечения, не являющегося строго невырожденным, построить вырожденное продолжение M . Такую матрицу M мы будем называть *контрпримером к гипотезе о строгой невырожденности* усечения, или коротко — контрпримером. Построение контрпримера сводится к построению K -завершения P' , которое либо вырождено (и тогда $M = P'$), либо не является строго невырожденным. Во втором случае достаточно построить контрпример M для P' , тогда M будет также контрпримером и для исходного усечения.

В [3], в доказательстве предложения 1 описано (с точностью до замены обозначения P на P'), как построить вырожденное продолжение M для не являющейся строго невырожденной полиномиальной матрицы P' . Пусть $\deg P' \leq d$, $\text{val det } P' = \nu$ и $P'^* = (p'^*_{ij})$ — матрица алгебраических дополнений для P' . Из того, что P' не является строго невырожденной матрицей, следует, что для нее не выполняется условие (1), т.е. существует элемент $p'^*_{i_0 j_0}$ такой, что $d + \text{val } p'^*_{i_0 j_0} < \nu$. Тогда $n \times n$ -матрица $M = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} p'_{ij} - \frac{\det P'}{p'^*_{i_0 j_0}}, & \text{если } i = i_0, j = j_0, \\ p'_{ij}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

является контрпримером для P' (обоснование см. в [3, разд. 3], в частности, обоснование того, что рациональная функция $\frac{\det P'}{p'^*_{i_0 j_0}}$ разлагается в ряд, не содержащий степеней x с показателями меньшими, чем $\deg p'_{ij}$).

3. Свойства формального завершения

Для невырожденной полиномиальной $n \times n$ -матрицы $P = (p_{ij})$ и целых чисел $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$, таких, что выполнено (2), построим формальное завершение $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Часть элементов $\tilde{P}$ будет зависеть от неопределенных коэффициентов, которые мы дальше будем называть параметрами. Обозначим через T множество всех параметров из $\tilde{P}$.

Определитель формального завершения $\det \tilde{P}$ является полиномом от x . Его степень не превышает dn , коэффициенты зависят от параметров из множества T :

$$\det \tilde{P} = r_\nu(T) x^\nu + r_{\nu+1}(T) x^{\nu+1} + \dots + r_{dn}(T) x^{dn}, \quad (4)$$

где $r_\nu(T) \neq 0$, $0 \leq \nu \leq dn$. Число ν будем называть валуацией $\det \tilde{P}$, свободной от параметров, если $r_\nu(T)$ — константа. Если же при некоторых значениях из K параметров T младший коэффициент $r_\nu(T)$ обращается в ноль, ν будем называть T -валуацией.

Коэффициенты определителя являются полиномами над K от параметров из T , причем степень вхождения каждого $t \in T$ не превосходит 1. Такого рода полином, обозначим его $r(T)$, является либо константой ($r(T) \in K$), либо суммой константы и конечной суммы членов вида $a t_1 \dots t_s$, где $a \in K$, $t_1, \dots, t_s \in T$. Пусть $t \in T$. Тогда $r(T)$ можно представить в виде:

$$r(T) = \alpha(T) t + \beta(T), \quad (5)$$

где $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ не зависят от t , но, возможно, зависят от некоторых других параметров из T и являются полиномами такой же структуры, что и $r(T)$.

Покажем, как индуктивно для ненулевого полинома $r(T)$ подобрать набор значений из K для входящих в него параметров, при которых $r(T)$ принимает ненулевое значение в K . Индукцию проведем по количеству параметров, входящих в $r(T)$.

Итак, $r(T)$ зависит от t . Если $\beta(T) = 0$, т.е. $r(T) = \alpha(T) t$, найдем набор значений, при котором в ноль не обращается полином $\alpha(T)$, зависящий от меньшего количества параметров, чем $r(T)$; для t можно взять любое ненулевое значение из K , например, 1. Если $\beta(T)$ — ненулевая константа, то для t можно

взять значение 0 и для параметров из $\alpha(T)$ — любые значения, например, тоже 0. Если $\beta(T)$ — ненулевой полином, найдем набор значений, при котором в ноль не обращается $\beta(T)$; для t и параметров, от которых зависит $\alpha(T)$, но не зависит $\beta(T)$, берем значение 0.

Такие наборы значений параметров понадобятся в следующем разделе при построении контрпримера для усечения по его формальному завершению $\tilde{P}$.

4. Построение контрпримера

Построим для формального завершения $\tilde{P}$ матрицу алгебраических дополнений $\tilde{P}^* = (\tilde{p}_{ij}^*)$. Заметим, что каждый элемент $\tilde{P}^*$ — это, с точностью до знака, минор, т.е. определитель подматрицы формального завершения, и, следовательно, является полиномом от x с коэффициентами вида (5). При любых значениях параметров, валюация не может стать меньше, чем $\mu = \text{val } \tilde{P}^*$. Т.е. $\text{val } P'^* \geq \mu$ для любого K -завершения P' .

Валюация $\nu = \text{val } \det \tilde{P}$ также может быть свободной от параметров или нет, и $\text{val } \det P' \geq \nu$ для любого K -завершения P' .

Предложение 1. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ таковы, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть, далее, T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ .

Пусть ν — свободная от параметров валюация определителя $\det \tilde{P}$ и выполняется

$$d + \mu \geq \nu.$$

Тогда заданное усечение строго невырождено.

Доказательство. Итак $\text{val } \det \tilde{P} = \nu$ для всех значений параметров из T , т.е. $\text{val } \det P' = \nu$ для любого K -завершения P' . Также для любого K -завершения P' выполняется $\text{val } P'^* \geq \mu$, где P'^* —

матрица алгебраических дополнений для P' . Следовательно,

$$d + \text{val } P'^* \geq d + \mu \geq \nu = \text{val det } P'.$$

Следовательно, для любого K -завершения P' выполняется критерий (1), т.е. все K -завершения строго невырождены. $\square$

Предложение 2. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ такие, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть, далее, T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ . Пусть при этом выполнено

$$d + \mu < \nu.$$

Тогда заданное усечение не является строго невырожденным.

Доказательство. Поскольку $\text{val } \tilde{P}^* = \mu$, то в матрице $\tilde{P}^*$ найдется элемент $\tilde{p}_{i_0 j_0}^*$, являющийся полиномом от x , в котором присутствует ненулевое слагаемое вида $r(T)x^\mu$. Покажем, что это обеспечивает существование K -завершения P' такого, что выполняется $\text{val } P'^* = \mu$, где P'^* — матрица алгебраических дополнений для P' .

Действительно, либо $r(T)$ не зависит от параметров из T , либо имеет вид (5) и можно найти значения для параметров из $r(T)$ такие, что $r(T)$ не равно нулю, как описано в предыдущем разделе. Те параметры из T , которые не входят в $r(T)$, можно положить равными 0. Для матрицы P' , соответствующей построенным значениям, получим $\text{val } p_{i_0 j_0}^* = \text{val } P'^* = \mu$.

Далее, для любого завершения P' выполняется $\text{val det } P' \geq \nu$. Возможно, что матрица P' , соответствующая построенным значениям, окажется вырожденной ($\text{val det } P' = \infty$), тогда P' является контрпримером и заданное усечение не является строго невырожденным. Иначе, получаем

$$d + \text{val } P'^* = d + \mu < \nu \leq \text{val det } P'.$$

Следовательно, для построенного P' не выполняется критерий (1). Строим для него контрпример M согласно (3). $\square$

Предложение 3. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ такие, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть далее T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ .

Пусть ν — T -валюация определителя $\det \tilde{P}$, т.е. $r_\nu(T)$ в (4) зависит от некоторого параметра t , и выполняется

$$d + \mu \geq \nu.$$

Тогда заданное усечение не является строго невырожденным.

Доказательство. Согласно определению 2, каждый параметр t в формальном завершении $\tilde{P}$ является коэффициентом в некотором элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$ при x в некоторой степени k , $0 \leq k \leq d$.

Как указано в разделе 3, если $r_\nu(T)$ в (4) зависит от параметра t , то $r_\nu(T)$ имеет вид

$$r_\nu(T) = \alpha(T)t + \beta(T). \quad (6)$$

Очевидно, что $\alpha(T)$ — коэффициент в $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ при $x^{\nu-k}$.

Далее заметим, что если $k < d$, то следующие коэффициенты в (4) имеют вид

$$\begin{aligned} r_{\nu+1}(T) &= \alpha(T)s + \gamma(T), \\ \dots & \\ r_{\nu+d-k}(T) &= \alpha(T)q + \delta(T), \end{aligned} \quad (7)$$

где s — параметр при x^{k+1} в элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, и т.д. вплоть до q — параметр при x^d в элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$. Валюация полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ равна $\nu - k$. Иначе в определитель (4) входил бы ненулевой член, равный произведению tx^k и младшего члена полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$, и степень x в нем была бы меньше ν . Из этого следует, что $r_\nu(T)$ не зависит от параметров из $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, кроме t ; $r_{\nu+1}(T)$ не зависит от параметров коэффициентов в $\tilde{p}_{i_1, j_1}$ при степенях x , больших $k+1$, и т.д. вплоть до того, что $r_{\nu+d-k}(T)$ не зависит от параметров из $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, кроме q .

Найдем значения параметров из $\alpha(T)$ из (6) такие, что $\alpha(T)$ не обращается в 0. Оставшиеся параметры из $\beta(T)$ положим

равными 0, а t — равным $-\beta(T)/\alpha(T)$. При этих значениях $r_\nu(T)$ обращается в 0, т.е. $\text{val det } \tilde{P}$ увеличивается; валюация полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ становится равной $\nu - k$, поэтому значение $\text{val } \tilde{P}^*$ может возрасти не более, чем до $\nu - k$.

Далее можно последовательно обнулить $r_{\nu+1}(T), \dots, r_d(T)$, положив оставшиеся параметры в $\gamma(T), \dots, \delta(T)$ из (7) равными 0, $s = -\gamma(T)/\alpha(T), \dots, q = -\delta(T)/\alpha(T)$. Оставшиеся в T параметры полагаем равными 0. Возможно, что матрица P' , соответствующая выбранным значениям, окажется вырожденной ($\text{val det } P' = \infty$), тогда P' является контрпримером. Иначе, получим: $\text{val det } P' > \nu + d - k$, $\text{val } P'^* \leq \nu - k$. Тогда

$$d + \text{val } P'^* \leq d + \nu - k < \text{val det } P'$$

и, следовательно, для P' критерий строгой невырожденности не выполняется. Строим контрпример M согласно (3). $\square$

Из предложения 1 и доказательств предложений 2 и 3 следует справедливость следующей теоремы:

Теорема. *Существует алгоритм, который для любого усечения, не являющегося строго невырожденным, строит его продолжение в виде такой вырожденной матрицы, каждый элемент которой есть либо полином, либо сумма полинома и указываемой рациональной функции от x , разложенной в формальный степенной ряд.*

Доказательство. В качестве доказательства дадим описание алгоритма построения контрпримера для усеченной матрицы, заданной невырожденной полиномиальной матрицей P и числами d_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющими (2).

1. Построить формальное завершение $\tilde{P}$ и построить для него матрицу алгебраических дополнений $\tilde{P}^*$. Вычислить определитель формального завершения $\text{det } \tilde{P}$. Найти $\nu = \text{val det } \tilde{P}$ и $\mu = \text{val } \tilde{P}^*$.
2. Если $d + \mu < \nu$, построить контрпример следуя доказательству предложения 2, иначе — предложения 3.

$\square$

5. Пример

Пусть задана полиномиальная матрица

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

и степени усечения $d_{11} = 1$, $d_{12} = 0$, $d_{21} = 2$, $d_{22} = 1$.

Тогда $d = \max d_{ij} = 2$.

Формальное завершение в этом случае имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} t_1 x^2 + x + 1 & t_3 x^2 + t_2 x + 1 \\ 1 & t_4 x^2 - x + 1 \end{pmatrix},$$

где t_1, t_2, t_3, t_4 — параметры. Определитель формального завершения $\det \tilde{P} = t_1 t_4 x^4 + (-t_1 + t_4)x^3 + (t_1 - t_3 + t_4 - 1)x^2 - t_2 x$ имеет валюацию равную $\nu = 1$ и зависит от параметра t_2 .

Матрица алгебраических дополнений к формальному завершению имеет вид

$$\tilde{P}^* = \begin{pmatrix} t_4 x^2 - x + 1 & -1 \\ -t_3 x^2 - t_2 x - 1 & t_1 x^2 + x + 1 \end{pmatrix},$$

ее валюация равна $\mu = 0$ и не зависит от параметров.

Поскольку в этом примере $d + \mu > \nu$ ($2 + 0 > 0$) и $r_1(t_2) = -t_2$, строим контрпример, следуя доказательству предложения 3.

Младший коэффициент $\det \tilde{P}$ обращается в 0 при $t_2 = 0$. Следующий коэффициент, при x^2 , обращаем в 0, положив $t_1 = 1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 0$. При таких значениях параметров $\text{val } \det \tilde{P} = 3$ и, следовательно, $d + \text{val } \tilde{P}^* < \text{val } \det \tilde{P}$ ($2 + 0 < 3$). Оставшийся параметр t_4 полагаем равным 0. Получаем завершение для исходной усеченной матрицы

$$P' = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 & 1 \\ 1 & 1 - x \end{pmatrix}$$

и соответствующую ей матрицу алгебраических дополнений

$$\tilde{P}^* = \begin{pmatrix} -x + 1 & -1 \\ -1 & x^2 + x + 1 \end{pmatrix}.$$

Если в формуле (3) возьмем $i_0 = j_0 = 1$, то получим контрпример

$$M = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{1-x} & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix},$$

поскольку $\det P' = x^3$ и $\tilde{p}_{11}^* = -x+1$. Неполиномиальный элемент в левом верхнем углу матрицы может быть представлен в виде формального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Литература

1. Абрамов С. А., Рябенко А. А. *Усеченные ряды в роли матричных элементов* // Фундаментальная и прикладная математика, 2025 (в печати).
2. Abramov S., Ryabenko A. *Matrices of infinite series: checking non-singularity based on truncations* // Computer algebra: 6th International Conference Materials. Moscow, 23–25 June, 2025. Moscow: RUDN University. P. 27–30.
3. Abramov S., Barkatou M. *On Strongly Non-Singular Polynomial Matrices* // In: Schneider C., Zima E. (eds) *Advances in Computer Algebra*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2018 (226): 1–17.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.

Артамонов Д. В.

Монодромия систем ГКЗ: обзор общего подхода

Аннотация

В работе показывается, что при некоторых дополнительных условиях задача вычисления монодромии систем Гельфанда–Капранова–Зелевинского

сводится к геометрической задаче изучения примыкания компонент в дополнении к набору гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$.

1. Введение

Гипергеометрическое уравнение Гаусса представляет из себя пример уравнения, для которого возможно явные решения основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений: **а)** нахождение размерности пространства решений **б)** нахождение особого множества (обе эти задачи тривиальны для обыкновенного уравнения) **в)** нахождение ветвления решений вокруг особого множества (то есть — нахождение монодромии).

Монодромия может быть найдена несколькими разными способами.

1) Строятся в виде сумм сходящихся степенных рядов локальные базисы решений вблизи особых точек с понятным ветвлением при обходе вокруг данной точки, а затем находятся формулы связи между базисами, отвечающими разным особым точкам [1].

2) Берутся локальные базисы решений f_1^x, f_2^x вблизи особых точек $x = 0, 1, \infty$, а затем рассматриваются отображения

$$(f_1^x : f_2^x) : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \bar{\mathbb{C}}.$$

Связь между этими отображениями для различных x находится путем рассмотрения образов под их действием верхней и нижней полуплоскости и использования принципа симметрии Шварца (см. [2])

3) С помощью рассмотрения представлений решений в виде эйлеровских интегралов (этот способ работает для систем общего положения):

$$F(z) = \int_{\sigma} t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-tz)^{\gamma} dt, \quad \sigma \in H_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \mathcal{L}), \quad (1)$$

где $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на пространстве $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{z}\}$ с координатой t , определяемое подынтегральным выражением. С помощью этого представления задача вычисления монодромии сводится к топологической задаче нахождения ветвления (при

изменении параметра z) групп гомологий $H_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \mathcal{L})$ (см. [2]).

Имеются многочисленные обобщения гипергеометрического уравнения Гаусса, как одномерные, так и многомерные. В настоящей работе мы сосредоточимся на многомерном обобщении — на системах Гельфанда–Капранова–Зелевинского (система ГКЗ далее). Это не самый широкий класс уравнений в частных производных, которые принято называть гипергеометрическими, но он гарантированно обладает некоторыми хорошими свойствами. Например, эти уравнения голономные (см. [3]), а, следовательно, имеют конечномерные пространства решений.

Среди специалистов [4], [5] принято считать, что о монодромии систем ГКЗ ничего не известно. Эта так, если иметь в виду вопрос *явного* вычисления в каких-то важных случаях (например, в тех случаях, когда система ГКЗ сводится к известным ранее гипергеометрическим системам). Тем не менее, имеется важная теория, которая позволяет (при некоторых дополнительных условиях) свести задачу вычисления монодромии систем ГКЗ к некоторой топологической задаче. Хотя основные моменты этой теории известны давно (см. [6],[7]), но при их изложении не делался явный акцент на то, что они имеют прямое отношение к вычислению монодромии систем ГКЗ.

В настоящей работе они изложены с этим акцентом. В основном все излагаемые результаты являются известными, кроме вычислений в разделе 4.1 (хотя, возможно, специалисты сказали бы, что и это фольклор).

2. Система ГКЗ, представление решений в виде интегралов типа Эйлера

2.1 Система ГКЗ

Пусть $B \subset \mathbb{Z}^N$ — решётка, $\gamma \in \mathbb{C}^N$ — фиксированный вектор. При этом мы предполагаем, что решётка B задаётся системой линейных однородных уравнений с целочисленной матрицей A :

$$b \in B \Leftrightarrow Ab = 0, \quad A \in \text{Mat}(N \times n, \mathbb{Z})$$

Системой ГКЗ называется система уравнений в частных производных, которая состоит из уравнений двух типов (см., например, [8]).

1. Пусть $a = (a_1, \dots, a_N)$ — вектор, ортогональный решётке B , тогда

$$a_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \mathcal{F}_\gamma + \dots + a_N z_N \frac{\partial}{\partial z_N} \mathcal{F}_\gamma = (a_1 \gamma_1 + \dots + a_N \gamma_N) \mathcal{F}_\gamma, \quad (2)$$

при этом достаточно рассмотреть лишь базисные вектора решётки, ортогональной B .

2. Пусть $b \in B$ и $b = b_+ - b_-$, где все координаты векторов b_+ , b_- — неотрицательные. Выделим в этих векторах ненулевые элементы $b_+ = (\dots b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \dots)$, $b_- = (\dots b_{j_1}, \dots, b_{j_l} \dots)$. Тогда

$$\mathcal{O}_b \mathcal{F}_\gamma = 0, \quad \mathcal{O}_b = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{b_+} - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{b_-},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{b_+} := \left(\frac{\partial}{\partial z_{i_1}} \right)^{b_{i_1}} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_{i_k}} \right)^{b_{i_k}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{b_-} = \left(\frac{\partial}{\partial z_{j_1}} \right)^{b_{j_1}} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_{j_l}} \right)^{b_{j_l}}.$$

При этом для типичного γ достаточно рассмотреть лишь уравнения второго типа, конструируемые по базисным векторам решетки.

2.2 Интегральное представление типа Эйлера

В работе [9] построен базис в пространстве решений *произвольной регулярной* системы ГКЗ, обобщающий представление (1). Система называется регулярной, если ее ограничение на любую кривую есть регулярная связность на этой кривой. Система ГКЗ регулярна тогда и только тогда, когда вектор $(1, \dots, 1)$ можно представить как целочисленную комбинацию строк матрицы A .

Для получения данного представления возьмём матрицу A , задающую решётку, целочисленными обратимыми преобразованиями строк приведём её к виду

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & & 1 \dots 1 \\ \hline A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{array} \right].$$

Предложение 1. Матрица A приводится к такому виду тогда и только тогда, когда вектор $(1, \dots, 1)$ можно получить как целочисленную комбинацию строк матрицы A , то есть, тогда и только тогда, когда соответствующая система ГКЗ регулярна.

Пусть матрицы $A_1, \dots, A_m$ имеют k строк, занумеруем их переменными $t_1, \dots, t_k$. Тогда если ω есть столбец матрицы A_i , то определен моном

$$t^\omega := t_1^{\omega_1} \dots t_k^{\omega_k}.$$

Положим

$$P_i := \sum_{\omega \in A_i} z_\omega t^\omega,$$

где сумма берется по всем столбцам ω матрицы A_i , при этом z_ω — коэффициенты при мономах. Таким образом, P_i зависит как от переменных t , так и от переменных z .

В пространстве $\mathbb{C}^k$ с координатами $t_1, \dots, t_k$ рассмотрим множество (при фиксированных z)

$$U := \mathbb{C}^k \setminus \bigcup_j \{t_j = 0\} \cup \bigcup_i \{P_i = 0\}.$$

Далее рассмотрим интеграл

$$F_\sigma(z) := \int_\sigma \prod_i P_i^{\alpha_i} \cdot \prod_j t_j^{\beta_j} dt_1 \dots dt_k, \quad (3)$$

где $\sigma \in H_k^c(U, \mathcal{L})$, а $\mathcal{L}$ есть линейное расслоение на U , определяемое подинтегральной функцией в (3). Здесь и далее мы используем следующее обозначение: H_k^c есть группа гомологий с компактными носителями (обычные гомологии, как правило обозначаемые просто H_k), а H_k есть группа гомологий с локально компактными носителями (иногда обозначаемые H_k^{lf}).

Как доказано в [9], интеграл (3) есть решение системы ГКЗ, конструируемой по решётке, задаваемой системой уравнений с матрицей A , при этом вектор γ таков, что вектор правых частей в уравнениях первого типа (2) имеет вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, -\beta_1 - 1, \dots, -\beta_k - 1)$. Более того, в [9] показано, что для типичных значений параметров отображение $\sigma \mapsto F_\sigma(z)$ есть изоморфизм

между $H_k^c(U, \mathcal{L})$ и пространством решений системы ГКЗ. Таким образом, изучение монодромии системы ГКЗ сводится к изучению монодромии гомологий $H_k^c(U, \mathcal{L})$.

3. Гомологии дополнения к набору гиперповерхностей

3.1 Многообразия $\kappa(\Delta)$ и их погружения

Введём более короткие обозначения

$$U = \mathbb{C}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\},$$

где f_j — вещественные многочлены, а $\mathcal{L}$ задается функцией $\prod_{j=1}^M f_j^{\gamma_j}$.

Теорема [6]. Пусть все многочлены f_j — с вещественными коэффициентами, гиперповерхности $f_j = 0$ неособые, их пересечения трансверсальны. Тогда для типичных γ_j верно следующее утверждение.

1. $H_*(U, \mathcal{L}) \neq 0$ только при $* = k$.
2. $H_k(U, \mathcal{L})$ порождается классами $[\Delta]$ ограниченных компонент Δ множества $\mathbb{R}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$. Эти классы независимы.
3. Каждой ограниченной компоненте Δ множества $\mathbb{R}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$ соответствует класс $[\kappa(\Delta)] \in H_k^c(U, \mathcal{L})$, задаваемый погружением некоторого ориентированного многообразия $\kappa(\Delta)$ в U , которое поднимается до погружения в риманову поверхность функции f . При этом естественное отображение

$$H_k^c(U, \mathcal{L}) \rightarrow H_k(U, \mathcal{L})$$

есть изоморфизм, переводящий $[\kappa(\Delta)]$ в $\prod_{j \simeq \Delta} (1 - e^{2\pi i \gamma_j})[\Delta]$, где произведение берётся по тем j , для которых $\{f_j = 0\}$ входит в границу Δ .

В частности, классы $[\kappa(\Delta)]$, отвечающие ограниченным компонентам в $\mathbb{R}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$, образуют базис группы гомологий $H_k^c(\mathbb{C}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}, \mathcal{L})$.

Теперь, следуя [6], построим классы $[\kappa(\Delta)] \in H_k^c(U, \mathcal{L})$, называемые двойными петлями, обобщающими конструкцию петли Похгаммера. Рассмотрим одну из компонент Δ множества $\mathbb{R}^n \setminus$

$\cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$, без ограничения общности можно считать, что она задаётся неравенствами $f_1 < 0, \dots, f_m < 0$, где $m \leq M$, разумеется. Сперва построим ориентируемое многообразие $\kappa(\Delta)$, а затем зададим его погружение в $\mathbb{C}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$. Эта конструкция и будет задавать класс гомологий в $H_k(U, \mathcal{L})$.

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ положим

$$\tilde{\Delta}_\varepsilon := \{f_1 \leq -\varepsilon, \dots, f_m \leq -\varepsilon\}.$$

Возьмём 2^m экземпляров данного множества, занумерованные всевозможными подмножествами $\nu \subset \{1, \dots, m\}$. Обозначим эти экземпляры как $\Delta_\varepsilon(\nu)$.

Также введём множества $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, I}(\nu)$, где $I \subset \{1, \dots, m\}$ есть множество из не более, чем k элементов, $\nu \subset \{1, \dots, k\} \setminus I$. Это будут $2^{k-|I|}$ экземпляров множеств $\{f_j = 0, j \in I, f_j \leq -\varepsilon, j \in \{1, \dots, m\} \setminus I\}$.

Теперь положим

$$\Delta_{\varepsilon, I}(\nu) := \tilde{\Delta}_{\varepsilon, I}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}.$$

Наконец, опишем процедуру склейки. Сперва мы берём множества $\Delta_\varepsilon(\nu)$ и рассматриваем участки их границы, задаваемые уравнением $f_j = -\varepsilon$. Также мы рассматриваем множества $\Delta_{\varepsilon, j}(\nu) = \tilde{\Delta}_{\varepsilon, j}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Их границы включают множества $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, j}(\nu) \times \{-\varepsilon\}$ и $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, j}(\nu) \times \{\varepsilon\}$. Теперь мы отождествляем участки границ по принципу

$$\Delta_\varepsilon(\nu), f_j = -\varepsilon \simeq \tilde{\Delta}_{\varepsilon, j}(\nu) \times \{-\varepsilon\},$$

$$\Delta_\varepsilon(\nu \cup \{j\}), f_j = -\varepsilon \simeq \tilde{\Delta}_{\varepsilon, j}(\nu) \times \{\varepsilon\}.$$

На d -ом шаге, $d = 0, \dots, k$, мы рассматриваем $\Delta_{\varepsilon, I}(\nu)$ и берём часть границы, состоящую из кусков

$$\tilde{\Delta}_{\varepsilon, I}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times \{-\varepsilon\} \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon],$$

$$\tilde{\Delta}_{\varepsilon, I}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times \{\varepsilon\} \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon],$$

где мы выделили j -ый сомножитель. Тогда мы выполняем отождествление по принципу

$$\Delta_{\varepsilon, I \setminus \{j\}}(\nu), f_j = -\varepsilon \simeq \tilde{\Delta}_{\varepsilon, I \setminus \{j\}}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \dots \times \{-\varepsilon\} \times \dots [-\varepsilon, \varepsilon],$$

$$\Delta_{\varepsilon, I}(\nu \cup \{j\}), f_j = -\varepsilon \simeq \tilde{\Delta}_{\varepsilon, I}(\nu) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \dots \times \{\varepsilon\} \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon].$$

В [6] показано, что получающееся в результате всех этих склеек множество $\kappa(\Delta)$ есть ориентируемое многообразие.

Погружение $\kappa(\Delta)$ в $\mathbb{C}^k \setminus \bigcup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$ строится следующим образом. Сперва фиксируется отображение $\theta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, которое тождественно на $[-\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}]$, затем осуществляющее обход вокруг 0 по часовой стрелки, затем отображающее отрезок $[\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ в обратном направлении.

В [6] показано, что подмножество $\Delta_I \subset \partial\Delta$, задаваемое уравнениями $f_j = 0$, $j \in I$, имеет окрестность в $\mathbb{R}^k$ (именно — задаваемую условиями $|f_j| \leq \varepsilon$, $j \in I$, $f_j < 0$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus I$), которая гомеоморфна тривиальному расслоению над Δ_I . Именно, она гомеоморфна $\Delta_I \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}$. При этом выполнено условие согласованности: если $I' \subset I$, то **1)** каждый слой расслоения на Δ_I лежит в слое расслоения над $\Delta_{I'}$; **2)** вдоль слоя последнего расслоения постоянны функции f_j , $j \in I' \setminus I$.

Введём в этой окрестности координаты $x_1, \dots, x_k$, такие что Δ_I задаётся уравнениями $x_1 = \dots = x_{|I|} = 0$. Имеются соответствующие комплексные координаты $z_1, \dots, z_k$ в $\mathbb{C}^k$. Соответственно, $x_{|I|+1}, \dots, x_m$ суть координаты в Δ_I . Тогда в $\Delta_{\varepsilon, I}(\nu)$ имеются координаты $(t_1, \dots, t_{|I|}, x_{|I|+1}, \dots, x_m)$, $t_1, \dots, t_{|I|}$ суть координаты в $[-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}$. Тогда погружение $\Delta_{\varepsilon, I}(\nu)$ задаётся формулой

$$(t_1, \dots, t_{|I|}, x_{|I|+1}, \dots, x_m) = (z_1 = \theta(t_1), \dots, z_{|I|} = \theta(t_{|I|}), \\ z_{|I|+1} = x_{|I|+1}, \dots, z_k = x_k),$$

С использованием свойств согласованности **1)**, **2)** в [6] показано, что это есть погружение $\kappa(\Delta)$. Данное погружение задаёт класс гомологий $H_k(U, \mathcal{L})$.

Пример. Рассмотрим двумерную область Δ и выделим её угол $\{f_1 = f_2 = 0\}$. Ограничимся локальным рассмотрением, поэтому область Δ далее будем отождествлять с $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < 0, x_2 < 0\}$. Соответственно, мы рассматриваем множества

$$\Delta_{\varepsilon}(\nu) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < -\varepsilon, x_2 < -\varepsilon\}, \nu = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\},$$

$$\Delta_{\varepsilon, 1}(\nu) = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 < -\varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon], \nu = \emptyset, \{2\},$$

$$\Delta_{\varepsilon,2}(\nu) = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2, x_1 < -\varepsilon\} \times [-\varepsilon, \varepsilon], \nu = \emptyset, \{1\},$$

$$\Delta_{\varepsilon,12}(\nu) = \{(0, 0)\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2, \nu = \emptyset.$$

После склейки этих множеств получается $\kappa(\Delta)$, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$. Именно,

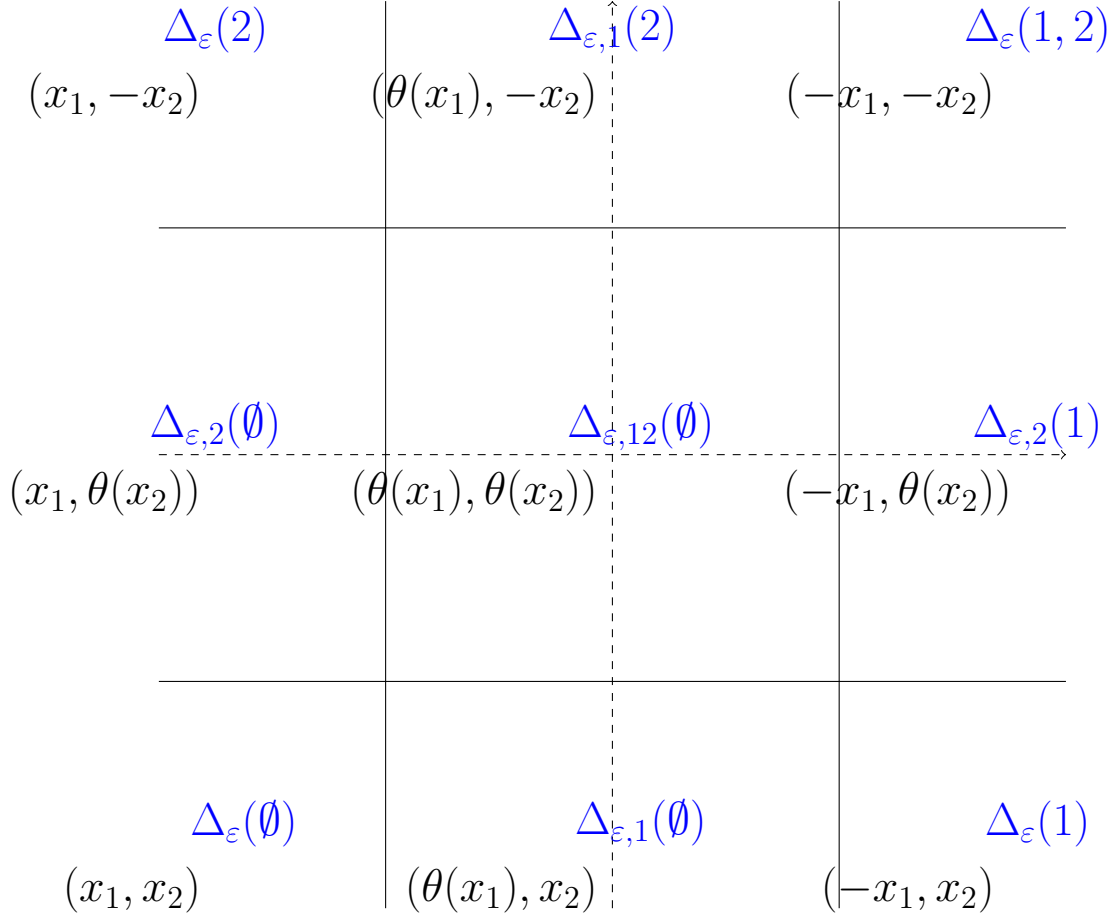
$$\Delta_{\varepsilon,12}(\nu) \simeq \{|x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta_{\varepsilon,2}(\emptyset) \sqcup \Delta_{\varepsilon,2}(1) \simeq \{|x_1| \geq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta_{\varepsilon,1}(\emptyset) \sqcup \Delta_{\varepsilon,1}(2) \simeq \{|x_2| \leq \varepsilon, |x_2| \geq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta_{\varepsilon}(\emptyset) \sqcup \Delta_{\varepsilon}(1) \sqcup \Delta_{\varepsilon}(2) \sqcup \Delta_{\varepsilon}(1, 2) \simeq \{|x_1| \geq \varepsilon, |x_2| \geq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2.$$

В картинке ниже пунктиром выделены координатные оси, непрерывными линиями выделено приведённое выше разбиение $\mathbb{R}^2$, возникающее при отождествлении $\mathbb{R}^2$ и $\kappa(\Delta)$. В каждой полученной области имеются две подписи — название данной области и формула для отображений h в ней.



3.2 Приведение погружений $\kappa(\Delta)$ в общее положение

Имеются вложения

$$h_s : \kappa(\Delta^s) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$$

двух многообразий $\kappa(\Delta^s)$, $s = 1, 2$, построенных по компонентам Δ^1, Δ^2 множества $\mathbb{R}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$. Очевидно, что если Δ^1 и Δ^2 не пересекаются¹, то можно считать, что образы погружений не пересекаются.

Пусть теперь Δ^1 и Δ^2 пересекаются. Пусть Δ^1 задаётся условиями $\{f_1 < 0, \dots, f_m < 0\}$, а Δ^2 — какими-то другими неравенствами (в них могут участвовать другие функции f_j), которые нам не понадобится выписывать явно. Пересечение компонент обязательно имеет вид множества Δ_J из предыдущего раздела: $\Delta^1 \cap \Delta^2 = \Delta_J^1 = \{f_j = 0, j \in J, f_j < 0, j \in \{1, \dots, m\} \setminus J\}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Малым шевелением погружений h_1 и h_2 можно добиться того, что над Δ_I^1 при $|I| < k$, образы h_1, h_2 не пересекаются.*

Доказательство. При построении погружений $h_s : \kappa(\Delta^s) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$ эти погружения по отдельности строились на множествах $\Delta_{\varepsilon, I}^s(\nu)$, а затем проверялась их согласованность. Здесь I — индексы обращающихся в 0 на Δ_I^1 функций f_j , а ν — произвольное подмножество множества индексов функций, задающих соответствующее Δ^s за вычетом множества I .

Погружения на множествах $\Delta_{\varepsilon, I}^s(\nu)$ строились следующим образом. Согласно результатам [6], имеется окрестность множества Δ_I в $\mathbb{R}^k$ вида $\Delta_I \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}$. Ранее в этой окрестности были введены координаты $x_1, \dots, x_k$, такие что Δ_I задаётся уравнениями $x_1 = \dots = x_{|I|} = 0$. Соответствующие комплексные координаты были обозначены как $z_1, \dots, z_k$. Тогда погружение h_s при его ограничении на $\Delta_{\varepsilon, I}^s(\nu)$ задаётся формулой

$$h_1(t_1, \dots, t_{|I|}, x_{|I|+1}, \dots, x_m) = (z_1 = \theta(t_1), \dots, z_{|I|} = \theta(t_{|I|}),$$

$$z_{|I|+1} = x_{|I|+1}, \dots, z_k = x_k).$$

¹Корректно говорить о пересечении замыканий компонент, но мы не будем перегружать терминологию.

Необходимое и достаточное условие того, что образ этого отображения пересекается с образом h_2 состоит том, что $J \subset I$.

Немного изменим отображения h_1, h_2 . Для этого возьмём различные отличные от 0 комплексные числа $\varphi_{s,i} \in \mathbb{C}^*$, где индекс s пробегает множество компонент Δ^s , а i — множество координат.

Для получения изменённого отображения $\bar{h}_1$ возьмём вместо отображений θ их шевеления θ_i^1 , получаемые так. Если отображение θ концевые точки $\pm\varepsilon$ отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ отправляет в $-\varepsilon$, то θ_i^1 будет отправлять их в $\varphi_{s,i}$ (при этом также осуществляя обход вокруг точки $0 \in \mathbb{C}$). Тогда

$$\bar{h}_1(t_1, \dots, t_{|I|}, x_{|I|+1}, \dots, x_m) = (z_1 = \theta_1^1(t_1), \dots, z_{|I|} = \theta_{|I|}^1(t_{|I|}),$$

$$z_{|I|+1} = x_{|I|+1} + \varphi_{1,|I|+1}, \dots, z_k = x_k + \varphi_{1,k}).$$

И аналогично модифицируем h_2 , но с использованием чисел $\varphi_{2,i}$ и, соответственно, отображений θ_i^2 .

Видно, что образы отображений $\bar{h}_1(\Delta_{\varepsilon,I}^1(\nu))$ и $\bar{h}_2(\Delta_{\varepsilon,I}^1(\nu'))$, если только $|I| < k$, не пересекаются при всех возможных ν, ν' вследствие различности чисел $\varphi_{s,i}$. Кроме того, конструируемые возмущения отображения $\bar{h}_1$ согласованы со склейкой кусков $\Delta_{\varepsilon,I}^1(\nu)$ в $\kappa(\Delta^1)$.

Таким образом, образы $\bar{h}_1(\kappa(\Delta^1))$ и $\bar{h}_2(\kappa(\Delta^2))$ могут пресекаться только над общими вершинами Δ^1 и Δ^2 (вершины — точки границы, где обращаются в ноль k функций f_j и нет координат x , которые можно возмущать).

Теорема доказана.

4. Индексы пересечений

Итак, пусть имеются пересекающиеся компоненты Δ^1, Δ^2 . Вычислим индекс пересечения $< [\kappa(\Delta^1)], [\kappa(\Delta^2)]' >$, где $[\kappa(\Delta^2)]'$ рассматривается как класс гомологий в двойственной локальной системе. Приведем соответствующие погружения в общее положение, так что погруженные многообразия пересекаются только над общими вершинами компонент.

Пусть компоненты Δ^1 и Δ^2 имеют общую вершину P , задаваемую уравнениями

$$P = \{f_1 = 0, \dots, f_k = 0\}. \quad (4)$$

При этом считаем, что Δ^1 задается условиями

$$P = \{f_1 < 0, \dots, f_k < 0, f_{k+1} < 0, \dots, f_m < 0\}, \quad (5)$$

а Δ^2 задается условиями

$$\Delta^1 = \{f_1 < 0, \dots, f_t < 0, f_{t+1} > 0, \dots, f_k > 0, f_{j_{k+1}} < 0, \dots, f_{j_m} < 0\}. \quad (6)$$

Тогда вклад вершины $P = \Delta_{J=\{1, \dots, k\}}$ в индекс пересечения $< [\kappa(\Delta^1)], [\kappa(\Delta^2)] >$ вычисляется как сумма индексов пересечений образов погружений $\Delta_{\varepsilon, J}^1(\nu)$ и $\Delta_{\varepsilon, J}^2(\nu')$:

$$\Delta^2 = \sum_{\nu, \nu'} \prod_{i=1}^k < \theta_\nu(t_i), \theta_{\nu'}(t'_i) >, \quad (7)$$

где индекс ν пробегает все возможные подмножества $\nu \subset \{1, \dots, k, k+1, \dots, m\} \setminus \{1, \dots, k\}$, соответственно ν' пробегает все возможные подмножества $\nu' \subset \{1, \dots, k, j_{k+1}, \dots, j_m\} \setminus \{1, \dots, k\}$. Параметры t_i и t'_i суть параметры в i -ых сомножителях $\Delta_{\varepsilon, J}^1(\nu) = P \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}$ и $\Delta_{\varepsilon, J}^2(\nu) = P \times [-\varepsilon, \varepsilon]^{|I|}$ соответственно. Нижний индекс у θ означает следующее. Множества ν индексируют листы римановой поверхности функции f , так что соответствующий лист получается после обхода вокруг множеств $\{f_j = 0\}$, $j \in \nu$. Тогда θ_ν есть поднятие θ на данный лист. Данные вложения согласованы благодаря тому, что рассматриваемое погружение $\kappa(\Delta^1)$ поднимается на данную риманову поверхность.

Теперь вычислим выражение (7). Для этого возьмём отдельное слагаемое $< \theta_\nu(t_i), \theta_{\nu'}(t'_i) >$, приведём малым шевелением θ_ν и $\theta_{\nu'}$ в общее положение.

Имеем, что θ_ν соединяет границы листов размерности один $\Delta_{\varepsilon, J \setminus \{i\}}^1(\nu)$ и $\Delta_{\varepsilon, J \setminus \{i\}}^1(\nu \cup \{i\})$. Аналогично, $\theta_{\nu'}$ соединяет границы листов размерности один $\Delta_{\varepsilon, J \setminus \{i\}}^2(\nu')$ и $\Delta_{\varepsilon, J \setminus \{i\}}^2(\nu' \cup \{i\})$. Тогда индекс пересечения $< \theta_\nu(t_i), \theta_{\nu'}(t'_i) >$ равен

$$(e^{2\pi i \sum_{j \in \nu} \gamma_j} - e^{2\pi i (\sum_{j \in \nu} \gamma_j - \gamma_i)}) e^{2\pi i \sum_{j \in \nu'} \gamma_j}.$$

Суммируя по всем возможным ν, ν' эти выражения, получаем, что вклад в $\langle [\kappa(\Delta^1)], [\kappa(\Delta^2)]' \rangle$ от вершины P равен

$$\prod_{j=1}^k (1 - e^{-2\pi i \gamma_j}) \prod_{j=k+1}^m (1 - e^{2\pi i \gamma_j}) \prod_{j=j_{k+1}}^{j_m} (1 - e^{-2\pi i \gamma_j}). \quad (8)$$

Теорема 2. *Чтобы вычислить $\langle [\kappa(\Delta^1)], [\kappa(\Delta^2)]' \rangle$, нужно по всем общим вершинам P , записанным в виде (4), просуммировать выражения (8).*

Как следствие, получаем также такое утверждение

Теорема 3. *Чтобы вычислить $\langle [\kappa(\Delta^1)], [\Delta^2]' \rangle$, нужно по всем общим вершинам P , записанным в виде (4), просуммировать выражения*

$$\prod_{j=k+1}^m (1 - e^{2\pi i \gamma_j}).$$

5. Формула Пикара-Лефшеца и монодромия систем ГКЗ

Продолжим работать в ситуации, когда $\{f_j = 0\}$ — неособые, с трансверсальными пересечениями. Пусть данный набор гиперповерхностей зависит от некоторых параметров, при это набор гиперповерхностей $\{f_j = 0\}$ имеет лишь фамовские особенности P_t (см. [6]). Соответственно, фундаментальная группа дополнения в пространстве параметров набора гиперповерхностей $\{f_j = 0\}$ к дискриминантному множеству порождается петлями вокруг компонент дискриминантного множества, отвечающих определённым особенностям типа P_t . Заметим, что компоненте дискриминантного множества соответствует ограниченная компонента, $\mathbb{R}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}$, исчезающая при дискриминантном значении параметров. Соответствующий класс гомологий $H_k^c(\mathbb{C}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}, \mathcal{L})$ для краткости обозначим просто как $[\kappa]$, а соответствующий класс гомологий $H_k(\mathbb{C}^k \setminus \cup_{j=1}^M \{f_j = 0\}, \mathcal{L})$ обозначим $[\Delta]$.

Имеет место равенство

$$[\kappa] = \prod_{i=1}^m (1 - e^{2\pi i \gamma_i}) [\Delta].$$

Имеет следующее утверждение.

Теорема [Следствие 1 в разделе 10.9 в [6]]. *Для типичных значений γ_j действие монодромии обхода вокруг компоненты дискриминантного множества на класс $[\tau] \in H_k^c(\mathbb{C}^k \setminus \bigcup_{j=1}^M \{f_j = 0\}, \mathcal{L})$ следующее:*

$$[\tau] \mapsto [\tau] + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{\prod -1}{1 + (-1)^{k-M} \prod -1} < [\tau], [\kappa]' > [\Delta], \quad \prod = \prod_{j=1}^m e^{2\pi i \gamma_j}.$$

Вернёмся теперь к задаче вычисления монодромии системы уравнений ГКЗ. Итак, предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) Система ГКЗ регулярна.
- 2) Набор гиперповерхностей $\{P_j = 0\}$, $\{t_i = 0\}$ — неособый, с трансверсальными пересечениями.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *При выполнении этих условий для вычисления группы монодромии системы ГКЗ для типичных значений параметров достаточно знать примыкания компонент $\mathbb{R}^k \setminus \bigcup_j \{P_j = 0\} \cup \bigcup_i \{t_i = 0\}$.*

Действительно, согласно замечанию в разделе 2.2 монодромия системы ГКЗ совпадает с монодромией гомологий $H_k^c(U, \mathcal{L})$. Эти группы порождаются двойными петлями, индексы пересечений между которыми вычислены в разделе 4.1 (при условии, что мы знаем расположение компонент $\mathbb{R}^k \setminus \bigcup_j \{P_j = 0\} \cup \bigcup_i \{t_i = 0\}$). Монодромия двойных петель же после этого вычисляется с помощью формулы Пикара–Лефшеца.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965.

2. Yoshida M., *Hypergeometric Functions, My Love: Modular Interpretations of Configuration Spaces*. Braunschweig — Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.
3. Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М., *Гипергеометрические функции и торические многообразия* // Функц. анализ и его прил., (23) №2 (1989): 12–26.
4. Садыков Т. М., Обсуждение, конференция в Коряжме, 2015.
5. Цих А. К., Обсуждение, конференция в Коряжме, 2017.
6. Васильев В. А., *Ветвящиеся интегралы*, — М: МЦНМО, 2000.
7. Васильев В. А., Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., *Общие гипергеометрические функции на комплексных грассманианах* // Функц. анализ и его прил., (21) №1 (1987): 23–38.
8. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С., *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа* // УМН, (47) №4 (1992): 3–82.
9. Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., Zelevinsky, A. V., *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions* // Advances in Mathematics, (84) №2 (1990): 255–271.

Ахметьев П. М., Смирнов А. Ю.

Комбинаторная формула для M -инварианта магнитных линий I

Аннотация

Для решения задач МГД при помощи теории двухмасштабного среднего поля, важно изучать инварианты магнитных линий. Такие инварианты по Арнольду должны быть построены на основе инвариантов конечного порядка классических ориентированных узлов и зацеплений, а также удовлетворять асимптотическому и эргодическому свойствам. Интересны, в первую

очередь, инварианты зацеплений, которые не выражаются полиномами от попарных коэффициентов зацепления компонент. Мы выбрали простейший инвариант M_3 для 3-компонентных зацеплений с известным аналитическим выражением из которого вытекают требуемые свойства. До нашей работы комбинаторная формула для M_3 -инварианта известна была лишь частично. Мы приводим комбинаторную формулу и доказываем асимптотическое свойство. Мы проводим построения без использования аналитического выражения.

1. Введение

Многие небесные тела имеют магнитные поля, которые, с современной точки зрения, генерируются движениями жидкой проводящей среды [1], [2], [3]. Этот процесс известен как процесс динамо. Динамо преобразует кинетическую энергию движения жидкости в магнитную энергию. Пространственная шкала генерируемого магнитного поля соизмерима с размерами небесного тела. Такое магнитное поле называется крупномасштабным. Динамо, которое генерирует такое поле также называется крупномасштабным.

Для изучения процесса динамо применяется средний коэффициент зацепления магнитных линий, который называется интеграл спиральности. Интеграл спиральности применяется к крупномасштабному магнитному полю, в то время как плотность коэффициента зацепления магнитных линий или асимптотического эргодического инварианта Хопфа [4] применяется для мелкомасштабного магнитного поля. Понятно, что существуют высшие интегралы магнитных линий, не выражающиеся через коэффициенты зацепления. Такие инварианты следует рассматривать в теории динамо, но это связано с известными трудностями, которые делают исследование сложным [5], [6], [7].

Наши исследования показывают, что высший инвариант магнитных линий тесно связан с теорией полиномиальных моментов магнитной спиральности, которая изучена в работах [8], [9], [10], [11], [12].

Любой полиномиальный момент магнитной спиральности является инвариантом конечного типа в смысле Васильева. Каж-

дый полиномиальный момент обладает калибровочно-инвариантной функцией плотности. Высший интеграл M_3 [13], [14] также должен обладать такой инвариантной плотностью, этот вопрос в работе не исследуется. Во всяком случае, интеграл определен сверткой по конечнократному конфигурационному пространству точек в пространстве всех конечных наборов точек на всевозможных упорядоченных тройках магнитных линий магнитного поля [9].

Нами предложена явная комбинаторная формула для вычисления M_3 -инварианта магнитного поля, в предположении, что магнитное поле представлено конечным объединением замкнутых тонких магнитных трубок. Мы вывели такую формулу в общем случае, но пока нам удалось ее протестировать лишь при дополнительном предположении о том, что в наборе трех попарных коэффициентов зацепления центральных линий магнитных трубок два коэффициента совпадают.

Приложения полученных результатов ожидаются весьма разнообразными, они могут быть связаны с работами [17], [18], [19], [20].

Для приложений наибольший интерес представляют исследования для инварианта M_5 , аналитическое выражение которого построено в [9], [15], [16] это планируется в последующих публикациях.

Остановимся на содержании части 1 работы. В разделе 2 сформулирована Теорема 1, которая будет доказана в части 2. В разделе 3 определяются специальные зацепления, которые представляют класс эквивалентности Δ -движений, в разделе 4 проводятся предварительные вычисления. В разделе 5 доказываются общие свойства остаточного полинома в формуле (4). В разделе 6 приводится физическая мотивировка и вводятся два инварианта: инвариант M^{line} магнитных линий и инвариант M^{tube} магнитных трубок. Инвариант M^{tube} , примененный к системе трех бесконечно-тонких магнитных трубок с нормированными магнитными потоками является искомым. В разделе 7 сформулированы краткие выводы, а в разделе 8 (Appendix) собраны некоторые полезные вспомогательные формулы.

2. Комбинаторная формула M_3 инварианта

Для $m = 3$ рассмотрим ориентированное упорядоченное зацепление $\mathbb{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Для такого зацепления определен инвариант Мелихова $\gamma(\mathbb{L})$ как в (cf. [A] Theorem 17):

$$\gamma(\mathbb{L}) = c_1(\mathbb{L})$$

$$\begin{aligned} & -((1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1) + (3, 1)(1, 2))(c_1(L_1) + c_1(L_2) + c_1(L_3)) \\ & -((3, 1) + (2, 3))(c_1(L_1 \cup L_2) - (1, 2)(c_1(L_1) + c_1(L_2))) \\ & -((1, 2) + (3, 1))(c_1(L_2 \cup L_3) - (2, 3)(c_1(L_2) + c_1(L_3))) \\ & -((2, 3) + (1, 2))(c_1(L_3 \cup L_1) - (3, 1)(c_1(L_3) + c_1(L_1))), \end{aligned}$$

где через $(i, j) = c_0(L - i \cup L_j)$ обозначены коэффициенты зацепления пар компонент L_i, L_j , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, c_1 это коэффициент в полиноме Конвея $\nabla_{\mathbb{L}}(z) = z^{m-1}(c_0 + c_1 z^2 + \dots)$ для соответствующего собственного m -компонентного подзацепления, $m = 1, 2, 3$. Полином Конвея используется как в [21], [22].

Определим инвариант $\tilde{M}(\mathbb{L})$ по формуле:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbb{L}) = & -(1, 2)(2, 3)(3, 1)\gamma(\mathbb{L}) + ((1, 2)^2(2, 3)^2\beta(L_3 \cup L_1) + \\ & + (2, 3)^2(3, 1)^2\beta(L_1 \cup L_2) + (3, 1)^2(1, 2)^2\beta(L_2 \cup L_3)), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\beta(L_i \cup L_j) = c_1(\mathbb{L}) - c_0(\mathbb{L})(c_1(L_1) + c_1(L_2)) \quad (2)$$

инвариант Сато–Левина для ориентированного 2-компонентного зацепления $\mathbb{L} = L_i \cup L_j$, $i \neq j$.

Замечание 1

Можно подставить формулу для γ в выражение (1). Получится следующая более короткая формула:

$$\begin{aligned} \tilde{M} = & -(1, 2)(2, 3)(3, 1)c_1(\mathbb{L}) + \\ & [(2, 3)(3, 1) + (1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1)] \\ & [(2, 3)(3, 1)\beta(L_1 \cup L_2) + (3, 1)(1, 2)\beta(L_2 \cup L_3) + (1, 2)(2, 3)\beta(L_3 \cup L_1)] + \\ & ((1, 2)(2, 3)(3, 1))[(1, 2)(2, 3) + \end{aligned}$$

$$(2, 3)(3, 1) + (3, 1)(1, 2)](c_1(L_1) + c_1(L_2) + c_1(L_3)). \quad (3)$$

В предположении о незаузленности компонент $\mathbb{L}$, последняя четвёртая строка в формуле (3) равна нулю, дополнительно, получится $\beta(L_i \cup L_j) = c_1(L_i \cup L_j)$.

Определение

Пусть $P((2, 3), (3, 1), (1, 2))$ — функция от попарных коэффициентов зацепления. Скажем, что P является нечетным полиномом, если $P((2, 3), (3, 1), (1, 2))$ — полином от попарных коэффициентов зацепления с нулевой четной частью. Случай $(1, 2)(2, 3)(3, 1) \geq 0$ называется правым, а случай $(1, 2)(2, 3)(3, 1) \leq 0$ называется левым.

Теорема 1

1. В предположении $(2, 1) = (3, 1)$ существует полином

$$P((2, 3), (3, 1), (1, 2)),$$

формула полинома выписана в части 2, такой, что

$$M(\mathbb{L}) = \tilde{M}(\mathbb{L}) + P((2, 3), (3, 1), (1, 2)) \quad (4)$$

является асимптотическим. Это означает, что для произвольного набора попарных коэффициентов зацепления $(3, 1), (1, 2), (2, 3)$ (при сформулированном предположении) и для произвольного вектора с ненулевыми координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (в предположении $\lambda_2 = \lambda_3$), который называется вектором витков, инвариант M удовлетворяет соотношению:

$$M(\lambda_1 L_1 \cup \lambda_2 L_2 \cup \lambda_3 L_3) = \lambda_1^4 \lambda_2^4 \lambda_3^4 M(L_1 \cup L_2 \cup L_3) \quad (5)$$

(подробное определение операции $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \mapsto \lambda_1 L_1 \cup \lambda_2 L_2 \cup \lambda_3 L_3$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2, 3$, которая называется операцией взятия кабеля, дано в разделе 6).

Общий случай трёх различных попарных коэффициентов зацепления также исследован в разделе 6 части 2 работы. Для этого случая удалось лишь доказать, что слагаемое R полинома P (см. формулу (16)) выписывается от попарных коэффициентов

зацепления в неявной форме. При этом условие $\lambda_2 = \lambda_3$ опускается.

2. Для произвольного (левого) зацепления L_{Horf} , которое называется зацеплением Хопфа и имеет отрицательные попарные коэффициенты зацепления компонент $(1, 2) = (2, 3) = (3, 1) = -1$ (определение см. в разделе 3), справедливы следующие формулы:

$$M(\mathbb{L}_{Horf}(-1, -1, -1)) = 0; \quad \tilde{M}(\mathbb{L}_{Horf}(-1, -1, -1)) = +1. \quad (6)$$

3. Комбинаторный инвариант в левой части формулы (4) совпадает с интегральным инвариантом, построенным в [A].

4. Инвариант M в формуле (4) является косозеркальным или зеркально-асимметричным. Это означает, что для симметричного зацепления (зеркальная симметрия пространства определяется как преобразование симметрии относительно выбранной плоскости проекции) значение инварианта меняется на противоположное: $M \mapsto -M$.

Замечание 2

Некоторые слагаемые интеграла, например, слагаемые при раскрытии формулы [9](23), меняют знак при нечетной перестановке номеров магнитных линий. Поэтому следует считать, что ориентированные компоненты в тройке упорядочены. Изменение порядка и ориентаций компонент не приводит к изменению значения M , например, по утверждению 3 Теоремы 1 M .

Замечание 3

Асимптотическое свойство (5) нуждается в пояснении. Изотопический класс кабельного зацепления в левой части формулы определен неоднозначно. Если представлять кабель сателлитом, то изотопический класс зависит от дополнительного параметра оснащения компонент зацепления $\mathbb{L}$ в левой части формулы, при помощи которого определяется сателлит, представляющий кабель. В [25] доказано, что левая часть формулы (5) не зависит от указанного произвола, приведем это доказательство.

При гомотопии произвольного зацепления (L_1, L_2) с точкой самопересечения pt на L_1 подскок инварианта Сато–Левина составит

$$\delta(\beta) = \text{sign}(pt)l_1l_2,$$

где $\text{sign}(pt)$ — знак точки самопересечения, l_1, l_2 — коэффициенты зацепления петель с вершиной pt компоненты L_1 с компонентой L_2 , $l_1 + l_2 = (1, 2)$.

При гомотопии произвольного зацепления (L_1, L_2, L_3) с точкой самопересечения pt на L_1 подскок γ -инварианта составит

$$\delta(\gamma) = \text{sign}(pt)(2, 3)[l_{1,2}l_{2,3}(2, 3) + l_{1,3}l_{2,2}],$$

где $\text{sign}(pt)$ — знак точки самопересечения, $l_{1,2}, l_{2,2}$ — коэффициенты зацепления ориентированных петель с вершиной pt компоненты L_1 с компонентой L_2 , $l_{1,2} + l_{2,2} = (1, 2)$; $l_{1,3}, l_{2,3}$ — коэффициенты зацепления ориентированных петель с вершиной pt компоненты L_1 с компонентой L_3 , $l_{1,3} + l_{2,3} = (3, 1)$.

Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, зацепление $(\lambda L_1, L_2, L_3)$ претерпевает гомотопию с одной точкой самопересечения pt на компоненте λL_1 , при которой возникающие петли с вершиной в точке самопересечения имеют кабельные коэффициенты m_1, m_2 ; $m_1 + m_2 = \lambda$.

Подскок суммы $(2, 3)^2(3, 1)^2\beta(\lambda L_1, L_2) + (3, 1)^2(1, 2)^2\beta(L_3, \lambda L_1)$ в формуле (1) составит:

$$\delta_\beta = 2\text{sign}(pt)(2, 3)^2(3, 1)^2(1, 2)^2\frac{m_1m_2}{\lambda^2};$$

подскок γ -слагаемого будет противоположен указанному значению, см. Appendix, Предложение A4.

Замечание 4

Стандартное (левое) зацепление Хопфа (Рис. 1) состоит из трех слоев расслоения Хопфа. Ориентация пространства при этом берется такой, чтобы все три попарных коэффициента зацепления слоев были бы равны -1 , это соответствует сопряжению голоморфных формул для расслоения Хопфа.

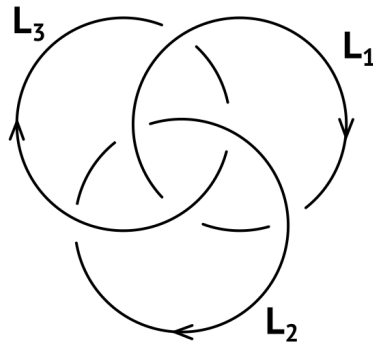


Рис. 1

Слои правого расслоения Хопфа зеркальны к слоям левого расслоения Хопфа. Сфера S^3 в этом примере выбирается в стандартной голоморфной структуре. При помощи стандартной стереографической проекции пространство $S^3 \setminus \{pt\}$ отождествляется с Евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$, что, например, для голоморфного случая позволяет записать: $L_{Hopf}(+1, +1, +1) \subset \mathbb{R}^3$.

Замечание 5

В работе [9] сформулирована гипотеза о полиноме P в формуле (4). Эта гипотеза утверждала, что формула полинома P совпадает с формулой (25) для слагаемого P_1 полинома. Гипотеза оказывается неверной, поскольку дополнительное слагаемое R , см. формулу (21)[A-S2] в частном случае $(2, 3) = (3, 1)$ и в общем случае (см. раздел 6 [A-S2]), не было учтено.

3. Специальные 2- и 3-компонентные упорядоченные ориентированные зацепления

Нам потребуется определение специального 2-компонентного зацепления $L_{Hopf}(p)$, $L_{Hopf}^{op}(-p)$ (с порядком компонент) специальное зацепление зависит от целого коэффициента $p \in \mathbb{Z}$ зацепления компонент. Специальное 3-компонентное зацепление (ориентированное, с полным порядком компонент) также потребуется, оно обозначается через $L_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))$ и изображено на Рис. 2.

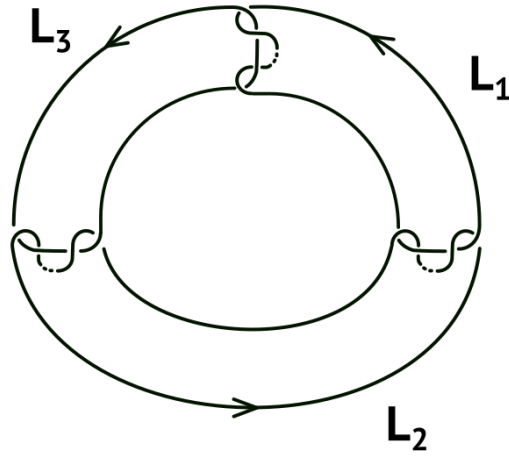


Рис. 2

Зацепление $L_{Horf}^{op}(-(3, 1))$ изображено на Рис. 3.

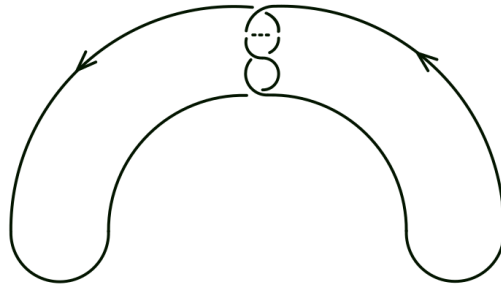


Рис. 3

Определим также 3-компонентное зацепление $L_{Horf}(p, p, p)$, изображенное на Рис. 4,

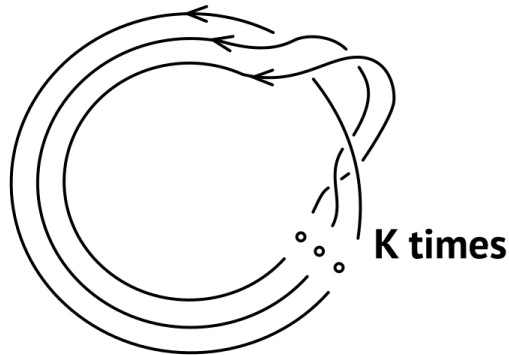


Рис. 4

которое зависит от одного общего коэффициента зацепления любой пары компонент. Зацепление $L_{Horf}(p, p, p)$ обобщается до зацепления $L_{Horf}(p, pq, pq)$, в котором компоненты L_1, L_2 расположены как у зацепления при $q = 1$, а компонента L_3 зацеплена с каждой из компонент с дополнительным параметром q подкрутки, который меняет коэффициент зацепления. Зацепление

$\mathbb{L}_{Horf}(p, pq, pq)$ совпадает с $\mathbb{L}_{Horf}(p, p, p)$ при $q = 1$, Оба зацепления используются во второй части работы.

Определим модифицированные зацепления:

$$\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2)) \mapsto \mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2)), \quad (7)$$

$$\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2)) \mapsto \mathbb{L}_0^{op(2)}(-(2, 3), (3, 1), -(1, 2)),$$

$$\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2)) \mapsto \mathbb{L}_0^{op(3)}(-(2, 3), -(3, 1), (1, 2)).$$

$$\mathbb{L}_{Horf}(p, p, p) \mapsto \mathbb{L}_{Horf}^{op(1)}(p, -p, -p). \quad (8)$$

Начнем с определения $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)$ для 2-компонентных зацеплений. Первая компонента L_1 зацепления $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)$ является стандартной окружностью, вторая компонента $-L_2 = L_2^{op}$ расположена на границе регулярной окрестности первой компоненты, эта компонента вращается $-p$ раз вокруг параллели при движении вдоль меридиана вдоль центральной линии, при этом движении вдоль меридиана идет встречное по отношению к ориентации первой компоненты. В этом определении мы предполагаем, что параллель компоненты L_2^{op} на $\mathbb{L}_{Horf}(p)$ зацеплена с L_1 с коэффициентом зацепления $-p$.

Очевидно, что зацепление $\mathbb{L}_{Horf}(p)$ получается из $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)$ посредством изменения ориентации второй компоненты. Заметим, что если ориентации обеих компонент изменить одновременно, изотопический класс зацепления $\mathbb{L}_{Horf}(p)$ сохранится. Обозначим зацепление $\mathbb{L}_{Horf}(p)$ через p . С алгебраической точки зрения, зацепление $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)$ более простое, по сравнению с $\mathbb{L}_{Horf}(p)$, поскольку $c_1(\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)) = 0$, см. Лемма 4.

Определим $\mathbb{L}_{Horf}(p, p, p)$ в левой части равенства формулы (8) как зацепление, которое получено в результате разрешения плоской окружности, оснащенной с коэффициентом самозацепления p в трехкомпонентное зацепление с попарными коэффициентами зацепления p . Для $p = 1$ определение требуется в Теореме 1, утверждение 2. Зацепление в левой части формулы (7) представлено на Рис. 2. Модификация (8) определена очевидным способом посредством обращения ориентации отмеченной компоненты, помеченной нижним индексом. Для модификации (7) определение аналогично.

Определим зацепления

$$\Phi_{Hopf}^R((3, 1), (2, 3), (1, 2)), \quad \mathbb{L}_{Hopf}^L((3, 1), (2, 3), (1, 2)),$$

которые неизотопны друг другу и которые Δ -эквивалентны зацеплению $\mathbb{L}_0((3, 1), (2, 3), (1, 2))$. Посредством композиции зеркальной симметрии (относительно плоскости) и изменения ориентации ориентаций компонент (композиция преобразований (8) по каждой компоненте) зацепление $\Phi_{Hopf}^R((3, 1), (2, 3), (1, 2))$ преобразуется в зацепление $\Phi_{Hopf}^L(-(3, 1), -(2, 3), -(1, 2))$.

Зацепление $\Phi_{Hopf}^R((3, 1), (2, 3), (1, 2))$ представлено на Рис. 5.

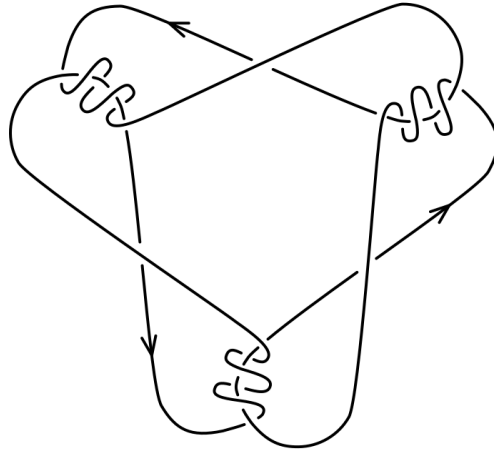


Рис. 5

Зацепление $\Phi_{Hopf}^L(-(3, 1), -(2, 3), -(1, 2))$ представлено на Рис. 6.

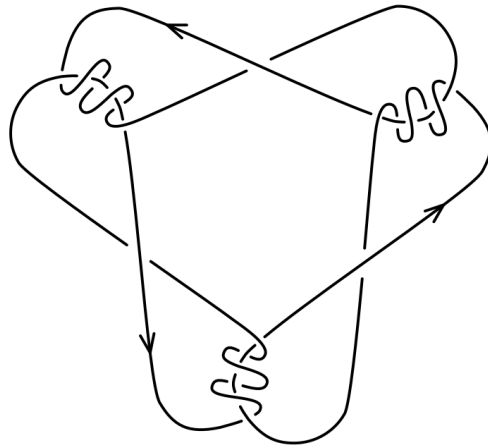


Рис. 6

Изотопия от зацепления $\Phi_{Hopf}^R((3, 1), (2, 3), (1, 2))$ к зацеплению $\Phi_{Hopf}^{L;op(1+2+3)}((3, 1), (2, 3), (1, 2))$ определена посредством вращения

зацепления на угол π относительно центральной окружности полнотория (магнитной трубки), который содержит компоненты зацепления.

Композиция отражения с рассмотренной изотопией, в результате которой ориентация компонент обращается определяет преобразование исходного зацепления $\Phi_{Horf}^R((3, 1), (2, 3), (1, 2))$ в зацепление $\Phi_{Horf}^L(-(3, 1), -(2, 3), -(1, 2))$.

4. Вычисление инвариантов Конвея для специальных зацеплений

Следующая лемма о коэффициенте $c_1(\mathbb{L})$ полинома Конвея для двухкомпонентных зацеплений $\mathbb{L} = L_1 \cup L_2$. Если компоненты L_1, L_2 незаузлены, по соотношению (2) получим: $c_1(\mathbb{L}) = \beta(\mathbb{L})$.

Лемма 3

Инвариант Сато–Левина, определяемый формулой (2), вычисляется по следующей формуле:

$$\beta(\mathbb{L}_{Horf}(p)) = \frac{(p+1)p(p-1)}{6}. \quad (9)$$

Доказательство Леммы 3

Мы представим два разных доказательства.

Доказательство 1.

Вычислим левую часть формулы (9), используя полином Конвея. Это доказывает, что значение $\beta(\mathbb{L}_{Horf}(p))$ является полиномом степени 3 переменной p . Для $p = -1, 0$, или $+1$, получим: $\beta(\mathbb{L}_{Horf}(p)) = 0$ и $\beta(\mathbb{L}_{Horf}(2)) = 1$. Равенство (9) является единственно возможным.

Доказательство 2.

Вместе с зацеплением $\mathbb{L}_{Horf}(p)$ рассмотрим зацепление

$$\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p).$$

Как мы заметили выше, это влечёт равенство: $c_1(\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)) = 0$. Компоненты зацепления $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)$ являются незацепленными и

в соответствии с формулой (2) получится: $\beta(\mathbb{L}_{Horf}^{op}(-p)) = 0$. Формула (9) является специальным случаем формулы для зацепления с измененной ориентацией одной из компонент. Общая формула для такого преобразования доказана в работе [26]. $\square$

Лемма 4

Выполнены следующие уравнения:

$$\gamma(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))) = 0, \quad (10)$$

$$\tilde{M}(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))) = 0.$$

Доказательство Леммы 4

Докажем первое уравнение. Компоненты зацепления

$$\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))$$

являются незаузленными и собственное 2-компонентное подзацепления суть зацепления $\mathbb{L}_{Horf}^{op}(k)$, для $p = (2, 3), p = (3, 1), p = (1, 2)$, для которых $c_1(\mathbb{L}_{Horf}^{op}(p)) = 0$. Следовательно, для инварианта Мелихова выполнены следующие равенства:

$$\gamma(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))) = c_1(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))).$$

Начнём разузливать зацепление, уменьшая коэффициент зацепления $(1, 2)$ до нуля, используя деформацию с пересечением компонент L_1, L_2 . Следующий шаг распутывания выглядит аналогично, но при этом коэффициент $(1, 2)$ оказывается на 1 меньше по абсолютному значению. Требуемое равенство докажется по индукции.

Используем скейн-соотношение для полинома Конвея. При каждом пересечении компонент L_1 и L_2 возникает особая компонента, которую мы обозначаем как первую компоненту зацепления $L_1 \sharp L_2 \cup L_3$, число компонент при этом уменьшается с 3 до 2, причем подскок значения $c_1(\mathbb{L})$ определяется значением $c_1(L_1 \sharp L_2 \cup L_3)$. Но $L_1 \sharp L_2 \cup L_3 = \mathbb{L}_{Horf}^{op}((1, 3) + (2, 3))$. Поскольку $c_1(\mathbb{L}_{Horf}^{op}(p)) = 0, p \in \mathbb{Z}$, получается требуемый шаг индукции.

База индукции записывается следующим равенством:

$$c_1(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), 0)) = 0.$$

Это равенство может быть доказано аналогичным способом. Используем дополнительную индукцию, при которой абсолютное значение коэффициента $(2, 3)$ уменьшается до нуля. Каждый шаг этой дополнительной индукции аналогичен шагу основной индукции; база дополнительной индукции вытекает из того, что для трехкомпонентного зацепления полученного из $\mathbb{L}_{Hopf}^{op}((3, 1))$ добавлением компоненты L_3 , значение c_1 становится нулевым. Наконец, база вспомогательной индукции вытекает из равенства $c_1(\mathbb{L}_0(0, (3, 1), 0)) = 0$, которое следует из того, что зацепление $\mathbb{L}_0(0, (3, 1), 0)$ имеет незаузленную компоненту L_2 в шаре, который не пересекает компоненты L_1, L_3 .

Второе равенство следует из формул:

$$\beta(\mathbb{L}_{Hopf}^{op}(p)) = 0, \quad c_1(\mathbb{L}_{Hopf}^{op}(p)) = 0.$$

□

Рассмотрим 3-компонентное зацепление $\mathbb{L}_{Hopf}(-1, -1, -1)$, которое используется в Теореме 1. Это зацепление изображено на Рис. 1, кроме того, это специальный случай зацепления, изображенного на Рис. 4.

Лемма 5

Справедливо следующее уравнение:

$$\gamma(\mathbb{L}_{Hopf}(-1, -1, -1)) = +1.$$

Доказательство Леммы 5

Как и при доказательстве Леммы 3 мы будем развязывать компоненты L_2, L_3 зацепления $\mathbb{L}_{Hopf}(-1, -1, -1)$ деформацией с пересечением до тех пор, пока эти компоненты не окажутся незацепленными. Обозначим процесс развязывания через

$$\mathbb{L}_{Hopf}(-1, -1, -1) \mapsto \mathbb{L}_{Hopf}(0, -1, -1).$$

Выполнено следующее уравнение: $c_1(\mathbb{L}_{Hopf}(0, -1, -1)) = 0$, которое доказано в Лемме 3.

При одном пересечении компонент L_1 и L_2 возникает особое зацепление, которое обозначается через $L_1 \sharp L_2 \cup L_3$. Скачѣк значения $c_1(\mathbb{L})$ определѣн значением $-c_1(L_1 \sharp L_2 \cup L_3)$, поскольку знак особой точки при пересечении отрицательный.

Но $L_1 \sharp L_2 \cup L_3 = \mathbb{L}_{Horf}(-2)$. Поскольку в соответствии с Леммой 4 выполнено уравнение $c_1(\mathbb{L}_{Horf}(-2)) = -1$, мы получим требуемое. $\square$

Рассмотрим зацепление $\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))$ и модифицируем это зацепление:

$$\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2)) \mapsto \mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2)).$$

Для инварианта M , определенного в [9], будет выполнено соотношение:

$$M(\mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1), (1, 2))) = M(\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2))). \quad (11)$$

Вычислим значение $\tilde{M}$ модифицированного зацепления.

Лемма 6

Выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2))) = & \quad (12) \\ & + \frac{1}{3}(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (3, 1)] \\ & + \frac{1}{6}(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbb{L}_0^{op(2+3)}(-(2, 3), (3, 1), (1, 2))) = & \quad (13) \\ & + \frac{1}{3}(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (3, 1)] \\ & + \frac{1}{6}(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1)], \end{aligned}$$

где зацепление $\mathbb{L}_0^{op(2+3)}(-(2, 3), (3, 1), (1, 2))$ получено из

$$\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2))$$

при помощи изменения ориентации компоненты L_1 .

Следствие 7

Для произвольного зацепления $\mathbb{L}$ с попарными коэффициентами зацепления $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ выполнено соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1)}) - \tilde{M}(\mathbb{L}) = \\ + \frac{1}{3}(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (3, 1)] \\ + \frac{1}{6}(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство Леммы 6

Докажем формулу:

$$\begin{aligned} 6c_1(\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2))) = \\ -(2, 3)[((1, 2) + (3, 1))^3 - ((1, 2) + (3, 1))] \\ + (1, 2)[(1, 3)^3 - (1, 3)] + (3, 1)[(1, 2)^3 - (1, 2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Будем расцеплять компоненты L_2, L_3 гомотопией с пересечением, предполагая, что обе компоненты незаузлены. На следующем шаге, если $(2, 3) \neq 0$, мы получим зацепление того же типа, коэффициент зацепления которого $(2, 3)$ на 1 меньше по абсолютному значению. База индукции дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} 6c_1(\mathbb{L}_0^{op(1)}(0, -(3, 1), -(1, 2))) = \\ = (1, 2)[(1, 3)^3 - (1, 3)] + (3, 1)[(1, 2)^3 - (1, 2)]. \end{aligned}$$

Соотношение доказывается аналогично Лемме 4. Рассмотрим гомотопию зацепления $\mathbb{L}_0^{op(1)}(0, -(3, 1), -(1, 2))$, разузливая компоненты L_1 и L_3 , причем носитель деформации выберем внутри шара, который содержит компоненту L_2 . Гомотопия имеет $(3, 1)$ особых точек (мы предположили, что коэффициент зацепления положительный, а в общем случае особые точки будут миметь отрицательный знак). В результате такой гомотопии мы получим зацепление $\mathbb{L}_0^{op(1)}(0, 0, -(1, 2))$, для которого $c_1(\mathbb{L}_0^{op(1)}(0, 0, -(1, 2))) = 0$. Значение $c_1(\mathbb{L}_0^{op(1)}(0, -(3, 1), -(1, 2)))$

вычислено суммой таких значений по всем 2-компонентным зацеплениям $\mathbb{L}(i) = L_2 \cup L_3 \sharp L_1(i)$, которые возникают в процессе гомотопии.

Выполнено следующее равенство: $c_1(\mathbb{L}(i)) = (3, 1)c_1(L_3 \sharp L_1(i)) + c_1(\mathbb{L}_{Horf}((1, 2)))$, которое можно доказать вычислением $\beta(\mathbb{L}(i)) = \beta(\mathbb{L}_{Horf}((1, 2)))$ с использованием формулы: $c_1(\mathbb{L}(i)) = \beta(\mathbb{L}(i)) - (3, 1)c_1(L_3 \sharp L_1(i))$. С другой стороны:

$$\sum_i c_1(L_3 \sharp L_1(i)) = \beta(\mathbb{L}_{Horf}(3, 1)) = c_1(\mathbb{L}_{Horf}((3, 1))).$$

Этого достаточно, если использовать формулу (9), получим формулу (16) для базы индукции.

На каждом шаге индукции рассмотрим зацепление: $-L_1 \cup L_2 \sharp L_3 = \mathbb{L}_{Horf}(-(1, 2) - (3, 1))$, для которого выполнена формула (9), получится: $6c_1(\mathbb{L}_{Horf}(-(1, 2) - (3, 1))) = -((1, 2) + (3, 1))^3 - ((1, 2) + (3, 1))$. Уравнение (15) доказано.

Вычислим значения оставшихся коэффициентов полинома Конвея, которые входят в формулу γ . Очевидно, что $c_1(L_1) = c_1(L_2) = c_1(L_3) = 0$, $c_1(L_2 \cup L_3) = 0$. Мы получим: $6c_1(-L_1 \cup L_2) = -((1, 2)^3 - (1, 2))$, $6c_1(-L_3 \cup L_1) = -((3, 1)^3 - (3, 1))$. Вычислим значение $6\gamma(\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2)))$. Получим:

$$\begin{aligned} & - (2, 3)[((1, 2) + (3, 1))^3 - ((1, 2) + (3, 1))] + (1, 2)[(1, 3)^3 - (1, 3)] + \\ & + (3, 1)[(1, 2)^3 - (1, 2)] + (-(3, 1) + (2, 3))[(1, 2)^3 - (1, 2)] + \\ & + ((2, 3) - (1, 2))[(3, 1)^3 - (3, 1)] = \\ & = - (2, 3)[((1, 2) + (3, 1))^3 - ((1, 2) + (3, 1))] + (2, 3)[((3, 1)^3 - (3, 1))] + \\ & + (2, 3)[(1, 2)^3 - (1, 2)] = -3(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2) + (3, 1)]. \end{aligned}$$

Вычислим значение $6\tilde{M}(\mathbb{L}_0^{op(1)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2)))$. Получим:

$$\begin{aligned} & 3(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (3, 1)] - (2, 3)^2(2, 1)^2[(3, 1)^3 - (3, 1)] - \\ & - (2, 3)^2(2, 1)^2[(1, 2)^3 - (1, 2)]. \end{aligned}$$

Это выражение пропорционально с коэффициентом $\frac{1}{6}$ левой части формулы (14). Это доказывает формулу (12).

Для доказательства формулы (13) вспомним, что при зеркальном преобразовании моменты коэффициента зацепления нечетной степени в формуле $\tilde{M}$ меняют знак. Лемма 6 доказана. $\square$

5. Общие замечания о полиноме (4)

Интегральный инвариант $M(\mathbb{L})$ является симметрическим по отношению к четной (циклической) транспозиции порядка компонент и кососимметрическим, если одновременно поменять порядок какой-либо пары компонент и применить зеркальную симметрию пространства.

Отсюда вытекает, что полином P должен выражаться как сумма однородных симметрических полиномов нечётных степеней:

$$\begin{aligned} P((2, 3), (3, 1), (1, 2)) &= \\ &= P_1((2, 3), (3, 1), (1, 2)) + R((2, 3), (3, 1), (1, 2)), \end{aligned} \quad (16)$$

где полином $P_1((2, 3), (3, 1), (1, 2))$ состоит из слагаемых типа (18) нечётных степеней и задан уравнением (25). Полином

$$R((2, 3), (3, 1), (1, 2))$$

состоит из слагаемых нечётных степеней типа (21) ниже и будет определён в части 2.

Оба полинома в формуле (16) представлены суммой элементарных мономов:

$$P((2, 3), (3, 1), (1, 2)) = \sum_{i=0}^N p_i((2, 3), (3, 1), (1, 2)). \quad (17)$$

Типы мономов перечислены ниже. Полином P_1 содержит мономы типа S_1 , полином R содержит мономы типов S_1, S_2 .

Мономы в симметрическом полиноме могут иметь вид

$$(1, 2)^i (2, 3)^j (3, 1)^k,$$

где априори возможны следующие два случая (с точностью до циклической перестановки).

Случай S_1 , Подслучай А

$$i = 1, j = 0, k = 0 \pmod{2}. \quad (18)$$

Случай S_1 , Подслучай В

$$i = 1, j = 1, k = 1 \pmod{2}. \quad (19)$$

Случаи

$$i = 0, j = 0, k = 0 \pmod{2}; \quad (20)$$

$$i = 1, j = 1, k = 0 \pmod{2}. \quad (21)$$

соответствуют четным мономам и не рассматриваются.

Лемма 8

Если по крайней мере один коэффициент из полного набора $(2, 3), (3, 1), (1, 2)$ обращается в ноль: $(2, 3)(3, 1)(1, 2) = 0$, то полином P_1 обращается в ноль тождественно.

Следствие 9

Из Леммы 8 первые три слагаемых в (17) для $i = 0, 1, 2$ обращаются в ноль.

Доказательство Леммы 8

Если два из трёх коэффициентов обращаются в ноль,

$$(1, 2)^2(2, 3)^2 + (2, 3)^2(3, 1)^2 + (3, 1)^2(1, 2)^2 = 0,$$

то инвариант $\tilde{M}(\mathbb{L})$ в правой части формулы (4) обращается в ноль. Но в этом случае интегральный инвариант $M(\mathbb{L})$ также равен нулю, как следует из [9], [14].

Если и только если один из коэффициентов зацепления обращается в ноль, а два другие не равны нулю, получится:

$$(1, 2)^2(2, 3)^2 + (2, 3)^2(3, 1)^2 + (3, 1)^2(1, 2)^2 \neq 0, \quad (1, 2)(2, 3)(3, 1) = 0.$$

Скажем, для определенности, $(1, 2)(2, 3) \neq 0$. Тогда используя формулу (4), получим:

$$\tilde{M}(\mathbb{L}) = (1, 2)^2(2, 3)^2\beta(L_1 \cup L_3).$$

Но в этом случае, согласно [14], также получится:

$$M(\mathbb{L}) \simeq (1, 2)^2(2, 3)^2\beta(L_1 \cup L_3).$$

Более того, нормирующий коэффициент в этом уравнении не зависит от значения полинома $R((2, 3), (3, 1), (1, 2))$, поскольку в случае $(3, 1) = 0$ полином тождественно нулевой. $\square$

Инвариант $\tilde{M}^{av}$

Предположим, что $\mathbb{L}$ является зацеплением с предписанными попарными коэффициентами зацепления $(2, 3), (3, 1), (1, 2)$ и предположим, что

$$k = (2, 3)(3, 1)(1, 2) \neq 0. \quad (22)$$

Определим модификацию $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{av}$ of $\mathbb{L}$. В частности, модификация $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{av}$ используется в случае, когда $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0((2, 3), (3, 1)(1, 2))$ является специальным зацеплением.

Применим модификацию (7):

$$\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{op(1)}(-(2, 3), -(3, 1), (1, 2)), \quad \mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{op(2)}((2, 3), -(3, 1), -(1, 2)), \quad (23)$$

$$\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{op(3)}(-(2, 3), (3, 1), -(1, 2)), \quad \mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{op(1+2+3)}((1, 2), (2, 3), (3, 1)).$$

Эта модификация не сохраняет класс изотопии зацепления. Набор зацеплений в правой части формулы (17) является орбитой группы Клейна:

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{\mathbf{e}, op(1+2), op(2+3), op(3+1)\},$$

которая действует на зацеплении $\mathbb{L}$ изменением ориентации на соответствующих парах компонент. Существует 2 орбиты, каждая орбита содержит 4 зацепления.

Определим среднее значение по формуле:

$$\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}) = \frac{1}{4}[\tilde{M}(\mathbb{L}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(3+1)}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1+2)}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(2+3)})]. \quad (24)$$

Лемма 10

Рассмотрим следующий полином:

$$\begin{aligned} P_1((2, 3), (3, 1), (1, 2)) = & \quad (25) \\ & + \frac{1}{6}(1, 2)^2(2, 3)^2(3, 1)^2[(1, 2) + (2, 3) + (3, 1)] \\ & + \frac{1}{12}(1, 2)(2, 3)(3, 1)[(1, 2)(2, 3) + (2, 3)(3, 1) + (3, 1)(1, 2)]. \end{aligned}$$

Тогда для произвольного зацепления $\mathbb{L}$ справедлива следующая формула:

$$\tilde{M}(\mathbb{L}) + P_1 = \tilde{M}^{av}(\mathbb{L}). \quad (26)$$

Инвариант (24) является инвариантом неориентированных зацеплений.

Доказательство Леммы 10

Поскольку $\tilde{M}$ определен на основе полинома Конвея, который не меняется при изменении ориентации всех компонент зацепления, получится:

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1+2+3)}) &= \tilde{M}(\mathbb{L}); & \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1)}) &= \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(2+3)}); \\ \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(2)}) &= \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(3+1)}); & \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(3)}) &= \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1+2)}).\end{aligned}\quad (27)$$

Чтобы доказать формулу (26) используем свойство:

$$\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}^{op(1+2+3)}) = \tilde{M}^{av}(\mathbb{L})$$

и рассмотрим ниже формулу (28), которая эквивалентна формуле (24):

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}^{op(1+2+3)}) &= \\ &= \frac{1}{4} [\tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1+2+3)}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(3)}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1)}) + \tilde{M}(\mathbb{L}^{op(2)})].\end{aligned}\quad (28)$$

Применим формулу (28) для специального зацепления $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$ и поменяем в правой части формулы слагаемое $\tilde{M}(\mathbb{L}^{op(1+2+3)})$ на $\tilde{M}(\mathbb{L})$. Формула (14) применяется для каждого из трех остаточных слагаемых в правой части; в Лемме 4 доказано, что первое слагаемое в правой части формулы (14) равно нулю. В этом случае $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$ и формула (26) доказана.

Общий случай доказан применением последовательности Δ -движений к специальному зацеплению $\mathbb{L}_0$. Посредством элементарного Δ -движения обе части формулы (26) изменяются на одинаково.

Понятие Δ -движение введено в работе [23] и широко используется в аналогичных нашей задачах, например, в [24]. В левой части формулы имеется лишь первое слагаемое и его подскок компенсируется подскоком четырех слагаемых в правой части формулы. Лемма 10 доказана. $\square$

6. Магнитные линии, магнитные трубки и зацепления

Мы проанализируем связь и различие понятий магнитной линии, магнитной трубки и зацепления, поскольку это приводит к различию в определении M -инварианта.

Под 3-компонентным зацеплением часто понимается одномерное ориентированное подмногообразие из трёх стандартных окружностей в $\mathbb{R}^3$, компоненты которого упорядочены. В другом определении требуется зафиксировать параметризацию этого подмногообразия, т.е. считать, что зафиксировано вложение упорядоченного набора трёх дизъюнктивных окружностей в $\mathbb{R}^3$. Первому определению соответствует понятие зацепления трёх магнитных трубок, а второму соответствует понятие тройки магнитных линий.

В определении магнитной трубки требуется рассматривать магнитное поле (бездивергентное векторное поле) внутри тонкого полнотория, окружающего зацепление (как подмногообразие), предполагая, что магнитное поле направлено всюду вдоль магнитной линии и касается границы каждого тонкого полнотория. При этом разница между магнитной линией и узлом (компонентой зацепления) состоит в том, что для магнитной трубки определен дополнительная характеристика – магнитный поток через трансверсальное сечение трубки. Поэтому для магнитных трубок U_i, U_j коэффициенты попарного зацепления (i, j) , вообще говоря, могут принимать произвольные вещественные значения.

Магнитные линии используются, в частности, для описания поведения магнитного поля внутри трубки, которое характеризуется отображением Пуанкаре трансверсального сечения в себя. В рамках нашего рассмотрения предполагается, что каждая магнитная линия в наборе трех линий замкнута. В этом случае различие между тройкой магнитных линий и параметризованным трехкомпонентным зацеплением в том, что магнитная длина магнитной линии может быть произвольной, а длина параметризации компоненты зацепления всегда нормирована. По магнитной линии можно построить магнитную трубку, предполагая, что линия снабжена полем бесконечно-тонких дисков в трансверсальном сечении, а сама линия получается предельным переходом, когда утолщение стремиться к нулю, при сохранении магнитного потока.

Под λ -кабелем магнитной трубки понимается продолжение λ -кратного кабеля центральной магнитной линии трубки. При взятии кабеля результат условно объединяется в большую объ-

емлющую магнитную трубку, для которой магнитный поток в λ раз больше магнитного потока исходной магнитной трубки. При этом $\lambda \in \mathbb{Z}$ — целое, при $\lambda = -1$ магнитная трубка сама не меняется, меняется лишь направление магнитного поля внутри трубки или, эквивалентно, меняется ориентация центральной линии трубки на противоположную.

Понятие λ -кабеля магнитной линии предполагает, что $\lambda \in \mathbb{R}_+$ — вещественный положительный параметр, происходит умножение параметризации магнитной линии в λ раз. Формально, параметр λ может быть и отрицательным, но это приведет к усложнению формулировок. Если рассматривать понятие магнитной линии в контексте компоненты зацепления с параметризацией, то $\lambda \in \mathbb{N}$ следует предполагать целым неотрицательным. Старую параметризацию магнитной линии приходится помнить, поскольку удобно видеть параметр λ как магнитную длину старой магнитной линии в ее новой параметризации.

Перейдем к M -инварианту, который первоначально строится для зацепления из магнитных трубок и применяется к зацеплению из магнитных линий. Пусть $\mathbb{L}$ -трехкомпонентное зацепление, построенное для трех замкнутых магнитных линий. Предполагается, что магнитный параметр на магнитной линии совпадает с параметром, определяющим зацепление. Переформулируем асимптотическое свойство M -интеграла в терминах свойства инварианта конечного порядка для зацепления.

Обозначим искомый комбинаторный инвариант зацеплений через M^{line} . По конструкции M -интеграла асимптотический инвариант M^{line} следует определить так. Рассмотрим кабель $\mathbb{L}_{norm} = ((2, 3)L_1, (3, 1)L_2, (2, 3)L_1)$. Определим главное значение

$$M^{line}(L_1, L_2, L_3) = \tilde{M}(\mathbb{L}_{norm}) + \dots \quad (29)$$

(это рациональный инвариант, построенный на основе инварианта конечного типа). Оценим асимптотику инварианта M^{line} по формуле:

$$\begin{aligned} \lambda^s M(\lambda L_1, L_2, L_3) &= \\ &= \tilde{M}(\mathbb{L}_{norm}(\lambda L_1, L_2, L_3)) + T((\lambda \cdot 1, 2), (2, 3), (3, \lambda \cdot 1)), \end{aligned} \quad (30)$$

где T -подходящий многочлен, который предполагается зависит

лишь от значений k, λ (см. (22)). (Во второй части работы вычислениями докажем, что $T = 0$). В левой части равенства стоит интеграл, в правой комбинаторный инвариант конечного типа.

Вычислим показатель s в правой части уравнения (30), чтобы асимптотика интеграла совпала с асимптотикой комбинаторного инварианта. В левой части стоит сумма неизвестного полинома от попарных коэффициентов зацепления и комбинаторного инварианта, значение которого по λ вдоль каждой магнитной линии имеет асимптотику λ^4 . Чтобы искомая формула существовала, необходимо предположить, что асимптотика коэффициента зацепления (и любого момента от от коэффициента зацепления) по λ вдоль каждой из двух зацепляемых магнитных линий равна λ^2 (но не λ , как требуется у асимптотического эргодического инварианта Хопфа). Условимся, что при вычислении первого (главного) слагаемого в формуле (30) зацепление $\mathbb{L}_{norm}(\lambda L_1, L_2, L_3)$ используется как нормализация зацепления $(\lambda L_1, L_2, L_3)$, а второе полиномиальное слагаемое в формуле (30) понимается в алгебраическом смысле и вычисляется по нормализации зацепления $\mathbb{L}_{norm}$ при λ -кабеле каждой его компоненте. Тем самым, асимптотика первого слагаемого в правой части по λ составит λ^{4+4+4} , где показатели в сумме указаны по номеру компоненты.

Параметр k представлен асимптотическим коэффициентом зацепления пары магнитных линий (с любыми номерами), каждая магнитная линия пары имеет длину порядка λ , по нашему соглашению об асимптотике коэффициентов зацепления получится $k(\lambda) \sim \lambda^{12}$. Следовательно, параметр $s = 8$ в левой части равенства (30).

Перейдём к описанию комбинаторного инварианта зацеплений, соответствующего M -инварианту магнитных трубок. Обозначим такой инвариант через M^{tube} . Выберем $\sqrt{k^2}$ положительный корень уравнения $(\sqrt{k})^2 = |k|$ (сейчас для простоты предполагается, что зацепление $\mathbb{L}$ правое с положительными попарными коэффициентами зацепления). Предположим, что зацепление $\mathbb{L}$ таково, что каждая его компонента L_i является кабелем соответствующей кратности над компонентой с номером i вспомогательного зацепления $\mathbb{L}^\odot$ у которого попарные

коэффициенты зацепления $\sqrt{(i+1, i+2)}$. Применим к зацеплению $\mathbb{L}^\odot$ операцию нормализации, результат обозначим через $\mathbb{L}_{norm}^\odot$. К зацеплению $\mathbb{L}_{norm}^\odot$ применим кабель кратности $\sqrt[4]{k}$ по каждой компоненте. В результате получится зацепление $\mathbb{L}_{norm}$, нормализация зацепления $\mathbb{L}$, поскольку два кабеля зацепления $\mathbb{L}^\odot$ перестановочны (значение M -инварианта не зависит от представления кабеля).

Определим главное значение

$$M^{tube}(\lambda L_1, L_2, L_3) = \tilde{M}(\mathbb{L}^{norm}) + \dots \quad (31)$$

Будем искать рациональный инвариант $M^{tube}(\mathbb{L})$ по формуле:

$$\begin{aligned} & \lambda^s M(\lambda L_1, L_2, L_3) = \\ & = \tilde{M}(\mathbb{L}^{norm}(\lambda L_1, L_2, L_3)) + W((1, 2), (2, 3), (3, 1)) = M^{tube}(\mathbb{L}), \end{aligned} \quad (32)$$

где W -подходящий многочлен, который ищем зависимым лишь от k . В левой части равенства стоит интеграл, в правой комбинаторный инвариант конечного типа.

Вычислим значение показателя s в левой части равенства (32). Асимптотика коэффициента зацепления каждой компоненты здесь обычная $\sim \lambda$, как у асимптотического инварианта хопфа. Поскольку $k \sim \lambda^2$, то $\deg(W) = 2 + \frac{s}{2}$. Переход от $\mathbb{L}^\odot$ к $\mathbb{L}_{norm}^\odot$ имеет показатель $\lambda^{10} = \lambda^4 \lambda^6$, поскольку показатель $\sqrt[4]{k}$ -кабеля по каждой компоненте равен λ^6 , а показатель нормализации $\mathbb{L}^\odot \mapsto \mathbb{L}_{norm}^\odot$ равен λ^4 . Поэтому $s = 5$ и $\deg(W) = 7$.

7. Выводы и обсуждения

В первой части работы проделаны предварительные вычисления. Вычислено первое слагаемое в формуле (16), которое определено полиномом от попарных коэффициентов зацепления компонент. Этот полиномиальное слагаемое обозначается через P_1 и характеризуется условием: при изменении ориентации компонент зацепления значение инварианта в правой части формулы (4) не меняется. Слагаемое P_1 совпало с полиномом, который был выписан в [9]. Слагаемое R полинома P вычислено во второй части работы.

8. Appendix

Предложение A1

Пусть $\mathbb{L}$ –произвольное зацепление с $k(\mathbb{L}) \neq 0$. Предположим, что имеется два различных инварианта M, M' конечного типа. Для упрощения доказательства предположим, что оба инварианта определяются интегралами по конечнократному конфигурационному пространству зацепления (это предположение не ограничивает общности, как доказано в [9], M -инвариант этим свойством обладает), которые имеют равные подскоки при Δ -движениях на одной и двух компонентах зацепления $\mathbb{L}$. Тогда подскок инвариантов M, M' при произвольном Δ -движении зацепления $\mathbb{L}$, в том числе на трех компонентах, совпадает.

Следствие A2

Разность $M - M'$ зависит только от попарных коэффициентов зацепления $\mathbb{L}$, поскольку инварианты конечного типа, зависимость $M - M'$ от попарных коэффициентов зацепления задается полиномом.

Доказательство Предложения A1

Для интересующего нас случая подскока $\tilde{M}$ -инварианта при Δ -движении на одной компоненте не происходит. Рассмотрим Δ -движение A зацепления $\mathbb{L}$ (предполагая, что $k(\mathbb{L}) \neq 0$) и включим это движение в длинную косу, состоящую из последовательных треугольников для Δ -движений, которые чередуются с зеркальными треугольниками. Движение $\{A_i\}$ как первое движение в серии: $A = A_1$. С одной стороны, поскольку M, M' – инварианты, значения которых вычисляется как кратный интеграл по некоторому конечному пространству конфигураций, и при этом класс изотопии зацепления при любом количестве Δ -движений последовательности не зависит от номеров треугольников, на которых движение происходит, а зависит лишь от их числа, то значение $M - M'$ имеет нулевые конечные разности в последовательности A_i , начиная с некоторого конечного порядка

разностей. Поскольку значение $M - M'$ зависит лишь от числа Δ -движений в последовательности, определяющей разности, но не зависит от порядковых номеров движений, то $M - M'$ зависит полиномиально от числа Δ -движений в последовательности.

Заметим, что при достаточно длинной косе, $M - M'$ является периодической функцией от числа Δ -движений. Действительно, по классификационной теореме для трехкомпонентных зацеплений, с точностью до гомотопии, или, что эквивалентно, с точностью до Δ -движений с ветвями на двух и одной компоненте, число таких зацеплений конечно и классифицируется вычетом по конечному модулю инварианта μ_{123} , который при Δ -движении с ветвями на трех компонентах подскакивает на ± 1 , в зависимости от локального типа движения.

Итак, для произвольной подпоследовательности Δ -движений в количестве $g = \gcd((1, 2); (2, 3); (3, 1))$, подскок инварианта $M - M'$ равен нулю, поскольку преобразование зацепления в результате такой подпоследовательности представляет собой связную сумму с зацеплением из g -кратных колец Борромео, а такое преобразование зацеплений раскладывается в композицию элементарных Δ -движений с ветвями на 1 или на 2 компонентах зацепления, на каждом из которых подскоки инвариантов M, M' одинаковые. Поэтому $M - M'$ не подскакивает ни на каком Δ -движении рассматриваемой серии (и в том числе, на движении $A = A_1$), поскольку полином от переменной i не может иметь сколь угодно большое число корней. Предложение A1 доказано. $\square$

Предположим, что зацепление $L^\odot$ является центром кабеля с вектором витков $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ для зацепления L^{cable} . Обозначим через $\tilde{M}^\odot$ инвариант, определенный по формуле (1), вычисляемый для $L^\odot$, но при этом в формуле подставлены попарные коэффициенты зацепления L^{cable} . Пусть при Δ -движении зацепления $L^\odot$ подскок инварианта $\tilde{M}(L^\otimes)$ составляет $\delta^\otimes = \delta_\gamma^\otimes + \delta_\beta^\otimes$. Пусть для определенности, сингулярное движение содержит две ветви на компоненте $L_1^\odot$ и одну ветвь на компоненте $L_2^\odot$. Рассмотрим индуцированное Δ -движение кабеля и обозначим через $\delta_\gamma^{cable} + \delta_\beta^{cable} = \delta^{cable}$ суммарный подскок, составленный из

$\lambda_1^2 \lambda_2$ элементарных Δ -движений значения $\tilde{M}(\mathbb{L}^{cable})$ -инварианта. В вышеприведенных формулах нижним индексом γ обозначен подскок первого слагаемого в $\tilde{M}(\mathbb{L}^{cable})$, а нижним индексом β обозначен подскок соответствующего второго слагаемого в формуле (1).

Предложение А3

1. Подскоки δ^{cable} , $\delta^\otimes$ связаны формулой:

$$\delta_\gamma^{cable} = \lambda_1^4 \lambda_2^4 \lambda_3^4 \delta_\gamma^\otimes; \quad (33)$$

$$\delta_\beta^{cable} = \lambda_1^4 \lambda_2^4 \lambda_3^4 \delta_\beta^\otimes. \quad (34)$$

2. Если в формулу $\tilde{M}(\mathbb{L}^\odot)$ вместо попарных коэффициентов зацепления $\mathbb{L}^\odot$ подставить попарные коэффициенты зацепления $\mathbb{L}^{cable}$, то подскок $\delta_\gamma^{\odot;cable} + \delta_\beta^{\odot;cable}$ так определенного инварианта при том же Δ -движении связан с подскоком инварианта δ^{cable} формулой:

$$\delta_\gamma^{cable} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \delta_\gamma^{\odot;cable}; \quad (34)$$

$$\delta_\beta^{cable} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \delta_\beta^{\odot;cable}. \quad (35)$$

Доказательство Предложения А3

Мы докажем Утверждение 2, поскольку Утверждение 1 из этого утверждения также вытекает. Рассмотрим случай Δ -движения зацепления $\mathbb{L}^\odot$ на компонентах L_1 (двукратной) и L_2 . Предположим, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \neq 0$, поскольку переход к более общему случаю не вызывает затруднений.

Вычислим $\delta_\gamma^{\odot;cable}$. До взятия кабеля на компоненте L_1 были две петли $L_{+,1}, L_{-,1}$, коэффициенты зацепления этих петель с L_3 обозначим через $\mu, (1, 3) - \mu$. При Δ -движении подскок γ -инварианта составит $-(1, 3) + 2\mu$ это разность коэффициентов зацепления петель $L_{+,1}$ и $L_{-,1}$ с L_3 .

После взятия кабеля движения серии распадаются на λ_1 одинаковых серий, каждая серия содержит λ_1 Δ -движений, индексированных параметром $1 \leq i \leq \lambda_1$. Сумма разностей по всем элементам серии коэффициентов зацепления петель $L_{+,1}(i)$

и $L_{-,1}(i)$ с L_3 равна $2\lambda_1\mu - \lambda_1(1, 3)$. Подскок γ -инварианта по всем сериям составит $\lambda_1^2(2\mu - (3, 1))$, откуда вытекает (34) при сформулированном ограничении на кратности кабеля.

Вычисление $\delta_\beta^{\odot; cable}$ аналогично. Предложение А3 доказано. $\square$

Предложение А4

Пусть зацепление $(\lambda L_1, L_2, L_3)$ претерпевает гомотопию с одной точкой самопересечения pt на компоненте λL_1 , при которой возникающие петли с вершиной в точке самопересечения имеют кабельные коэффициенты m_1, m_2 ; $m_1 + m_2 = \lambda$.

Подскок суммы $(2, 3)^2(3, 1)^2\beta(\lambda L_1, L_2) + (3, 1)^2(1, 2)^2\beta(L_3, \lambda L_1)$ в формуле (1) составит:

$$\delta_\beta = 2\text{sign}(pt)(2, 3)^2(3, 1)^2(1, 2)^2 \frac{m_1 m_2}{\lambda^2};$$

подскок γ -слагаемого будет противоположен указанному значению.

Литература

1. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. *Magnetic Fields in Astrophysics* // Gordon and Breach, New York (1983).
2. Moffatt H. K. *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1978).
3. Rädler K.-H. *The generation of cosmic magnetic fields*, in: From the Sun to the Great Attractor (Guanajuato, August 4–11, 1999, Lecture Notes in Physics, Vol. 556, D. Page and J. G. Hirsh, eds.), Springer, Berlin (2000), pp. 101–172.
4. Arnol'd V. I., Khesin B. A. *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences, vol 125 (1998) (2013) (New York: Springer-Verlag).
5. Baader S., Marche J., *Asymptotic Vassiliev invariants for vector fields*, Bull. Soc. math. France, 140:4 (2012), 569–582.

6. Enciso A., Peralta-Salas D., Torres de Lizaur F. *Helicity is the only integral invariant of volume-preserving transformations*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A., 113:8 (2016), 2035–2040.
7. Kudryavtseva E. A. *Helicity is the Only Invariant of Incompressible Flows whose Derivative is Continuous in the C^1 Topology*, Mat. Zametki, 99:4 (2016), 626–630; Math. Notes, 99:4 (2016), 611–615.
8. Akhmet'ev P. M., Candelaresi S., Smirnov A. Yu. *Calculations for the practical applications of quadratic helicity in MHD*, Phys. Plasmas, 24:10 (2017), 102128.
9. Akhmet'ev P. M. *Magnetic helicity flux for mean magnetic field equations*, TMF, 204:1 (2020), 130–141; Theoret. and Math. Phys., 204:1 (2020), 947–956.
10. Akhmet'ev P., Cirilo-Lombardo D. J., Smirnov A. *Quadratic Helicity and Cosmological Magnetic Fields*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 17:10 (2020), 2050137.
11. Dehornoy P. *Asymptotic invariants of 3-dimensional vector fields*, Winter Braids Lecture Notes, 2 (2016), 1.
12. Sokoloff D. D. *Mirror Asymmetry and Helicity Invariants in Astrophysical Dynamos*, Geomagn. Aeron., 59:7 (2019), 799–805.
13. Akhmet'ev P. M. *On a higher integral invariant for closed magnetic lines*, revisited Journal of Geometry and Physics: 170 (2021) 104379.
14. Akhmetiev P. M. *On a new integral formula for an invariant of 3-component oriented links*, J. Geom. Phys. 53 (2), 180–196 (2005).
15. Akhmet'ev P. M. *Topological meaning of the slope of the Kolmogorov spectrum of magnetic turbulence: M_5 -invariant of magnetic lines and its combinatorial formula*, J. Geom. Phys. 178 (2022) 104583.
16. Akhmet'ev P. M. *Topological meaning of the slope of the Kolmogorov spectrum of magnetic turbulence*, TMF, 209:2 (2021), 351–366; Theoret. and Math. Phys., 209:2 (2021), 1620–1632.

17. Akhmet'ev P. M., Dvornikov M. S. *Invariants of magnetic lines for Yang-Mills solutions*, Journal of Geometry and Physics, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105102>.
18. Dvornikov M. S., Akhmet'ev P. M. *Evolution of the magnetic field in spatially inhomogeneous axion structures*, TMF, 218:3 (2024), 601–618; Theoret. and Math. Phys., 218:3 (2024), 515–529.
19. Dvornikov M. S., Akhmetiev P. M. *Evolution of a Large Scale Chern-Simons Magnetic Field in Expanding Space with a Negative Scalar Curvature Parameter*, Physics of Particles and Nuclei, 2025, Vol. 56, No. 2, pp. 269–274.
20. Akhmetiev P. M., Dvornikov M. S. *Evolution of Mirror Axion Solitons*, arXiv:2504.00893.
21. Prasolov V. V., Sossinsky A. B. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Trans. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence RI, 1997, 154.
22. Melikhov S. A. *Coloured finite type invariants and a multi-variable analogue of the Conway polynomial*, 2003. <http://arXiv:math/0312007v2>
23. Matveev S. V. *Generalized surgery of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres*, Mat. Zametki, 42:2 (1987), 268–278; Math. Notes, 42:2 (1987), 651–656.
24. DeTurck D., Gluck H., Komendarczyk R., Melvin P., Shonkwiler C., Vela-Vick D. *Triple linking numbers, ambiguous Hopf invariants and integral formulas for three-component links*, Mat. Contemp. 34 (2008), 251–283.
25. Akhmet'ev P. M. *On combinatorial properties of a higher asymptotic ergodic invariant of magnetic lines*, J. Phys. Conf. Ser. 544(1) (2014) 012015.
26. Nikkuni R. *Homotopy on spatial graphs and Generalized Sato-Levine Invariants*, 2008. <http://arXiv:math/0710.3627v2>

Комбинаторная формула для M -инварианта магнитных линий II

Введение

В первой части работы был сформулирован основной результат, который доказывается. А именно, существует полином P в правой части формулы (4) [1], первое слагаемое P_1 которого определено формулой (25) [1]. Этот полином был изучен в первой части работы. Второе слагаемое R в формуле (16) [1] будет определено в этой второй части работы.

Остановимся кратко на структуре второй части работы. В разделе 1 доказано, что если асимптотический инвариант с главной частью заданной по формуле (2) части 1 существует, то этот инвариант однозначен. В разделе 2 проводятся вычисления для специальных зацеплений с равными попарными коэффициентами зацепления. В разделе 3 проводятся вычисления для специальных зацеплений для которых два из трех попарных коэффициентов зацепления совпадают. Определяется рациональный инвариант M^{line} . В разделе 4 определяется искомый инвариант во вспомогательной форме при помощи перехода к нормализующему кабелю над зацеплением. Вспомогательный искомый инвариант обозначается через M^{tube} . Оба инварианта M^{line} , M^{tube} являются рациональными инвариантами, в частности, инвариант M^{tube} не записан в требуемой форме M как инвариант конечного типа. Инварианты M^{line} , M^{tube} обсуждаются в части 1 в физическом контексте задачи. В разделе 5 в предположении, что два из трех попарных коэффициента зацепления совпадают, выписывается формула для остаточного полинома R и, тем самым, строится M -инвариант конечного типа. В разделе 6 исследуется общий случай без какого-либо дополнительного предположения. Замечу, что результаты раздела 5 и пример Fig.11 раздела 6 в той или иной степени проверены численно. Окончательная формула полинома R , определенная в

этом разделе, требует дополнительных вычислений и численной проверки. Заключительный раздел 7 посвящен обсуждениям.

1. Единственность M -инварианта

Специальное зацепление с внутренней симметрией

Рассмотрим произвольное ориентированное упорядоченное зацепление $\mathbb{L} = (L_1, L_2, L_3)$. В его классе Δ -эквивалентности рассмотрим специальное зацепление $\mathbb{L}_0((3, 1), (1, 2), (2, 3))$ (Рис. 3 [1]). Рассмотрим это зацепление, как зацепление с циклическим порядком компонент.

Обозначим произведение $(3, 1)(1, 2)(2, 3)$ через k и предположим, что $k \neq 0$. Определим два класса зацеплений: назовем зацепление правым, если $k > 0$ и левым, если $k < 0$.

Определим преобразование

$$F : Right \cup Left \mapsto Right \cup Left; \quad \mathbb{L} \mapsto F(\mathbb{L}),$$

которое называется преобразованием внутренней симметрии зацеплений с предписанным циклическим порядком компонент. Образ $F(\mathbb{L})$ есть зеркальное зацепление с измененной ориентацией компонент и изменением их циклического порядка на противоположный.

Заметим, что образ специального зацепления при внутренней симметрии не есть специальное зацепление. Чтобы образ специального (правого) зацепления был бы специальным (левым) зацеплением, определим специальное зацепление по-другому.

Операция F визуализируется на рисунках Рис. 5, Рис. 6 в [1]. Зацепления, изображенные на рисунке представляют класс эквивалентности Δ -движений с предписанными коэффициентами зацепления, как и специальное зацепление, изображенное на Рис. 3. Обозначим эти зацепления через

$$\Phi^L((1, 2), (2, 3), (3, 1)), \quad \Phi^R((1, 2), (2, 3), (3, 1)). \quad (1)$$

Зацепления с соответствующим набором коэффициентов зацепления переводятся изотопией (вращение вокруг оси в плоскости на развернутый угол) одно в другое, с изменением

ориентации компонент; две из трех компонент переставляются транспозицией. Для построения M -инварианта зацепления (1) являются более удобными по сравнению со специальными Fig.3, часть 1.

Теорема 1

Произвольный инвариант конечного типа, λ^s -асимптотический с показателем $s \equiv 0 \pmod{4}$ по каждой магнитной линии и кососимметричный при внутренней симметрии зацепления, однозначно определяется своим главным слагаемым (в формуле (4) [1] это первое слагаемое в правой части). В частности, M -инвариант допускает единственный остаточный полином P (при преобразования внутренней зеркальной симметрии компоненты зацепления испытывают нечетную перестановку индексов и все нечетные мономы в P меняют знак).

Доказательство Теоремы 1

Предположим, что P, P' — два разных полинома от попарных коэффициентов зацепления, дополняющие формулу M -инварианта до кососимметричного при внутренней симметрии. Тогда $P - P'$ инвариант конечного порядка, зависящий лишь от попарных коэффициентов зацепления компонент и кососимметричный при внутренней симметрии. Поскольку M -асимптотический инвариант с показателем λ^4 , $P - P'$ также асимптотический с этим же показателем. Но для нечетного полинома это невозможно. Теорема доказана. $\square$

2. Вычисление для $\mathbf{L}_{Hopf}(p^2, p^2, p^2)$

Пусть p — положительный вещественный параметр, (ниже мы будем использовать подстановку $p^2 = k > 0$, где натуральный параметр k определен формулой:

$$k = (2, 3)(3, 1)(1, 2) \neq 0. \quad (2)$$

Лемма 2

Для произвольного целого k справедливо следующие уравнения:

$$\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) = -\frac{k^7}{4}; \quad (3)$$

$$\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) = -\frac{3}{4}k^7 - \frac{1}{4}k^5. \quad (4)$$

Доказательство Леммы 2

Рассмотрим специальное зацепление $\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k)$ с коэффициентами зацепления $(1, 2) = -k$, $(2, 3) = k$, $(3, 1) = -k$, которое получено из $\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)$ посредством замены ориентации на первой компоненте на противоположную. Вычисление $\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k))$ происходит аналогично Лемме 4, часть 1. Начнем модифицировать это зацепление при помощи самопересечения компонент: $\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k) = \mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}_1$; зацепление $(L_1^{op}, L_2) \subset \mathbb{L}$ связано гомотопией с зацеплением, имеющим дизъюнктные незаузленные компоненты, такая гомотопия потребует p точек пересечения.

При каждом пересечении 2-компонентное возникает зацепление $(L'_1 \sharp L'_2, L_3)$, компоненты которого незаузлены, незацеплены и дизъюнкты. Поэтому каждый раз скачек коэффициента c_1 равен нулю.

В результате разпутывания, мы получим зацепление, с первыми двумя параллельными незаузленными и незацепленными компонентами, которые расположены параллельно друг другу противоориентированным способом. Третья компонента L_3 расположена параллельно L'_1 ; L'_2 и зацеплена с L'_1 , L'_2 с коэффициентами $-k$, k соответственно.

Поэтому получится $c_1(\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k)) = \frac{1}{12}(-k^4 + k^2)$, поскольку это полином степени 4, а такой полином определяется своими значениями при $k = +2, +1, 0, -1, -2$. По вычислению инварианта γ , заметим, что единственное нетривиальное дополнительное слагаемое равно $-(-2k)c_1(L_2 \cup L_3) = \frac{k^4 - k^2}{3}$.

Рассмотрим полином $P_1(-k, k, -k) = -\frac{1}{6}k^7 - \frac{1}{12}k^5$. Получим:

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) &= \tilde{M}^{av}(\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k)) = \\ &= -\gamma k^3 + \frac{k^4(k^3 - k)}{6} + P_1(-k, k, -k) = \\ &= \frac{-k^7 + k^5}{4} + \frac{k^7}{6} - \frac{k^5}{6} - \frac{k^7}{6} - \frac{k^5}{12} = -\frac{k^7}{4}.\end{aligned}$$

Также получим: $\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k)) = -\gamma k^3 + \frac{k^4(k^3 - k)}{6} = -\frac{1}{12}k^7 + \frac{1}{12}k^5$. Поскольку

$$\tilde{M}^{av}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) = \tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) + 3\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, k, -k)) = k^7,$$

получим:

$$\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf}(k, k, k)) = -\frac{3}{4}k^7 - \frac{1}{4}k^5.$$

□

Начнем с доказательства п.1. Докажем следующее.

Лемма 3

Скачок инварианта $\tilde{M}$ при последовательности Δ -движений между зацеплениями $p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)$ и $\mathbb{L}_{Hopf}(p^2, p^2, p^2)$ равен нулю.

Первое доказательство Леммы 3

Рассмотрим зацепление $p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)$ и приблизим друг к другу компоненты L_2, L_3 , которые мы расположим внутри полнотория U как два p -кабеля хопфовского двухкомпонентного зацепления $(L_{Hopf,2} \cup L_{Hopf,3}) = \mathbb{L}_{Hopf}(+1) \subset U$. Расположим компоненту $L_{Hopf,2}$ с плоской проекцией в форме кривой "8", а компоненту $L_{Hopf,3}$ расположим параллельным сдвигом в плоскости, компоненту $L_{Hopf,2}$ выберем так, чтобы компоненты зацепились с коэффициентом $+1$.

Компонента L_1 расположена в дополнении к U , как именно, для вычисления

$$\tilde{M}(L_1 \cup L_{Hopf,2} \cup L_{Hopf,3}) \tag{5}$$

не важно, поскольку при гомотопии $L_1 \mapsto L'_1$ этой компоненты внутри $\mathbb{R}^3 \setminus U$ значение (5) не меняется.

Рассмотрим компоненту кабеля $l \subset U$, которая вращается p -раз вокруг центральной линии $S^1 \subset U$ полнотория и рассмотрим оснащение ξ этой компоненты l в котором коэффициент самозацепленности кабеля равен p^2 . Кабель дополнительно выбирается так, что оснащенный узел (l, ξ) изотопен стандартной плоской окружности, оснащенной с коэффициентом p^2 . Определим $L'_2 \cup L'_3 \subset U$ как результат сдвига l вдоль оснащения ξ . По конструкции, подзацепление $L'_2 \cup L'_3$ изотопно зацеплению $\mathbb{L}_{Horf}(p^2)$. Применим гомотопию $L_1 \mapsto L'_1$ при которой $(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ изотопно $\mathbb{L}_{Horf}(p^2, p^2, p^2)$.

Опишем гомотопию h подробнее. Расположим компоненты L_1, L_2 как кабели плоского зацепления $\mathbb{L}_{Horf}(+1)$, при этом кабели выбираются без перекрутки относительно плоской проекции. В одной точке последняя нитка кабеля L_2 пересекает снизу все остальные нитки кабеля и замыкается с первой ниткой отрезком трансверсали. Компонента L_3 выбирается вертикальным сдвигом вверх из L_2 , в окрестности особой точки отрезок трансверсали выбирается выше всех средних ниток кабеля L_1 . Гомотопия h состоит в том, что отрезок трансверсали кабеля L_3 продавливается (с положительным знаком пересечения) через $p - 1$ ниток кабеля L_3 , чтобы сохранить коэффициент зацепления отрезок трансверсали на L_3 закручивается вокруг отрезка трансверсали на L_2 на $(p - 1)$ оборот с отрицательным знаком.

Рассмотрим гомотопию $h : (L'_1 \cup L_2 \cup L_3) \mapsto (L'_1 \cup L'_2 \cup L'_3)$ с носителем на $L_2 \cup L_3$, для которой L'_1 неподвижно, а компоненты L_2, L_3 гомотопируются внутри U без самопересечения, но, возможно, с взаимным пересечением. Легко представить обратную гомотопию h^{-1} как "растаскивание" компонент $L'_2 \cup L'_3$, которые расположены вдоль центральной линии U очень близко друг к другу, каждая как p -кабель внутри полнотория $V_2 \subset U, V_3 \subset U$. Процесс растаскивания происходит без самопересечений, но, вообще говоря, с взаимными пересечениями.

Алгебраическое число пересечений компонент при гомотопии h^{-1} равно нулю. Назовем тонкую ленточку с одной компоненты L'_3 , зацепленную с другой компонентой L'_2 , усом. Каждый ус

снабжен, тем самым, знаком $\pm$, который определен как коэффициент зацепления уса с компонентой. Обозначим семейство усов через $\Psi = \{\psi_i\}$.

Рассмотрим гомотопию $L_3 \mapsto L'_3$ и заменим точки пересечения с L_2 на усы. При пересечении усов со следом гомотопии L'_3 усы деформируются при помощи вторичных усов.

Преобразование семейства усов Ψ в семейство усов Ψ' назовем элементарным, если это одно из следующих преобразований.

А. Сокращение двух близких параллельных усов с разными знаками путем изотопии L_3 .

В. Ус ψ_i семейства преобразуется в ψ'_i в результате локального подкручивания в окрестности основания или конца уса вокруг компоненты L'_3 или L'_2 соответственно без перекручивания и без изменения коэффициента зацепления уса с компонентой.

С. Пересечение уса ψ_i с другим усом ψ_j .

Д. Самопересечение уса ψ_i .

Е. Скручивание уса (со знаком) на полный оборот.

Изучим преобразование $\tilde{M}$ -инварианта при элементарном преобразовании усов. При преобразовании А инварианты β , γ не изменяются. Изучим изменения инвариантов γ, β при преобразованиях В, С, Д, Е.

Изучим скачки β, γ -инвариантов при преобразовании типа Е (все случаи более или менее аналогичны друг другу). При закручивании уса с точкой самопересечения x инвариант β изменяется на $sign(x)(p^2 + \varepsilon(x))\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)$ – коэффициент зацепления петли с вершиной x уса компоненты L'_3 с компонентой L'_2 , $sign(x)$ – знак точки самопересечения на усе. Инвариант γ изменится на значение $p^4 \cdot sign(x)\varepsilon(x)$. Суммарный вклад в $\tilde{M}$ -инвариант составит

$$-sign(x)\varepsilon(x)p^{10} + sign(x)\varepsilon(x)p^8(p^2 + \varepsilon(x)) = p^8 sign(x). \quad (6)$$

Наша гомотопия h очень специальная; для нее вторичных усов не возникает, а преобразования усов имеют специальный вид. При гомотопии h^{-1} усы появятся в двух группах: в первой группе на одной компоненте намотки при продавливании через параллельные копии кабеля L_2 и во второй группе в малой окрестности на параллельных компонентах L'_2, L'_3 , чтобы знак

коэффициента зацепления L'_2, L'_3 совпадал со знаком коэффициента зацепления L_2, L_3 . Суммарные знаки ε в двух группах усов противоположны друг другу. Поскольку мы выбрали центральные линии с плоским оснащением, усы первой группы добавляются без перекрутки. Усы добавляются последовательно и переводятся друг в друга без перекрутки, без самопересечений и без и взаимных пересечений, при гомотопии появляются особенности типа B . Поскольку каждый ус зацеплен со средними линиями $L_{2,Hopf}, L_{3,Hopf}$ с одинаковыми коэффициентами, знаки подскоков в формуле (6) противоположны (ус ориентирован от основания L_3 к точке прикрепления на L_2 , поэтому локальные пересечения вблизи границы уса одинаковых знаков усов с компонентами зацепления приводит к перекруткам уса в разных направлениях; знаки подскока инварианта при пересечении общего вида вычисляются алгебраически аналогично).

Лемма 3 доказана. $\square$

Второе доказательство Леммы 3

Определим преобразование (изотопию)

$$B : [p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)] \mapsto [\mathbb{L}_{Hopf}(p^2, p^2, p^2)],$$

где скобки означают, что зацепления представлены в классах эквивалентности, которые определены ниже. Рассмотрим специальное зацепление $\Phi^R(+1, p, p)$ (1) и рассмотрим кабель $\Phi_{cab}^R = \Phi^R(+1, p, p)_{cab_p(2), cab_p(3)}$ над 2 и 3 компонентами этого зацепления, коэффициенты зацепления которого равны p^2 . Зацепление Φ_{cab}^R представляет класс эквивалентности $p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)$ с точностью до гомотопии компоненты L_1 вне полнотория, содержащего кабели 2 и 3 компоненты. Компоненты L_2, L_3 зацепления Φ^R расположим параллельно друг другу вдоль плоской тонкой ленты в форме 8 по обе её стороны. Кабель Φ_{cab}^R представляет собой зигзагообразную спираль в плоскости ленты, концы отрезка расположены с внешних сторон точек оси симметрии плоской ленты, которая проходящей через центр симметрии центральной кривой 8 ленту и пересекающую эту кривую в двух точках. Концы отрезка компоненты L_2 , которую расположим на верхней стороне

ленты, соединим дугой I_2 выше плоскости, а компоненты L_2 , расположенную на нижней стороне ленты, соединим дугой I_3 ниже плоскости. Это, конечно, приведет к кабелю Φ_{cab}^R специального вида.

Теперь проворачиваем дугу I_2 через бесконечную точку до дуги I_3 . При такой изотопии кабели перейдут в параллельные кривые, представляющие $\mathbb{L}_{Horf}(p^2, p^2, p^2)$ в классе зацеплений с точностью до гомотопии компоненты L_1 вне полнотория, содержащего параллельные 2 и 3 компоненты. При изотопии A инвариант $\tilde{M}$ не меняется, а на классах эквивалентности он корректно определен. Лемма 3 доказана. $\square$

Третье доказательство Леммы 3

Мы рассмотрим классы $[p\mathbb{L}_{Horf}(+1, +1, +1)]$, $[\mathbb{L}_{Horf}(p^2, p^2, p^2)]$, представленные p -кабелем компоненты L_1 . В процессе доказательства этот кабель не разрушается, поэтому мы рассмотрим классы $[\mathbb{L}_{Horf}(+1, +1, +1)_{cab_p(2), cab_p(3)}]$, $[\mathbb{L}_{Horf}(p, p^2, p)]$, оставив лишь центральную кривую кабеля компоненты L_1 . Классы представим специальным зацеплением Φ^R , как в предыдущем втором доказательстве.

Рассмотрим следующую четверку зацеплений, определенных в разделе 1, подраздел 1.1, включенных в диаграмму преобразований:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^R(+1, +p, +p)_{cab_p(2)} & \xrightarrow{\mu_2} & \Phi^R(+1, +1, +1)_{cab_p(2), cab_p(3)} \\
 \delta_1 \uparrow & & \delta_2 \uparrow \\
 \Phi^R(+p, +p^2, +p) & \xrightarrow{\mu_1} & \Phi^R(+p, +p, +1)_{cab_p(3)}.
 \end{array} \tag{7}$$

В этой диаграмме в левом нижнем углу специальное зацепление $\Phi^R(+p, +p^2, +p)$ с предписанными попарными коэффициентами зацепления, определенными параметром $p \in \mathbb{Z}$, в правом нижнем углу зацепление $\Phi^R(+p, +p, +1)_{cab_p(3)}$, полученное p -кабелем по третьей компоненте специального зацепления $\Phi^R(+p, +p, +1)$. В левом верхнем углу зацепление $\Phi^R(+1, +p, +p)_{cab_p(2)}$, которое аналогично $\Phi^R(+p, +p, +1)_{cab_p(3)}$ с заменой номера компоненты

для кабеля. В правом верхнем углу зацепление

$$\Phi^R(+1, +1, +1)_{cab_p(2), cab_p(3)},$$

полученное из специального зацепления $\Phi^R(+1, +1, +1)$ в результате композиции p -кабелей по второй и по третьей компоненте.

Лемма 4

Подскоки $\tilde{M}$ -инварианта по верхней горизонтальной стрелке превышает подскок инварианта по нижней горизонтальной стрелке на добавочное слагаемое $\frac{p^4(p^6-p^4)}{6}$. Аналогичное утверждение справедливо для подскоков инварианта по вертикальным стрелкам.

Доказательство Леммы 4

Обозначим через

$$\beta_{\uparrow, \leftarrow}, \beta_{\rightarrow, \uparrow}, \beta_{\downarrow, \leftarrow}, \beta_{\rightarrow, \downarrow}$$

значения инвариантов Сато–Левина для зацеплений из 2 и 3 компоненты в соответствующих вершинах диаграммы (7) Рассмотрим выражение

$$A = -\beta_{\uparrow, \leftarrow} + \beta_{\rightarrow, \uparrow} + \beta_{\downarrow, \leftarrow} - \beta_{\rightarrow, \downarrow}. \quad (8)$$

Это выражение не зависит от представителей зацеплений, если при этом кабель соответствующей компоненты брать повторяющимися с разными знаками. Заметим, что значения второго, третьего совпадает со значением четвертого (без учета знака), а зацепление $\Phi^R(+1, +1, +1)_{cab_p(2), cab_p(3)}$ отличается от $\Phi^R(+p, +p^2, +p)$ на некоторую явно описываемую гомотопию, для которой подскок β -инварианта вычисляется ниже. С другой стороны, главное γ -слагаемое не дает вклад в вычислении коммутатора подскока $\tilde{M}$ -инварианта по стрелкам в (7) поэтому разность скачков $\tilde{M}$ -инварианта вычисляется по значению коммутатора A . Утверждение доказано в более общем случае ниже Лемме 4, тем не менее приведем прямое доказательство для специального случая.

Пусть

$$D^{-1} : \Phi^R(+p, +p^2, +p) \mapsto \Phi^R(+1, +p^2, +1)_{cab_p(1)}$$

деформация Δ -движений с неподвижными компонентами L_2 , L_3 , обратная к распутыванию кабеля компоненты L_1 . Коммутатор двух усов на L_1 к L_2 и L_3 не приводит к изменению γ -, β -инвариантов. Гомотопия D представителей задается последовательностью коммутаторов, каждый из которых тождественно преобразует слагаемые $\tilde{M}$ -инварианта. Преобразование композиции двух обращенных стрелок в диаграмме (7) (из правого верхнего угла в левый нижний угол) имеет образ $\Phi^R(+1, +p^2, +1)_{cab_p(1)}$. Выберем удобные представители кабеля и применим преобразование D , которое не меняет $\tilde{M}$ -инвариант, получим зацепление в левом нижнем углу диаграммы. Это доказывает Утверждение.

Скачок $\tilde{M}$ -инварианта по строкам диаграммы (7), который мы вычисляем, связан со значениями A по формуле:

$$\delta \tilde{M} = p^4 A = -\frac{p^4(p^6 - p^4)}{6}. \quad (9)$$

Вычислим A . Кабели компонент L_2, L_3 представляют собой обмотки двух торов (внутреннего и внешнего) разного уровня; внутренняя индекса $(p, p+1)$, внешняя индекса $(p-1, p)$. Обмотки зацеплены с коэффициентом p^2 . Преобразуем обмотку (внешнюю) с заменой индекса:

$$(p-1, p) \mapsto (-1, p).$$

Такое преобразование есть половина преобразования изменения коэффициента подкрутки параллели тора вдоль меридиана.

Наиболее простое вычисление получится, если вычислять преобразование полной подкрутки на два оборота. Каждый оборот кабеля L_2 на $+1$ приведет к скачку инварианта β , $\delta\beta = \frac{p^3(p^3-p)}{6}$: нужно просуммировать ряд (25), при этом слагаемые разбиваются на p одинаковых серий, слагаемое следует брать с весом p^2 . Формула (9) доказана с учетом того, что преобразование подкрутки на один оборот происходит учитывается в формуле

A дважды. Учтен вес β -инварианта в формуле $\tilde{M}$. Лемма 4 доказана. $\square$

Теперь значение подскока $\tilde{M}$ -инварианта при преобразовании $\mu_2 \circ \delta_1$ в диаграмме (7) вычисляется как сумма подскоков по стрелкам δ_2 , μ_2 и дополнительного слагаемого (9). Подскоки по стрелкам δ_2 , μ_2 одинаковые и вычисляются по формуле (10) (в которой нужно r переобозначить через p и принять $p = 1$). Множитель p^4 появляется при учете подскока инварианта с дополнительным кабелем. Подскок инварианта при преобразовании $\mu_2 \circ \delta_1$ равен нулю. Лемма 3 доказана. $\square$

3. Вычисления для $\mathbf{L}_{Hopf}(k, rk, rk)$

Обозначим через k, r два натуральных параметра, обобщим Лемму 2, формулы (3),(4), которые являются частным случаем при $r = 1$.

Лемма 5

Для произвольных натуральных $k = p^2, r$ выполнено следующее равенство:

$$\tilde{M}^{av}(\mathbf{L}_{Hopf}(k, kr, kr)) = -\frac{r^6 k^7}{12} - \frac{r^4 k^7}{6}. \quad (10)$$

Доказательство Леммы 5

Рассмотрим зацепление $\mathbf{L}_{Hopf}^{op(1)}(-k, kr, -kr)$. Вычислим полином $P_1(-k, kr, -kr)$. Получим:

$$P_1 = \frac{r^2 k^3 [-r^2 k^2]}{12} - \frac{r^4 k^6 [k]}{6} = -\frac{r^4 k^5}{12} - \frac{r^4 k^7}{6}.$$

Вычислим γ , $\tilde{M}$, $\tilde{M}^{av}$:

$$c_1 = \frac{1}{12} [-(rk)^4 + (rk)^2];$$

$$\gamma = -\frac{r^4 k^4 - r^2 k^2}{12} + \frac{[k + rk](r^3 k^3 - rk)}{6};$$

$$\begin{aligned}
(r^2 k^3) \gamma &= \frac{r^6 k^7 - r^4 k^5}{4} + \frac{r^5 k^7 - r^3 k^4}{6}; \\
\tilde{M} &= -\frac{r^6 k^7 - r^4 k^5}{4} + \frac{[r^3 k^3 - rk] r^2 k^4}{6} - \frac{[r^3 k^3 - rk] r^2 k^4}{6} = -\frac{r^6 k^7 - r^4 k^5}{12}; \\
\tilde{M}^{av} &= -\frac{r^6 k^7}{12} + \frac{r^4 k^5}{12} - \frac{r^4 k^5}{12} - \frac{r^4 k^7}{6} = -\frac{r^6 k^7}{12} - \frac{r^4 k^7}{6}.
\end{aligned}$$

При $r = 1$ эта формула совпадает с формулой (10) и применяется в случае $k = p^2$. Лемма 5 доказана. $\square$

Определение 6

Пусть $(\mathbb{L}(1, 2), (2, 3), (3, 1))$ — хорошее зацепление. Рассмотрим зацепление $\mathbb{L}_{Hopf; cab}$, определенное как кабель над зацеплением $L_{Hopf}(+1, +1, +1)$ с предписанным набором попарных коэффициентов зацепления. Обозначим через $Q((1, 2), (2, 3), (3, 1))$ — полином, такой, что

$$\tilde{M}(\mathbb{L}_{Hopf; cab}) + Q((1, 2), (2, 3), (3, 1)) = 0.$$

Обозначим $M = \tilde{M} + Q((1, 2), (2, 3), (3, 1))$.

Определим инвариант M^{line} (инвариант неформально обсуждается в части 1 в контексте задачи с магнитным полем) следующей формулой:

$$M^{line}(L_1, L_2, L_3) = k^{-2} M(\mathbb{L}_{norm}). \quad (11)$$

Теорема 7

Инвариант (11) удовлетворяет асимптотическому свойству:

$$M^{line}(\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2, \lambda_3 L_3) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^4 M^{line}(\mathbb{L}_{norm}).$$

Доказательство Теоремы 7

Инвариант в правой части (11) имеет конечный порядок, поскольку попарные коэффициенты зацепления $\mathbb{L}_{norm}$ совпадают и деление нацело возможно. Слагаемое в левой части формулы в формулировке Теоремы 7 определено по кабелю нормализации зацепления $(\lambda L_1, L_2, L_3)$ (см. часть 1, раздел раздел 6) поэтому

кабели всех компонент нормализации выбираются с кратностью λ . Поэтому показатель левой части этой формулы для $\lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, составит λ^4 . Для кабеля над хопфовским зацеплением можно применить формулы (3),(4). Для общего случая кабеля $\mathbb{L}$ все аналогично. Теорема 7 доказана. $\square$

4. Инвариант M^{tube}

Хорошие зацепления

Предположим, что $(1, 2)(2, 3)(3, 1) \neq 0$. При этом условии рассмотрим произвольное зацепление $\mathbb{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, определим нормализующее преобразование $(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, как результат кабеля компонент

$$(L_1 \cup L_2 \cup L_3) \mapsto ((2, 3)L_1, (3, 1)L_2, (1, 2)L_3) = \mathbb{L}_{norm}.$$

Для зацепления $\mathbb{L}_{norm} = ((2, 3)L_1, (3, 1)L_2, (1, 2)L_3)$ все попарные коэффициенты зацепления равны между собой и равны произведению $k = (1, 2)(2, 3)(3, 1)$. Парные коэффициенты зацепления у зацеплений $\mathbb{L}_{norm}$ и $\mathbb{L}_0(k, k, k)$ совпадают.

Скажем, что зацепление $\mathbb{L}$, имеющее неотрицательные попарные коэффициенты зацепления является хорошим, если они удовлетворяют следующему алгебраическому свойству П.

П. Система уравнений:

$$(1, 2) = \mu_1^2 \mu_2^2, \quad (2, 3) = \mu_2^2 \mu_3^2, \quad (3, 1) = \mu_3^2 \mu_1^2$$

имеет положительное целое решение (μ_1, μ_2, μ_3) .

Как правило, полное условие П для того или иного класса зацеплений не требуется и будет использоваться частично.

Хорошее зацепление с положительными попарными коэффициентами зацепления имеет тот же самый набор коэффициентов зацепления, что и зацепление $\mathbb{L}_{Hopf}(\mu_1^2(+1), \mu_3^2(+1), \mu_2^2(+1))$, полученное вторичным (μ_1, μ_2, μ_3) -кабелем для зацепления

$$L_{Hopf}(\mu_1(+1), \mu_2(+1), \mu_3(+1)),$$

которое является первичным (μ_1, μ_2, μ_3) -кабелем для зацепления Хопфа $\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)$.

Определение первичного кабеля хорошего зацепления следующее. Как для правого $k > 0$, так и для левого $k < 0$ зацепления знаки $(2, 3), (3, 1), (1, 2)$ соответствуют знакам компонент вектора $(\mu_1(\pm 1), \mu_2(\pm 1), \mu_3(\pm 1))$.

Ниже рассматривается случай правых зацеплений. Для хорошего (правого) зацепления $\mathbb{L}$ обозначим через $\sqrt{k} = \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2$ положительный корень. Получится $k = (\sqrt{k})^2 > 0$. Заметим, что в случае левого зацепления $(1, 2)(2, 3)(3, 1) < 0$ знак k уже учтен в направлениях компонент зацепления $\Phi^L(1)$.

Нормализация зацеплений

Для вектора с положительными координатами (μ_1, μ_2, μ_3) рассмотрим зацепление $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mu_2^2 \mu_3^2, \mu_1^2 \mu_2^2, \mu_3^2 \mu_1^2)$ с предписанным набором коэффициентов зацепления.

Определим следующую диаграмму кабелей зацеплений:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} & \leftarrow & \mathbb{L}_{norm} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}^\odot & \leftarrow & \mathbb{L}_{norm}^\odot. \end{array} \quad (12)$$

В этой диаграмме левый вертикальный кабель $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}^\odot$ определен "возведением в квадрат" и имеет кратности $\mu_2 \mu_3, \mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_1$ по соответствующей компоненте; верхний горизонтальный кабель $\mathbb{L}_{norm} \rightarrow \mathbb{L}$ является нормализацией зацепления $\mathbb{L}$ и имеет кратности $\mu_1^4 \mu_2^2 \mu_3^2, \mu_1^2 \mu_2^4 \mu_3^2, \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^4$ по соответствующей компоненте, нижний горизонтальный кабель $\mathbb{L}_{norm}^\odot \rightarrow \mathbb{L}^\odot$ является нормализацией зацепления $\mathbb{L}^\odot$ и имеет кратности $\mu_1^2 \mu_2 \mu_3, \mu_1 \mu_2^2 \mu_3, \mu_1 \mu_2 \mu_3^2$ по соответствующей компоненте; правый горизонтальный кабель $\mathbb{L}_{norm} \rightarrow \mathbb{L}_{norm}^\odot$ определен "возведением в квадрат" и имеет кратности $\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2$ по каждой компоненте.

Преобразование взятия кабеля с положительными показателями $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ должно преобразовывать одно хорошее зацепление $\mathbb{L}^\odot$ в другое $(\lambda_1^2 L_1, \lambda_2^2 L_2, \lambda_3^2 L_3)$. Поэтому каждый показатель λ_i^2 является полным квадратом: $\lambda_i^2 = \sqrt{\lambda_i^2}$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$. Зацепление $\mathbb{L}^\odot$ преобразуется следующим способом:

$$(L_1^\odot, L_2^\odot, L_3^\odot) \mapsto (\lambda_1 L_1^\odot, \lambda_2 L_2^\odot, \lambda_3 L_3^\odot); \quad (13)$$

Зацепление $L_{norm}^\odot$ преобразуется следующим способом:

$$(L_{norm;1}^\odot, L_{norm;2}^\odot, L_{norm;3}^\odot) \mapsto \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (L_{norm;1}^\odot, L_{norm;2}^\odot, L_{norm;3}^\odot). \quad (14A)$$

Зацепление L_{norm} преобразуется следующим способом:

$$(L_{norm;1}, L_{norm;2}, L_{norm;3}) \mapsto (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 (L_{norm;1}, L_{norm;2}, L_{norm;3}). \quad (14B)$$

Определения инварианта M^{tube}

Пусть L_{norm} соответствующее кабельное зацепление, которое построено по хорошему правому зацеплению L .

Рассмотрим интеграл M , построенный в [2], который является инвариантом магнитных линий. Инвариант M соответствует инварианту M^{tube} для зацепления $L^\odot$, которое определено как зацепление средних линий магнитных трубок. Мы определим комбинаторный инвариант M^{tube} ниже по формуле (19), используя нижнюю строку диаграммы (12), при этом инвариант M^{line} будет соответствовать верхней строке диаграммы.

Подскоки инварианта $\tilde{M}$ для преобразований зацеплений L_{norm} , L , $L_{norm}^\odot$ посредством Δ -движений выражены уравнениями:

$$\delta \tilde{M}(L_{norm}) = (k^\odot)^6 \delta \tilde{M}(L_{norm}^\odot); \quad (15)$$

$$\delta \tilde{M}(L_{norm}^\odot) = (k^\odot)^4 \delta \tilde{M}(L^\odot); \quad (16)$$

$$\delta \tilde{M}(L_{norm}) = k^3 \delta \tilde{M}(L); \quad (17)$$

$$\delta \tilde{M}(L) = (k^\odot)^2 \delta \tilde{M}(L^\odot). \quad (18)$$

В этой формуле $k(L) = (k^\odot)^2$, где $k(L^\odot) = k^\odot$ для краткости. Формулы (15)-(18) вытекают из определений кратностей кабелей в диаграмме (12) и из свойства подскока инварианта $\tilde{M}$ при Δ -движениях (см. часть 1 Appendix).

Определение 8

Определим инвариант M^{tube} хорошего зацепления $L^\odot$ ([1] формула (31)) по формуле:

$$M^{tube}(L^\odot) = (k^\odot)^{-10} M(L_{norm}), \quad (19)$$

где $\mathbb{L}_{norm}$ определено как нормализация $\mathbb{L}$ над $\mathbb{L}^\odot$.

Начнем с доказательства Утверждения 1 Теоремы 1 [1]. Определим $M = M^{tube}$ как рациональный инвариант. Докажем, что инвариант M^{tube} является инвариантом конечного типа. Комбинаторная формула M представлена в разделе 5.

Лемма 9

1. Инвариант M^{tube} , определенный формулой (19) для хороших зацеплений $\mathbb{L}^\odot$, удовлетворяет асимптотическому свойству (5), часть 1

2. Правая часть формулы (19) определена без предположения о том, что зацепление $\mathbb{L}$ является хорошим.

Доказательство Леммы 9

Утверждение 1 доказано в [2] аналитически, см. обсуждение ниже формул (15)-(18). Для комбинаторного доказательства применим формулу (3),(4) для параметра $k = (k^\odot)^2$ к зацеплению $k(\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1))$ и получим необходимое асимптотическое свойство для кабеля $\mathbb{L}^\odot \leftarrow \mathbb{L}_{norm}^\odot \leftarrow \mathbb{L}_{norm}$ of $\mathbb{L}^\odot$. Используется Лемма 4. Утверждение 1 доказано.

Для доказательства Утверждения 2 докажем асимптотическое свойство для произвольных зацеплений $\mathbb{L}$, без использования предположения о том, что зацепление хорошее.

Определим полином $Q(\lambda_1 L_1 \cup \lambda_2 L_2 \cup \lambda_3 L_3)$, который зависит от попарных коэффициентов зацепления $\mathbb{L}$ и вектора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Рассмотрим инвариант:

$$Q(\mathbb{L}) = \tilde{M}^{tube}(\lambda_1 L_1 \cup \lambda_2 L_2 \cup \lambda_3 L_3) - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^4 \tilde{M}^{tube}(L_1 \cup L_2 \cup L_3). \quad (20)$$

Для хороших зацеплений $\mathbb{L}$ получим, что Q является полиномом, поскольку Q инвариант конечного типа и зависит лишь от попарных коэффициентов зацепления.

Докажем, что полином Q работает для произвольного зацепления. Случай, когда ровно один показатель кабеля равен нулю несложный, но его следует разобрать отдельно. При таком

ограничении (20) обращается в ноль, поэтому полином Q содержит мономы строго положительной степени. Рассмотрим общий случай, $k(\mathbb{L}) \neq 0$, не предполагая, что зацепление $\mathbb{L}$ -хорошее.

Упорядочим мономы полинома Q в лексикографическом порядке, пусть $\xi(\alpha, \beta, \gamma)(2, 3)^\alpha(3, 1)^\beta(1, 2)^\gamma$ является старшим мономом. Выберем хорошее зацепление $\mathbb{L}_1 = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ для которого $(2, 3)^\alpha(3, 1)^\beta(1, 2)^\gamma \neq 0$. Например, можно определить $\mathbb{L}_1 = \text{Horf}(+1, +1, +1)$. Рассмотрим вектор $(\lambda_1 = \mu_2^2 \mu_3^2, \lambda_2 = \mu_3^2 \mu_1^2, \lambda_3 = \mu_1^2 \mu_2^2)$, где $\mu_3 \gg \mu_2 \gg \mu_1 > 0$. Тогда старший моном в выражении $Q(\mathbb{L}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ больше (по абсолютной величине), чем сумма всех остальных мономов: $Q(\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2, \lambda_3 L_3) \neq 0$. С другой стороны, зацепление $(\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2, \lambda_3 L_3)$ является хорошим, если $\mathbb{L}$ является хорошим. Это возможно лишь при $Q \equiv 0$. Асимптотическое свойство доказано для произвольного зацепления $\mathbb{L}$. Лемма 9 и Утверждение 1 Теоремы 1 [1] доказано. $\square$

Доказательство Теоремы 1, Утверждение 2 [AS1]

Это следует из Леммы 4, часть 1. $\square$

Доказательство Теоремы 1, Утверждение 3 [AS1]

Оба инварианты в каждой части равенства испытывают одинаковый скачок при Δ -движениях, см. [2], [A2] для скачка интегрального инварианта. Для хороших зацеплений совпадение нормировок следует из асимптотического свойства для зацепления $\text{Horf}(+1, +1, +1)$. Для произвольного зацепления это следует из того, что оба инварианта конечного типа (ср. Утверждение 2, Лемма 9). $\square$

Доказательство Теоремы 1, Утверждение 4 [AS1]

Доказательство понятно. $\square$

5. Инвариант M

По построению инварианта M^{tube} справедлива формула связи: $M^{\text{tube}}(\mathbb{L}^\odot) = \tilde{M}(\mathbb{L}^\odot) + P$, где P — некоторая рациональная функ-

ция от попарных коэффициентов зацепления $L^\odot$. Действительно, рациональный инвариант M^{tube} , и целый инвариант $\tilde{M}$ имеют одинаковый подскок при Δ -движениях. Хорошее зацепление $L^\odot$ в классе Δ -эквивалентности представлено соответствующим кабелем зацепления Хопфа, при этом формула для $\tilde{M}$ являются полиномами от попарных коэффициентов зацепления. Поэтому R в правой части формулы связи для хорошего зацепления является полиномом. Для произвольного зацепления утверждение вытекает из п.2 Леммы 9. Полином R определен единственным способом, см. классификацию мономов в [1] раздел 4. Наша цель — вычислить полином R явно (см. Теорему 1 [1]).

1.1 Правое зацепление $(1, 3) = (2, 3) = p^2 r$; $(1, 2) = p^2$

Пусть L — произвольное зацепление. С точностью до внутренней симметрии существует четыре класса эквивалентности ($k \neq 0$) зацеплений существует лишь два класса правых зацеплений: правый $k > 0$ и левый $k < 0$. При условии $(1, 3) = (2, 3)$ для случая правого класса рассмотрим представитель такой, что $(1, 2) > 0$. Возможны два эквивалентных случая: $(1, 3) < 0$; $(2, 3) < 0$ (этот случай соответствует $r < 0$) и $(1, 3) > 0$; $(2, 3) > 0$.

Приведем формулу для R -слагаемого полинома в рассматриваемом случае:

$$R = 1/12(1, 3)^6(1, 2) + 1/6(1, 3)^4(1, 2)^3 \quad (21)$$

Формулу (21) следует рассматривать для произвольного правого зацепления (т.е. при условии $0 \leq (1, 2)(2, 3)(3, 1) = k$) и при условии $(2, 3) = (1, 3)$. Геометрически возможен лишь случай: $(1, 2) \leq |(1, 3)| = |(2, 3)|$; при этом условие $0 \leq (1, 2)$ следует из условия $0 \leq k$.

Аналогичная формула выписывается для левого зацепления $k \leq 0$. Для этого случая $(1, 2) \leq 0$, остальные условия аналогичны. Слагаемые заданы нечетными мономами и их значения при переходе от правого зацепления к левому изменяют знаки на противоположный.

Интересно, что формула работает и без предположения о минимальности абсолютного значения коэффициента $(1, 2)$. С

геометрической точки зрения это не очевидно, поскольку кабель с числом витков, меньшем 1 не определен и показатель кабеля не может быть дробным. Этот результат подтверждается экспериментом и вытекает из Леммы 9 о продолжении инварианта M конечного порядка с множества ”хороших” зацеплений на все зацепления.

5.1 Подслучай $p = 1$

Лемма 10

Рассмотрим зацепление $L_0 = L_0((-1, -r, +r))$ (см. Рис. 3, [1] для $(1, 2) = -1$, $(2, 3) = -r$, $(3, 1) = +r$), здесь r произвольный целый параметр, не обязательно положительный. Рассмотрим зацепление $L_1 = L_0(-1, -r, +r)_{\text{cable}_r(3)}$ с теми же попарными коэффициентами зацепления, полученное p -кратным кабелем компоненты L_3 зацепления $L_0(-1, -1, +1)$. Рассмотрим семейство Δ -преобразований первого зацепления во второе:

$$\Psi : L_0 \mapsto L_1. \quad (22)$$

Подскок $\delta_\Psi \tilde{M}$ инварианта $\tilde{M}$ при преобразовании (22) определяется формулой:

$$\delta_\Psi \tilde{M} = -\frac{1}{12}r^6 - \frac{11}{12}r^4. \quad (23)$$

Доказательство Леммы 10

Вычислим $\tilde{M}(L_1)$. Утверждение Леммы вытекает из равенства $\tilde{M}(L_1) = \delta_\Psi \tilde{M}$, поскольку $\tilde{M}(L_0) = 0$. Проведем Δ -движение, связывающее кабель над $L_0(-1, -1, +1)$ с кабелем

$$L_{\text{Hopf}}(-1, -1, +1)_{\text{cable}_r(3)}.$$

Равенство (22) переписывается в эквивалентном форме:

$$\tilde{M}(L_{\text{Hopf}}(-1, -1, +1)_{\text{cable}_r(3)}) = -\frac{1}{12}r^6 + \frac{1}{12}r^4. \quad (24)$$

Здесь использовалось правило подскока $\tilde{M}$ инварианта для r -кабеля при Δ -движении (см. Предложение А3 [1]), элементарное

свойство инварианта при развязывании хопфовского зацепления (на $+1$) см. вычислительный Пример Fig.6.

Докажем равенство (24) Заметим, что для хопфовского зацепления компоненты L_1, L_2 можно сблизить и включить в общий полноторий U так, что компонента L_3 (по которой взят кабель) расположена в полнотории $W \subset \mathbb{R}^3 \setminus U$, центральная линия которого зацеплена с полноторием U . Значение $\tilde{M}$ -инварианта не зависит от выбора компоненты L_3 внутри полнотория W , Замечание 1 [1]. Расположим компоненту L_3 как вторую компоненту зацепления $\mathbb{L}_{Hopf}(r)$ с разнонаправленной удвоенной первой компонентой, охватывающей компоненту L_1 вблизи центральной линии r витками (компоненту $L_2 - r$ витками), обозначим описанное зацепление через $\mathbb{L}_3(r)$. Докажем, что $\tilde{M}(\mathbb{L}_3(r))$ зависит от r как полином степени не выше 6. Эквивалентно, $\gamma(\mathbb{L}_3(r))$ зависит от r как полином степени не выше 4.

Рассмотрим разность $\gamma(\mathbb{L}_3(r)) - \gamma(\mathbb{L}_3(r-1))$. Поскольку нам достаточно установить лишь степень полинома, заменим разность $c_1(\mathbb{L}_3(r)) - c_1(\mathbb{L}_3(r-1))$, поскольку достаточно оценить лишь степень главного слагаемого в формуле инварианта γ , а степень остаточных слагаемых легко оценивается. Разность $c_1(\mathbb{L}_3(r)) - c_1(\mathbb{L}_3(r-1))$ оценивается через соотношение Конвея для 2-компонентных зацеплений, возникающих (дважды) при переходе от $\mathbb{L}_3(r)$ к $\mathbb{L}_3(r-1)$. Удобно расцепить компоненты L_1, L_2 зацепления $\mathbb{L}_3$, $\mathbb{L}_3 \mapsto \mathbb{L}'_3$, что по соотношению Конвея не приведет к изменению $c_1(\mathbb{L}_3)$. Обозначим первое 2-компонентное зацепление при развязывании $\mathbb{L}'_3(r) \mapsto \mathbb{L}'_3(r-1)$ через $\mathbb{L}_4$. Зацепление $\mathbb{L}_4$ состоит из двух незаузленных компонент, поэтому $c_1(\mathbb{L}_4) = \beta(\mathbb{L}_4)$. Инвариант Сато-Левина $\beta(\mathbb{L}_4)$ легко вычисляется, это полином третьей степени. При развязывании достаточно просуммировать:

$$1 \cdot (r-1) + 2 \cdot (r-2) + \dots + (r-1) \cdot 1 = \frac{r^3 - r}{6}. \quad (25)$$

Теперь формула (24) вычисляется по первым трем значениям $r = 0, 1, 2$. Действительно, все β -инварианты, входящие в формулу для γ и $\tilde{M}$ между собой сокращаются, а для вычисления $c_1(\mathbb{L}_3)(r)$ достаточно заметить, что это четный полином по r и такой полином восстанавливается по значениям в трех различ-

ных точках, такое вычисление проводилось в Лемме 2. Лемма 10 доказана. $\square$

Докажем, что в рассматриваемом случае R -полином получается подстановкой $(1, 2) = +1$, $(2, 3) = r$, $(3, 1) = r$ в формулу (10), что составит:

$$R(+1, r, r) = \frac{r^6 - r^4}{12}. \quad (26)$$

Действительно, значение R -полинома на произвольном зацеплении $\mathbb{L}$ определится разностью:

$$R((1, 2), (2, 3), (3, 1)) = M^{tube}(\mathbb{L}) - \tilde{M}^{av}(\mathbb{L}), \quad (27)$$

где первое слагаемое в правой части является асимптотическим инвариантом, которой выражается рациональным инвариантом нормализующего зацепления. Тогда по смыслу левая часть равенства (26) является полиномом, который нужно добавить к $\tilde{M}^{av}$, чтобы инвариант совпал с асимптотическим. Поскольку $M^{tube}(\mathbb{L}_{Horf}(+1, r, r)) = -\frac{r^4}{4}$, равенство (26) получается подстановкой значения $\tilde{M}^{av}$ в (27), которое получается при $k = 1$ из формулы (10).

5.2 Подслучай $r = 1$

Вычислим значения правой части формулы (27) в рассматриваемом подслучае для зацепления $\mathbb{L}_{Horf}(k, k, k)$. Используется (10) при $r = 1$ и формула (3),(4) Получается формула:

$$R(+k, +k, +k) = \frac{k^7 - k^6}{4}, \quad (28)$$

что совпадает с формулой (21) при подстановке $(1, 2) = (2, 3) = (3, 1) = +k$.

Общий случай объединяет два подслучая 5.1, 5.2

Для доказательства асимптотического свойства (5) [1] достаточно воспользоваться формулой (10) и Леммой 3. Согласно указанной лемме, асимптотическое свойство по параметрам k, r

достаточно проверить для зацепления $\mathbb{L}_{Hopf}(k, rk, rk)$, что следует из того, что сумма (10) и значения $\tilde{M}^{av}$ равно третьему слагаемому в формуле (21) которое и выражает асимптотическое свойство (5), [1]. Для формального доказательства достаточно вычислить разность инвариантов $\tilde{M}^{tube} - \tilde{M}^{av}$, что приведет к тому же результату, поскольку на указанном зацеплении $\tilde{M}^{tube}$ принимает значение третьего слагаемого в формуле (21), а первые два слагаемых равны значению $-\tilde{M}^{av}$.

О степени полинома P в формуле асимптотического M -инварианта

Мы докажем следующее предложение, которое в доказательстве Теоремы 1 [1] не используется.

Предложение 11

1. В предположении $(1, 2) = (2, 3) = (3, 1) = p^2$, степень полинома P по переменной p в формуле ([1] формула (31)) равна 14.
2. В предположении $(1, 2) = 1, (2, 3) = (3, 1) = r$ степень полинома P по переменной r в формуле ([1] формула (31)) равна 6.

Доказательство Предложения 11

Докажем п.1. Значение $\tilde{M}$ инварианта на $\mathbb{L}_{Hopf}(p^2, p^2, p^2)$ по формулам (3)(4) является полиномом степени p^{14} . По Лемме 3 значение $\tilde{M}(p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1))$ также является полиномом степени 14. По формуле (5) [AS1], примененной к $\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)$ для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ значение $M(p\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1))$ является либо нулем, либо полиномом степени 12. Значит, по Лемме 4 полином $P(p)$, определяющий разность значений $\tilde{M}, M$ на этом хопфовском зацеплении, имеет степень 14. Заметим, что для доказательства достаточно использовать результат леммы с точностью до слагаемого $O(p^{12})$, что доказывается проще, чем сама лемма.

Докажем п.2. Согласно формуле (24), значение $\tilde{M}$ инварианта на зацеплении $\mathbb{L}_{Hopf}(+1, +1, +1)_{cable_r(3)}$ является полиномом степени 6. Правая часть формулы (5) [1] в этом случае является

полиномом по r степени 4 (либо, тождественно равна нулю). Поэтому полином $P(r)$, определяющий разность значений $\tilde{M}$, M на этом хопфовском зацеплении, имеет степень 6. Предложение 11 доказано. $\square$

6. M -инвариант, общий случай

Пусть p, q, r – натуральные параметры, причем выполнено соотношение:

$$0 < p \leq q \leq r. \quad (29)$$

Рассмотрим зацепление $\mathbb{L}$, имеющее коэффициенты зацепления $(1, 2) = pq$, $(2, 3) = qr$, $(3, 1) = pr$. Предположим, что кратные $\frac{q}{p}$, $\frac{r}{p}$ являются натуральными, т.е. указанные пары чисел делятся без остатка, будем писать $p[\frac{q}{p}] = q$, $p[\frac{r}{p}] = r$. Хорошие зацепления, определенные в разделе 4, при дополнительном предположении о натуральных кратных, лежат в таком классе зацеплений, которые мы по-прежнему будем называть хорошими. Пример хорошего зацепления с тремя различными попарными коэффициентами зацепления для случая $p = 1, q = 2, r = 3$ изображён на рисунке Рис. 1.

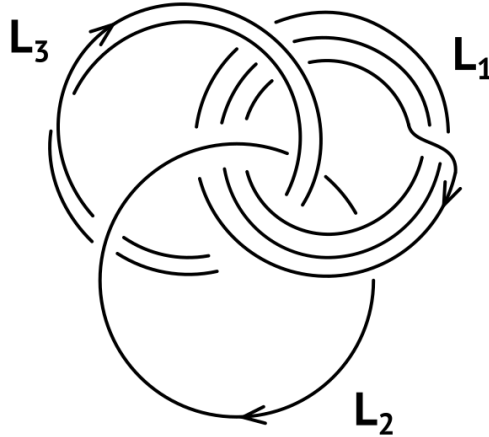


Рис. 1

Наряду с $\mathbb{L}$, рассмотрим зацепление $\hat{\mathbb{L}} = \mathbb{L}_{cab_{[\frac{r}{p}]}(2); cab_{[\frac{q}{p}]}(3)}$, полученное из $\mathbb{L}$ в результате кабелей кратностей $\frac{r}{p}$, $\frac{q}{p}$ по второй и по третьей компонентам соответственно.

Для зацепления $\hat{\mathbb{L}}$ набор попарных коэффициентов зацепления имеет вид: $(1, 2) = qr$, $(1, 3) = qr$, $(2, 3) = \frac{q^2 r^2}{p^2} = qr[\frac{q}{p}][\frac{r}{p}]$. Определим искомым инвариант M (записанный в рациональной форме, что помечено $\hat{M}$) по формуле:

$$\hat{M}(\mathbb{L}) = [\frac{p}{q}]^4 [\frac{p}{r}]^4 M(\hat{\mathbb{L}}),$$

где инвариант $M(\hat{M})$ определен по формуле (4) [1], что корректно, поскольку зацепление $\hat{M}$ удовлетворяет условию подраздела 1.1 раздела 5 и для него полином R определён по формуле (21).

Очевидно, что инвариант $\hat{M}$ является асимптотическим. Покажем, что этот инвариант определен для произвольных зацеплений (а не только в предположении о специальном виде коэффициентов зацепления и о натуральных значениях дробей $\frac{q}{p}$, $\frac{r}{p}$), причем этот инвариант записывается формулой (4) [1]. Заметим, что разность $\tilde{M}(\mathbb{L}) - \hat{M}(\mathbb{L})$ является инвариантом, зависящим лишь от попарных коэффициентов зацепления компонент. Кроме того, для хорошего зацепления этот инвариант является полиномом от параметров $p^2, \frac{q}{p}, \frac{r}{p}$. Действительно, вычислим инвариант $\hat{M}(\mathbb{L}) - \tilde{M}(\mathbb{L})$ для кабеля над хопфовским зацеплением, которое представляет хороший узел в его классе эквивалентности. Вычитаемое в формуле является полиномом от указанных параметров. Уменьшаемое также является полиномом от $p^2, \frac{q}{p}, \frac{r}{p}$, вычисляемым из формул (4), (10) с учетом Леммы 3. Действительно, оба слагаемых в формуле (10), применяемых к $\hat{\mathbb{L}}$, нацело делятся на $[\frac{q^2 r^2}{p^4}]^2$, $\frac{qr}{p^2} = [\frac{q}{p}][\frac{r}{p}]$. Для этого зацепления нужно применить переобозначения в указанной формуле $k \mapsto p^2$, $r \mapsto \frac{qr}{p}$.

Инвариант $\hat{M}(\mathbb{L}) - \tilde{M}(\mathbb{L})$ продолжается до инварианта на всех зацеплениях полиномом с той же формулой. При таком продолжении параметры $p^2, \frac{q}{p}, \frac{r}{p}$ окажутся, вообще говоря, рациональными. Эти параметры выражаются через коэффициенты зацепления $(1, 2) \leq (1, 3) \leq (2, 3)$ по формулам: $p^2 = \frac{(1,2)(1,3)}{(2,3)}$, $\frac{q}{p} = \frac{(2,3)}{(1,3)}$, $\frac{r}{p} = \frac{(2,3)}{(1,2)}$. Поэтому для хороших зацеплений $\tilde{M}(\mathbb{L}) +$

$(\hat{M}(\mathbb{L}) - \tilde{M}(\mathbb{L}))$ записывается от указанных переменных в виде формулы (4) [1].

Чтобы увидеть, что инвариант является обобщением случая $(1, 2) = p^2, (1, 3) = (2, 3) = p^2 r$, запишем формулу (21) в виде:

$$R = 1/12 p^{14} r^6 + 1/6 p^{14} r^4. \quad (30)$$

Если в нашем случае $(1, 2) = (1, 3)$, в формуле (30) переобозначаем $p \mapsto q, r \mapsto p$. Если же $(1, 2) \neq (1, 3)$, то явная формула для R -полинома нами не получена.

По Лемме 9 инвариант удовлетворяет асимптотическому свойству для произвольных зацеплений, поскольку удовлетворяет свойству асимптотичности для хороших (сделанное усиление понятия хорошего зацепления требует соответствующей модификации доказательства). Теорема 1 [1] доказана.

7. Обсуждение и выводы

Мы доказали, используя лишь полином Конвея одной переменной, что существует асимптотический инвариант M_3 для классических трехкомпонентных ориентированных зацеплений с полным порядком компонент. Этот инвариант имеет конечный тип в смысле Васильева. Построенный инвариант удовлетворяет асимптотическому свойству (5)[AS1] и меняет знак при зеркальной симметрии зацепления.

Главное слагаемое имеет порядок 7, что приводит к формальному показателю 14 в асимптотической формуле. Тем не менее, суммарный показатель асимптотики по всем трем компонентам равен 12, что делает задачу трудной, поскольку старшее слагаемое в асимптотической формуле присутствуют лишь формально и сокращается. Остаточный полином P в формуле ([1] формула (31)) определен суммой полинома P_1 (25) [1] и полинома R . В случае, когда два из трех попарных коэффициентов зацепления равны, $(1, 3) = (2, 3)$, полином R определен по формуле (21). В общем случае полинома R определен (без вычисления) в подразделе 6. Полином P_1 был выписан в работе [2], в то время как полином R ранее известен не был.

На основе инварианта M_3 строится инвариант магнитных линий, в случае магнитного поля с замкнутыми магнитными линиями этот инвариант совпадает с интегральным инвариантом, определенным в [2]. Интегральный инвариант M является эргодическим, как показано в [5]. Класс гладкости магнитного поля, требуемый для выполнения свойства эргодичности инварианта, не указан явно, из конструкции вытекает, что требуется гладкость порядка $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, т.е. частные производные компонент магнитного поля непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера с некоторой строго положительной константой. Следует заметить, что из результата Е. А. Кудрявцевой [6] вытекает, что класс магнитного поля в рассматриваемом контексте не может быть понижен до 1.

M -инвариант определяет калибровочно-инвариантную функцию плотности магнитного поля, которая является абсолютно суммируемой функцией на конфигурационном пространстве начальных точек троек магнитных линий. Это свойство находит приложения для теории среднего магнитного поля.

Оказалось, что для зацепления Хопфа значение инварианта M нулевое, что исправляет результат работы [7]. Следует специально отметить, что исправление появилось благодаря консультации первого автора с С. А. Мелиховым. Полученная нами комбинаторная формула M -инварианта позволяет исправить рассуждение в работах [8], [9]. Из наших вычислений вытекает, что M инвариант для зацепления с близкой парой асимптотически близких случайно перекрученных зацепленных линий и третьей далекой, зацепленных с каждой из линий пары как у хопфовского зацепления, обращается в ноль. Если рассматривать тройку случайных перекрученных асимптотически близких магнитных линий, то, с одной стороны, эта тройка дает искомый вклад в α -слагаемое, с другой стороны, связано с M -инвариантом магнитного потока, который из вычислений зависит от параметра кривизны пространства. Неправильное применение комбинаторной формулы M -инварианта не влечет исправлений основные результатов этих работ, которые относятся к оценке α -эффекта МГД-спектров.

Численный эксперимент, проводимый вторым автором, бла-

годаря которому формулу (21) удалось в той или иной степени проверить, не завершён. Авторы надеются, что для зацепления с произвольными попарными коэффициентами зацепления аналог формулы (21) будет надёжно экспериментально подтверждён. В последующих публикациях планируется перенести результаты продолжить численный эксперимент на случай инварианта M_5 [2], что потребует применения теории полинома Конвея двух переменных. Первый автор благодарит С. А. Мелихова за указание на ссылки [3], [4], которые для этой задачи могут потребоваться.

Литература

1. Ахметьев П. М., Смирнов С. Ю. *Комбинаторная формула для M -инварианта магнитных линий I* // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики: Труды XVI приокской научной конференции. – Коломна: ГСГУ, 2026. – С. 38–68.
2. Akhmet'ev P. M. *Topological meaning of the slope of the Kolmogorov spectrum of magnetic turbulence: M_5 -invariant of magnetic lines and its combinatorial formula*, J. Geom. Phys. 178 (2022) 104583.
3. Cimasoni D., *The Conway function of a splice*. arXiv:math/0407130v1 [math.GT] 8 Jul 2004.
4. Turaev V. G. *Reidemeister torsion and the Alexander polynomial*, Math. USSR-Sb., 30:2 (1976), 221–237.
5. Ахметьев П. М. *К работе Топологический смысл наклона колмогоровского спектра магнитной турбулентности*, Journal of Mathematical Science, выпуск посвященный конференции в Суздале-2024, в печати.
6. Кудрявцева Е. А. *Спиральность – единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 -топологии производной*, Матем. заметки, 99:4 (2016), 626–630; Math. Notes, 99:4 (2016), 611–615.
7. Ахметьев П. М. *Инварианты узлов в геодезических потоках*, Дифференциальные уравнения и динамические системы,

Сборник статей, Труды МИАН, 308, МИАН, М., 2020, 50–64.

8. Akhmet'ev P. M., Dvornikov M. S. *Invariants of magnetic lines for Yang-Mills solutions*, Journal of Geometry and Physics, <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105102> (2024).
9. Dvornikov M. S., Akhmetiev P. M. *Evolution of a Large Scale Chern-Simons Magnetic Field in Expanding Space with a Negative Scalar Curvature Parameter*, Physics of Particles and Nuclei, 2025, Vol. 56, No. 2, pp. 269–274.

Байбакова Ж. Р.

Ожерелье Антуана и его топологические свойства

Топология, как наука о непрерывности, занимается изучением свойств объектов, которые остаются неизменными при деформациях, растяжениях, сжатиях и сгибаниях, без разрывов и склеиваний. В топологии часто встречаются контринтуитивные примеры, демонстрирующие сложность и нетривиальность пространства. Одним из интересных объектов, исследуемых в топологии, является антуановское множество, также известное как антуановская цепочка или ожерелье, играющее важную роль в понимании свойств пространств.

Начнём с вопроса о стягиваемости линий:

- Пусть I - простая замкнутая линия, расположенная в фигуре M .
- Будем говорить, что линия l стягиваема в M , если существует поверхность P , гомеоморфная кругу и имеющая l своим краем, которая расположена (возможно, с самопересечениями) в фигуре M .

Термин “стягиваемость” связан с тем, что на “круге” P можно начертить систему “концентрических окружностей”, по которым I может быть постепенно стянута в точку [1].

Рассмотрим следующее **утверждение о стягиваемости**:

Если фигура A состоит из конечного числа точек, то окружность l , расположенная в пространстве вне A , может быть вне A стянута.

Утверждение можно пояснить следующим образом:

Если l — окружность, не проходящая через точки фигуры A (состоящей из конечного числа точек), то круг, натянутый на l (даже если он проходит через некоторые из точек фигуры A), может быть при помощи небольшой деформации “снят” с тех точек фигуры A , через которые он проходил.

Может создаться впечатление, что в дополнительном пространстве произвольного нульмерного множества A любая окружность стягиваема. Однако это неверно.

1) Рассмотрим замкнутую цепь A_1 , состоящую из нескольких сцепленных звеньев (рис. 1а)).

2) Далее, заменим каждое звено аналогичной замкнутой цепочкой из более мелких звеньев, проходящей внутри прежнего звена. Мы получим множество $A_2 \subset A_1$, состоящее из многих мелких звеньев (рис. 1б)).

3) Теперь каждое звено, составляющее множество A_2 , заменим замкнутой цепочкой еще более мелких звеньев (располагающейся внутри прежнего звена). Мы получим множество $A_3 \subset A_2$.

4) Продолжая этот процесс, получим последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

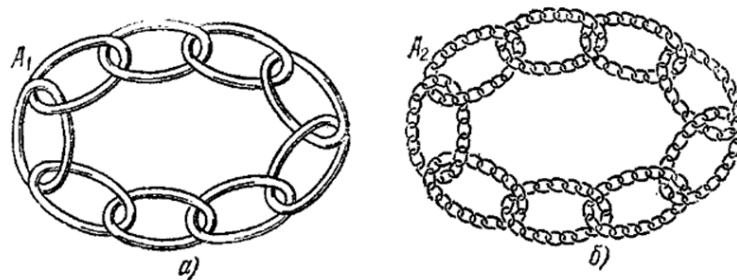


Рис. 1:

Пересечение всех этих множеств представляет собой антуановское множество A^* .

Данное множество нульмерно. В самом деле, размеры звеньев, составляющих множество A_n , неограниченно уменьшаются с ростом n , и потому в A^* не существует связных множеств, отличных от точки.

- Пусть теперь l_1 — окружность, сквозь которую проходит первоначально взятая цепочка A_1 , и K_1 — круг с границей l_1 .
- На рис.2а) круг K_1 пересекает тор T_1 , служащий поверхностью одного из звеньев цепи, по двум окружностям (меридианам); одна из них обозначена через l_2 .
- Часть круга K_1 , ограниченная линией l_2 , представляет собой меньший круг K_2 . Этот меньший круг по отношению к части множества A_n , расположенной внутри тора T_1 , находится в таком же положении, что и круг K_1 по отношению ко всему множеству A , (рис.2б)).
- Можно себе представить, что K_2 , (а потому и K_1) пересекает один из торов (служащих границами звеньев множества A_n) по двум меридианам; один из них обозначим через l_3 и т. д.

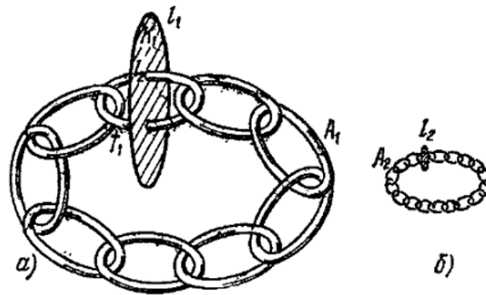


Рис. 2:

Таким образом, круг K_1 (“пленка”, натянутая на l_1) пересекается и с множеством A_1 , и с A_2 , и с A_3 и т. д, откуда вытекает, что K_1 пересекается и с предельным множеством A^* .

Разумеется, на l_1 можно натянуть не только K_1 , но и иную пленку, являющуюся непрерывным образом круга; однако проведенное рассуждение поясняет, что любая такая пленка пересекается с A^* .

Итак, окружность l_1 не стягиваема во внешнем пространстве антуановского множества A^* . Это нульмерное, как бы рассыпающееся на отдельные точки множество “мешает” провести пленку (являющуюся непрерывным образом круга), натянутую на l_1 .

В топологии термин “ожерелье Антуана” (или “антуанова цепочка”) относится к специфической конструкции, используемой для построения примеров и контрпримеров в теории размерности, теории продолжения и других разделах топологии. Построено ожерелье в 1921 году Луи Антуаном, который внёс значительный вклад в развитие топологии в начале 20 века.



Рис. 3:

Во время войны Антуан потерял зрение, это стало большой проблемой, так как на тот момент ещё не разработали единую для всех математиков азбуку Брайля, и пришлось ветерану со своими друзьями придумывать собственные обозначения математических символов для слепых и благодаря упорному труду, Антуан сумел не только освоить новые для себя области наук, но и защитить докторскую диссертацию на тему “О гомеоморфности двух фигур и двух окрестностей”. Как раз в ней и содержались первые упоминания об “ожерелье Антуана”.

Определение. *Ожерелье Антуана* — это последовательность вложенных друг в друга торов (или других подобных объектов) в трёхмерном пространстве, которые становятся всё меньше и тоньше, приближаясь к некоторому пределу.

Эта конструкция используется для демонстрации сложных топологических свойств, таких как:

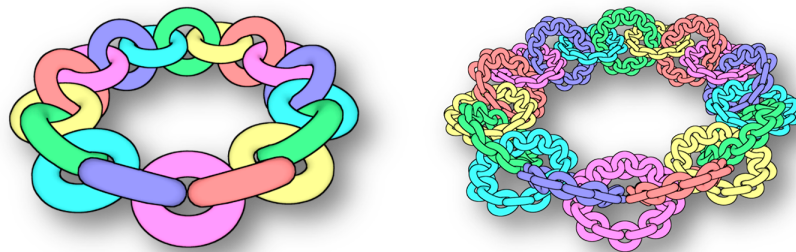


Рис. 4:

1. Неприводимые континуумы — множества, которые нельзя разбить на меньшие связные компоненты.
2. Примеры пространств с неожиданными свойствами — например, пространства, которые локально выглядят как евклидовы, но глобально имеют сложную структуру.

Построение ожерелья Антуана

Антуановское множество строится итеративно, то есть процедура выполняется многократно, при этом результат каждой итерации используется в следующей:

1. Начнем с тора T_0 в R^3 .
2. Вложим в него другой тор T_1 , “скрученный” и связанный с T_0 (например, как показано на классических иллюстрациях). T_1 должен быть достаточно малым, чтобы поместиться внутри T_0 .
3. Вложим в T_1 еще один тор T_2 , с еще более сложным скручиванием и связью. И T_2 должен быть достаточно малым, чтобы поместиться внутри T_1 .
4. Продолжаем этот процесс бесконечно. Каждый тор T_{i+1} вложен в предыдущий тор T_i , причем вложение становится все более сложным на каждом шаге.

Антуановское множество A определяется как пересечение всех этих торов: $A = \bigcap T_i$, где $i = 0, 1, 2, \dots$

Некоторые нюансы построения:

- Выбор торов: Выбор формы и размеров торов на каждом шаге имеет значение. Часто выбирают торы с уменьшающимся радиусом, чтобы процесс сходил к компактному множеству.
- Способ вложения: Самый важный аспект — это способ вложения меньших торов. Вот некоторые подходы:
 - Цепное вложение: Меньшие торы вкладываются в виде цепи, где каждый тор проходит через предыдущий.
 - Заузленное вложение: Меньшие торы вкладываются в виде узла, который не может быть развязан без разрыва тора T_0 .
- Количество торов (n): Количество торов n на каждой итерации также влияет на сложность антуановского множества.

Свойства

- Топологическая сложность — ожерелье Антуана является примером неприводимого континуума, то есть его нельзя разбить на два меньших связных множества.
- Несвязность: т.к. Антуановское множество является несвязным, оно состоит из нескольких отдельных “частей”, которые не связаны между собой, даже если выглядят как непрерывная цепочка. Чтобы перейти от одной части множества к другой, необходимо покинуть само множество.
- Непростое дополнение: Дополнение антуановского множества (то есть все точки пространства, не принадлежащие множеству) не является просто связным. Это значит, что в дополнении существуют “дыры”, которые делают его топологически сложным. В отличие от простой петли, которую можно легко “развязать”, антуановскую цепочку нельзя развязать простыми деформациями в R^3 .
- Фрактальная природа — конструкция имеет самоподобную структуру (фрагменты множества похожи на целое), что делает её полезной для изучения фракталов и размерности.

Антуановское множество служит важным контрпримером в топологии и других областях математики. Оно демонстрирует, что интуитивные представления о пространстве могут быть обманчивыми, и что свойства объектов могут быть гораздо более сложными, чем кажется на первый взгляд.

- Ожерелье Антуана часто используется для построения примеров в теории продолжения непрерывных функций. Например, оно помогает показать, что не все непрерывные функции, определённые на подмножестве пространства, можно продолжить на всё пространство.
- Также оно используется для демонстрации того, что размерность (например, топологическая) может вести себя неинтуитивно в сложных пространствах.
- Антуановская цепочка является примером сложного узла. Исследование таких объектов помогает развитию теории узлов, которая имеет приложения в различных областях, таких как молекулярная биология (узлы в ДНК), физика и компьютерная графика.
- Данное множество можно рассматривать как фрактальный объект, что делает его интересным для изучения фрактальной геометрии.

Ожерелье Антуана – это захватывающий пример патологического множества, которое демонстрирует необычные свойства и бросает вызов интуитивному пониманию пространства. Его изучение имеет важное значение для понимания базовых концепций топологии и развития других областей математики. Изучение таких объектов помогает расширить наше понимание мира и сложных структур, которые существуют вокруг нас. Несмотря на кажущуюся абстрактность, антуановское множество является ярким примером того, как математические исследования могут приводить к новым открытиям и пониманию.

Ожерелье Антуана примечательно тем, что оно является первым “диким вложением” множества в трехмерное пространство. Используя идеи Антуана, Джеймс Александер изобрел свою знаменитую рогатую сферу.

Сложность формы ожерелья Антуана имеет не только чисто математическую ценность, о которой шла речь выше. Такие сложные объекты можно использовать и в образовательном процессе, используя их в качестве объекта 3D-моделирования, например, во внеурочной деятельности в школе [2]. Моделирование даже T_1 , не говоря уже о T_2 и последующих итерациях ожерелья Антуана, потребует от учащихся применения всех навыков пространственного мышления и повышенных знаний в области стереометрии.

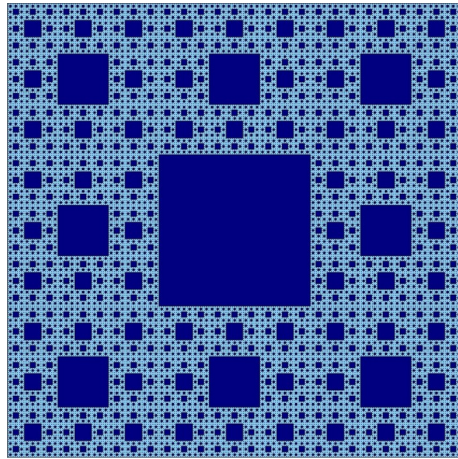
Литература

1. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.
2. Бунаков П. Ю., Лебедева А. Д., Лопатин А. К. Комплексное изучение 3D-моделирования и программирования в рамках курса внеурочной деятельности // Вестник Государственного социально-гуманитарного университета, 2019, №3 (35), Естественные науки, С. 3–7.

Винник К. С.

Ковёр Серпинского и его фрактальная размерность

Ковёр Серпинского – один из самых известных фракталов, который в своей сущности является воплощением концепции самоподобия и бесконечности. Назван в честь польского математика Вацлава Серпинского, который в 1916 году первым описал его свойства.



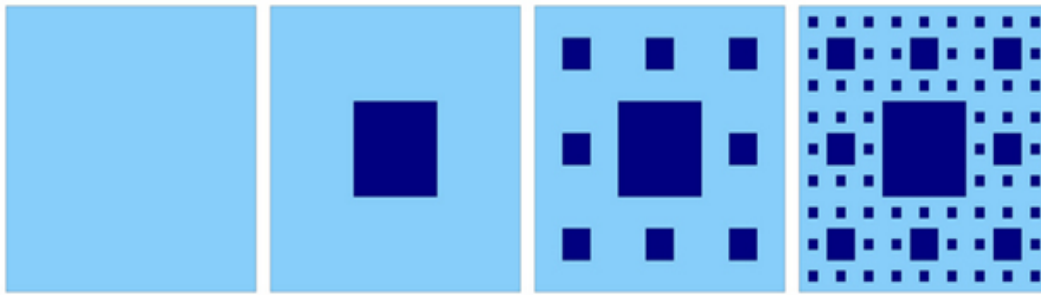
Фрактал (от лат. *fractus* — «раздробленный») — естественный объект или математическая модель объекта, обладающий свойством самоподобия, то есть в точности или приближённо совпадающий со своей частью.

Другими словами, если мы рассмотрим небольшой фрагмент ковра Серпинского в увеличенном масштабе, то это, в отличие от обычных фигур, не приведет к упрощению рисунка: напротив, откроется столь же сложная картина, что была сначала.

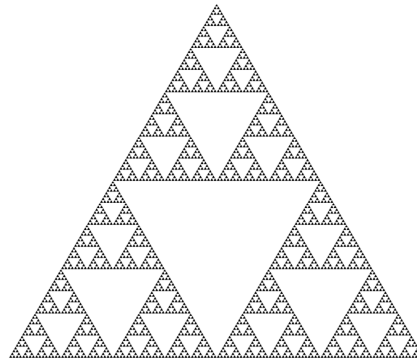
Построение ковра Серпинского

Ковёр Серпинского, как и многие другие фракталы, строится итеративно (по шагам) следующим образом. В качестве начального объекта берётся квадрат. На первом шаге нужно разбить этот квадрат на 9 равных квадратиков, а затем удалить центральный из них. На втором шаге каждый из оставшихся восьми квадратиков также надо мысленно разделить на 9 равных квадратиков, после чего удалить центральный из них. На третьем шаге та же самая операция проводится с каждым из 64 оставшихся квадратиков и так далее до бесконечности. То, что остается в итоге, после завершения этой бесконечной процедуры, и называ-

ется ковром Серпинского.



Ещё одна самоподобная фигура, аналогичная коврику Серпинского, — «салфетка Серпинского». Её строят, начиная не с квадрата, а с правильного треугольника, и вырезая центральные треугольники.



Свойства ковра Серпинского

Свойство 1. *Площадь ковра Серпинского равна нулю.*

Доказательство. Пусть длина стороны исходного квадрата равна единице, тогда и площадь квадрата равна 1.

- на первом шаге выкидывается квадрат, площадь которого равна $\frac{1}{9}$;
- на втором шаге выкидываются 8 квадратов, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{9^2}$;
- на третьем шаге выкидываются $8^2 = 64$ квадратика, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{27^2}$;
- ...

Легко видеть, что площади вырезаемых частей образуют геометрическую прогрессию с начальным членом $\frac{1}{9}$ и знаменателем $\frac{8}{9}$. Поэтому, суммируя, мы обнаруживаем, что, шаг за шагом

выкидывая все больше квадратиков, в конце концов мы вырежем бесконечно много кусков, общая площадь которых составит:

$$\frac{1}{9} \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9} \right)^2 + \left(\frac{8}{9} \right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 1.$$

То есть останется фигура площади $1 - 1 = 0$. Этот же факт можно объяснить еще вот как: площадь оставшейся фигуры на первом шаге равна $\frac{8}{9}$, на втором — $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, ... На n -м шаге площадь оставшегося куска составит $\left(\frac{8}{9}\right)^n$, и понятно, что при $n \rightarrow \infty$ эта площадь стремится к нулю. $\square$

Таким образом, ковёр Серпинского нельзя в полной мере считать плоской фигурой, так как такие фигуры обычно имеют ненулевую площадь. С другой стороны, не относится и к семейству кривых. Более того, размерность ковра Серпинского оказывается дробной.

Свойство 2. *Внутренняя часть ковра пуста.*

Доказательство. Предположим из противоречия, что внутри ковра есть точка P . Тогда есть квадрат с центром в P , который полностью содержится в ковре. Этот квадрат содержит меньший квадрат, координаты которого кратны $\frac{1}{3^k}$ для некоторых k . Но, если этот квадрат не был удален ранее, он, должно быть, был продырявлен на итерации $k+1$, поэтому он не может содержаться в ковре — противоречие. $\square$

Свойство 3. *Фрактальная размерность ковра Серпинского является нецелым числом и равна приблизительно 1,8928.*

Примечание! Фрактальная размерность — это коэффициент, описывающий фрактальные структуры или множества на основе количественной оценки их сложности. Он показывает, насколько сильно фрактал заполняет пространство, в котором он существует, измеряет степень его «шероховатости» или «дробленности».

Фрактальная размерность D может быть вычислена с использованием формулы:

$$D = \frac{\ln N}{\ln S},$$

где

N – количество самоподобных частей (в нашем случае, 8 оставшихся квадратов).

S – масштабный коэффициент (во сколько раз уменьшается каждая часть, в нашем случае, 3).

Таким образом:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928.$$

Свойство 4. *Длина границы ковра Серпинского бесконечная.*

Доказательство. На каждом шаге создаются новые границы вокруг удаленных квадратов. На первом шаге длина границы составляет $4 \cdot \frac{1}{3}$ (то есть периметр удаленного квадрата). На втором шаге длина границы увеличивается еще на $8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9}$ и так далее. Общая длина границы также представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, которая расходится, что означает, что длина границы стремится к бесконечности.

Пусть L_n – общая длина границы на n -ом шаге.

Тогда $L_0 = 4$ – периметр исходного квадрата (предположим, что сторона квадрата равна 1),

$$L_1 = L_0 + 8 \cdot \frac{4}{3} = 4 + \frac{32}{3},$$

$$L_2 = L_1 + 64 \cdot \frac{4}{9},$$

$$L_n = L_{n-1} + 8^{n-1} \cdot \frac{4}{3^n}.$$

Это показывает, что длина границы растёт бесконечно, хотя и медленнее, чем в некоторых других фракталах. $\square$

Применение

Мобильный телефон и Wi-Fi фрактальные антенны были изготовлены в виде нескольких повторений ковра Серпинского. Благодаря их самоподобию и масштабной инвариантности, они легко приспособиваются к нескольким частотам. Они также

просты в изготовлении и меньше обычных антенн с аналогичными характеристиками, что делает их оптимальными для карманных мобильных телефонов.

Фрактальная форма создает множество резонансных точек на антенне. Эти точки позволяют ей эффективно улавливать и излучать электромагнитные волны на разных частотах. Сложная геометрия также способствует более эффективному распределению тока по поверхности антенны, что улучшает ее характеристики.

В приложениях математики часто возникают задачи на отыскание оптимальных параметров той или иной системы. Подобные задачи встречаются в экономике при отыскании оптимального плана производства или для оптимизации иных бизнес-процессов [3]. Приведем пример инженерной задачи на выбор оптимальной формы экранирующей пластины, в которой используется ковёр Серпинского.

Задача

Условие: *Инженер работает в компании, разрабатывающей материалы для защиты от электромагнитного излучения. Для снижения веса и сохранения эффективности экранирования он хочет использовать некоторую структуру. Инженер создал тонкий лист материала, в котором вырезаны отверстия в форме ковра Серпинского. Лист помещается между двумя устройствами, которые нужно экранировать.*

Известно следующее:

- *Материал листа: Медь (электропроводность $\sigma = 5,96 \times 10^7$ см/м).*
- *Размер базовой ячейки: Базовый квадрат ковра Серпинского имеет сторону $a = 10$ мм.*
- *Толщина листа: $t = 0.1$ мм.*

Оценить, как изменится эффективность экранирования с увеличением количества итераций ковра Серпинского (S_1, S_2, S_3).

Решение:

Мы рассмотрим площадь меди, которая остается на листе после создания узора ковра Серпинского. Мы рассматриваем несколько стадий формирования этого узора (итерации), начиная с цельного медного листа S_0 и заканчивая более сложными формами ковра Серпинского S_1 , S_2 , S_3 . На каждом этапе мы вычисляем, какая площадь меди всё ещё присутствует на листе.

Ключевое предположение заключается в том, что эффективность экранирования, то есть способность материала блокировать электромагнитное излучение, прямо пропорциональна площади меди. Чем больше меди, тем лучше экран.



1. S_0 (Исходный квадрат)

Площадь меди: $A_0 = a^2 = (10 \text{ мм})^2 = 100 \text{ мм}^2$.

2. S_1 (1 итерация)

Удален центральный квадрат.

- Сторона удаленного квадрата: $\frac{a}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \text{ мм}$.
- Площадь удаленного квадрата: $\frac{100}{9} \approx 11,11 \text{ мм}^2$.
- Площадь меди: $A_1 = A_0 - \frac{a^2}{9} \approx 100 - 11,11 \approx 88,89 \text{ мм}^2$.
- Эффективность экранирования (относительно S_0):

$$\frac{88,89}{100} = 88,89\%.$$

3. S_2 (2 итерации)

Удалено 9 квадратов (1 на первом уровне и 8 на втором).

- Сторона квадрата на втором уровне: $\frac{a}{9} = \frac{10}{9} \approx 1,11 \text{ мм}$
- Площадь квадрата на втором уровне: $\frac{100}{81} \approx 1,23 \text{ мм}^2$
- Площадь меди: $A_2 = A_1 - 8 \cdot \frac{a^2}{81} \approx 88,89 - 8 \cdot 1,23 \approx 79,05 \text{ мм}^2$
- Эффективность экранирования (относительно S_0):

$$\frac{79,05}{100} = 79,05\%.$$

4. S_3 (3 итерации):

- Сторона квадрата на третьем уровне: $\frac{a}{27} = \frac{10}{27} \approx 0,37$ мм
- Площадь квадрата на третьем уровне: $\frac{100}{729} \approx 0,14$ мм²
- Общее количество квадратов, удаленных на третьем уровне:

64

- Площадь меди: $A_3 = A_2 - 64 \cdot \frac{a^2}{729} \approx 79,05 - 64 \cdot 0,14 \approx 69,9$ мм²
- Эффективность экранирования (относительно S_0):

$$\frac{69,9}{100} = 69,9\%.$$

Сравним полученные значения площади меди для разных стадий ковра Серпинского. Площадь меди уменьшается с каждой итерацией, и эффективность экранирования тоже падает. То есть хоть такой подход и позволяет уменьшить вес экрана за счёт вырезания части материала, он неизбежно приводит к ухудшению его защитных свойств.

Вывод (основанный на пропорциональности площади): *Если эффективность экранирования пропорциональна площади меди, то с увеличением количества итераций ковра Серпинского эффективность уменьшается, так как уменьшается площадь проводящего материала.*

Таким образом, ковёр Серпинского – это не просто красивый фрактал, а живой пример того, как абстрактные математические идеи могут преобразовываться в реальные решения, улучшая нашу жизнь и расширяя горизонты познания. Он служит наглядным пособием для изучения фракталов, стимулом для инноваций в инженерии. Его способность моделировать сложные системы и находить практическое применение в антеннах, теплоотводах и экранировании доказывает его ценность как научного и инженерного инструмента.

Литература

1. Болтянский В. Г. Наглядная топология. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 160 с.
2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия / пер. с нем. С. А. Каменецкого. – 3-е изд. – М. : Наука, 1981. – 344 с.

3. Русакович М. В., Дмитриев В. Д. Оптимизация бизнес-процессов фирмы на основе увеличения инвестиционной привлекательности// Вестник Государственного социально-гуманитарного университета. – 2022. – №2 (46) Гуманитарные науки. – С. 33-40.

Краснов В. А.

Связь между свойствами объёма и средней кривизны многогранника

Аннотация

В настоящей заметке рассматривается проблема инвариантности средней кривизны изгибаемых многогранников в неевклидовых пространствах постоянной кривизны. Используя формулу Шлефли для дифференциала объёма, мы покажем, что в сферическом пространстве средняя кривизна не инвариантна при изгибании, а в гиперболическом пространстве наблюдается её сохранение.

1. Понятие средней кривизны

Введем сначала некоторые основные определения.

Определение 1. Пусть P — ориентируемый вложенный в $\mathbb{E}^3$ многогранник. *Средней кривизной* многогранника P называется величина

$$H(P) = \frac{1}{2} \sum_i l_i (\pi - \alpha_i), \quad (1)$$

при этом суммирование ведётся по всем рёбрам многогранника, l_i — длина i -го ребра, α_i — двугранный угол при i -м ребре.

Мы будем рассматривать многогранник, ориентированный нормалью к какой-нибудь грани с распространением направления нормали на другие грани по стандартному правилу согласования ориентации граней.

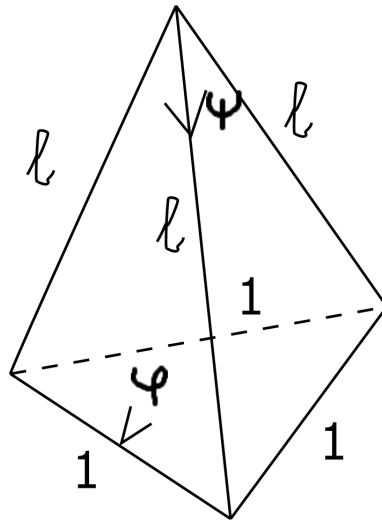


Рис. 1. Тетраэдр T

Тогда двугранный угол α_i при ребре с номером i считается как геометрический угол изнутри многогранника.

Пример. Путь T — тетраэдр, все боковые рёбра которого имеют одинаковую длину l , а в основании находится правильный треугольник со стороной 1 (Рис. 1).

Нетрудно найти косинусы двугранных углов такого тетраэдра (здесь φ - двугранный угол при основании, ψ — двугранный угол при боковом ребре):

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4l^2 - 1}}, \cos \psi = -\frac{2l^2 - 1}{4l^2 - 1}.$$

Тогда

$$H(T) = \frac{3}{2} \left(\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4l^2 - 1}} \right) + \frac{3}{2} l \left(\pi - \arccos \frac{1 - 2l^2}{4l^2 - 1} \right).$$

В общем случае существует формула вычисления двугранных углов (вернее, их косинусов) тетраэдра с известными длинами рёбер.

Теорема 1. Пусть задан произвольный тетраэдр с попарно скрещивающимися ребрами длины l_1 и l_5 , l_2 и l_6 , l_3 и l_4 соответственно (Рис. 2). Тогда косинус двугранного угла φ при ребре l_1 можно выразить через площади смежных граней S_{123} и

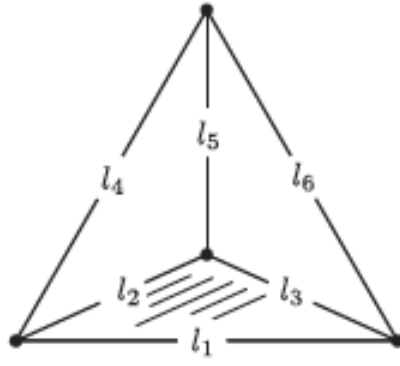


Рис. 2.

S_{146} (здесь через S_{ijk} обозначается площадь грани, ограниченной рёбрами l_i, l_j, l_k тетраэдра), а также квадраты длин рёбер по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{4S_{123}^2 + 4S_{146}^2 - l_1^2 l_5^2 + \frac{1}{4} ((l_3^2 + l_4^2) - (l_2^2 + l_6^2))^2}{8S_{123}S_{146}} \quad (2).$$

Доказательство. В самом деле, запишем теорему косинусов для каждой грани тетраэдра:

$$\begin{aligned} S_{123}^2 &= S_{146}^2 + S_{245}^2 + S_{356}^2 - \\ &- 2S_{146}S_{245} \cos l_4 - 2S_{146}S_{356} \cos l_6 - 2S_{245}S_{356} \cos l_5 \end{aligned} \quad (3),$$

$$\begin{aligned} S_{146}^2 &= S_{123}^2 + S_{245}^2 + S_{356}^2 - \\ &- 2S_{123}S_{245} \cos l_2 - 2S_{123}S_{356} \cos l_3 - 2S_{245}S_{356} \cos l_5 \end{aligned} \quad (4),$$

$$\begin{aligned} S_{245}^2 &= S_{123}^2 + S_{146}^2 + S_{356}^2 - \\ &- 2S_{123}S_{146} \cos \varphi - 2S_{123}S_{356} \cos l_3 - 2S_{146}S_{356} \cos l_6 \end{aligned} \quad (5),$$

$$\begin{aligned} S_{356}^2 &= S_{123}^2 + S_{146}^2 + S_{245}^2 - \\ &- 2S_{123}S_{146} \cos \varphi - 2S_{123}S_{245} \cos l_2 - 2S_{146}S_{245} \cos l_4 \end{aligned} \quad (6),$$

где $\cos l_s$ — косинус двугранного угла при ребре l_s .

Складывая (5) и (6), получаем:

$$8S_{123}S_{146} \cos \varphi = 4S_{123}^2 + 4S_{146}^2 + 2X \quad (7),$$

где

$$X = -2S_{123}S_{356} \cos l_3 - 2S_{146}S_{356} \cos l_6 - 2S_{123}S_{245} \cos l_2 - 2S_{146}S_{245} \cos l_4.$$

В свою очередь, складывая формулы (3) и (4), находим

$$2X = 8S_{245}S_{356} \cos l_5 - 4S_{245}^2 - 4S_{356}^2.$$

Выражая S_{245}^2 и S_{356}^2 по формуле Герона (через квадраты длин ребер), а $8S_{245}S_{356} \cos l_5$ через скалярное произведение векторных произведений (применяя соответствующую формулу с определителем матрицы Грама, а затем теорему косинусов)

$$\begin{aligned} 8S_{245}S_{356} \cos l_5 &= -2[\vec{l}_5 \times \vec{l}_3][\vec{l}_2 \times \vec{l}_5] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2\vec{l}_5^2 & 2\vec{l}_5 \vec{l}_2 \\ 2\vec{l}_3 \vec{l}_5 & 2\vec{l}_3 \vec{l}_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2l_5^2 & l_2^2 + l_5^2 - l_4^2 \\ l_3^2 + l_5^2 - l_6^2 & l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

мы получаем явное выражение $2X$ через квадраты длин ребер.

Наконец, подставляя найденное выражение для $2X$ в формулу (7), после приведений подобных членов приходим к требуемой формуле (2). $\square$

Замечание. В обзоре [1] содержится вариант формулы, аналогичной (2) (см. стр. 51 работы [1]). Однако приведённое соотношение содержит *ошибку* — в числителе перед скобками потерян коэффициент $\frac{1}{4}$. Наша теорема 1 дает правильный вариант соответствующей формулы.

Определение 2. Под *изгибаемыми многогранниками* мы будем понимать многогранники, которые можно (непрерывно) деформировать таким образом, чтобы в процессе деформации менялись только двугранные углы, а грани оставались конгруэнтными.

В противном случае многогранник называется *жёстким*.

Согласно знаменитой теореме Коши 1813 года (см., напр., [2]), *все выпуклые многогранники являются жёсткими*.

Следовательно, примеры изгибаемых многогранников следует искать в классе невыпуклых многогранников.

Примерами изгибаемых многогранников с самопересечениями являются *октаэдры Брикара 1-го и 2-го типов*. Среди изгибаемых многогранников без самопересечений стоит выделить *многогранник Коннели* и *многогранник Штеффена*. Описание вышперечисленных примеров изгибаемых многогранников можно найти, например, в упомянутой выше брошюре [2].

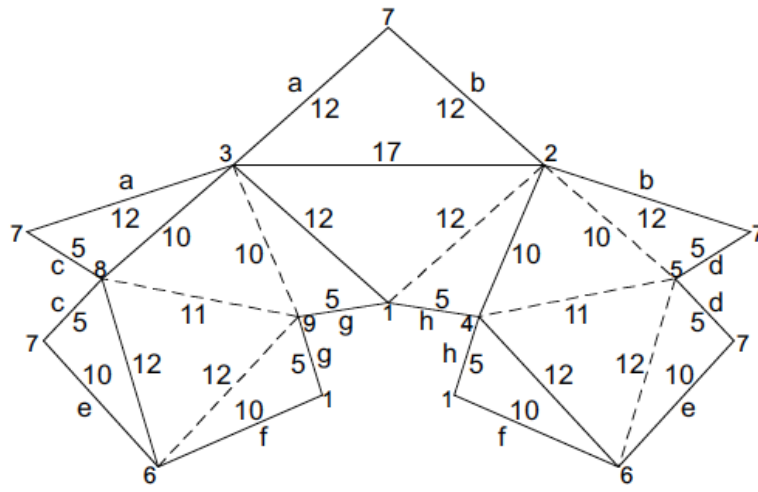


Рис. 3. Развёртка многогранника Штеффена

Также стоит отметить, что многогранник Штеффена является наименьшим по числу вершин (из известных на данный момент) несамопересекающимся изгибаемым евклидовым многогранником и имеет 9 вершин, 21 ребро и 14 граней (см., напр., [1]). Развёртка данного многогранника представлена на рис. 3.

2. Средняя кривизна как инвариант евклидовых изгибаемых многогранников

Средняя кривизна является важным инвариантом изгибаемых многогранников. Впервые свойство инвариантности средней кривизны для изгибаемого вложенного в $\mathbb{E}^3$ ориентируемого многогранника было доказано Р. Александером в работе [3].

Теорема 2. (*R. Alexander, 1985*) *Если вложенный ориентируемый многогранник изгибаемый, то его средняя кривизна инвариантна в процессе изгибания.*

Перевод оригинального доказательства теоремы 1 можно найти в обзоре [1].

Само доказательство основано на неочевидных прямых вычислениях (с использованием элементарных методов аналитической геометрии и анализа) и знаменитой теореме Минковского о многогранниках (см., напр., [4]).

Однако теорему 2 можно *значительно проще* доказать с использованием так называемой *формулы Шлефли* [5].

Приведем версию этой формулы для случая трёхмерного евклидова пространства.

Теорема 3. (*формула Шлефли*) Пусть $P(t)$ — гладкое однопараметрическое семейство многогранников в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ с двугранными углами $\alpha_i = \alpha_i(t)$ и длинами рёбер $l_i = l_i(t)$ соответственно (при этом t обозначает параметр деформации). Тогда:

$$\sum_i l_i \frac{d\alpha_i}{dt} = 0. \quad (8)$$

А теперь, следуя недавней работе автора [6], изложим доказательство теоремы 2, опираясь на формулу Шлефли (8).

Доказательство. В самом деле, обозначим через t параметр (гладкого) изгибания. Тогда средняя кривизна как функция параметра t для изгибаемого многогранника имеет вид:

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_i l_i (\pi - \alpha_i(t)).$$

Следовательно, дифференциал средней кривизны равен:

$$dH = -\frac{1}{2} \sum_i l_i d\alpha_i, \quad (9)$$

так как $l_i = \text{const}$ при изгибании.

С другой стороны, в силу формулы Шлефли (8), имеем

$$\sum_i l_i d\alpha_i = 0,$$

следовательно,

$$dH = 0,$$

то есть дифференциал средней кривизны изгибаемого многогранника равен нулю, т.е. H инвариантна при изгибании. $\square$

3. Инвариантность средней кривизны в неевклидовых пространствах постоянной кривизны

Рассмотрим теперь проблему инвариантности средней кривизны изгибаемых многогранников в неевклидовых пространствах постоянной кривизны (H в неевклидовых пространствах определяется, как и в евклидовом случае, см. опр. 1 и формулу (1)), полагая в качестве последних трехмерное сферическое пространство $\mathbb{S}^3$ постоянной положительной кривизны $K > 0$ и гиперболическое пространство $\mathbb{H}^3$ постоянной отрицательной кривизны $K < 0$.

Для начала заметим, что соотношение (8) имеет естественное обобщение на случай многомерных евклидовых пространств и неевклидовых пространств постоянной кривизны [5].

В общем случае, формула Шлефли выражает производную объёма многогранника по параметру непрерывной деформации (сохраняющей комбинаторный тип) через длины рёбер и производные двугранных углов этого многогранника (см. работу [5]). Запишем (сохраняя обозначения теоремы 3) такую формулу для трёхмерного случая:

$$\frac{1}{2} \sum_i l_i \frac{d\alpha_i}{dt} = K \cdot \frac{dV}{dt} \quad (10),$$

где V — объём многогранника, K — кривизна пространства.

Сопоставляя формулы (9) и (10), нетрудно заметить, что *дифференциал средней кривизны изгибаемого многогранника прямо пропорционален дифференциалу его объёма*, а именно:

$$dH = -K \cdot dV. \quad (11)$$

Таким образом, *инвариантность объёма изгибаемого многогранника при $K \neq 0$ влечёт инвариантность его средней кривизны (и наоборот)*.

В работах [7]–[8] А. А. Гайфуллиным было доказано постоянство объёма изгибаемых ограниченных многогранников (или гипотеза кузнечных мехов) в нечётномерных гиперболических пространствах, а также построены примеры вложенных изгибаемых многогранников на сфере любой размерности (так

называемые *кросс-политопы*), объём которых не сохраняется в процессе изгибания.

Заметим, что задолго до результатов Гайфуллина, в 1997 году, В. А. Александровым был построен первый пример сферического изгибаемого многогранника с переменным объёмом [9] (правда, построенный многогранник не является вложенным).

Таким образом, из формулы (11) вытекает

Теорема 4. *Если трёхмерный гиперболический многогранник изгибаемый, то его средняя кривизна инвариантна в процессе изгибания.*

Что касается $\mathbb{S}^3$, то средняя кривизна сферического изгибаемого многогранника по аналогичным соображениям не сохраняется в процессе изгибания (этот факт, ввиду ранней пионерской работы Александрова [9], обсуждался ещё в обзоре [1]).

В заключении настоящей заметки выведем одно полезное следствие формулы (10). Используя свойство линейности дифференциала и учитывая постоянство кривизны K , нетрудно получить, что

$$d(H + K \cdot V) = 0 \Rightarrow I = H + K \cdot V = \text{const.}$$

Это означает, что, несмотря на то, что объём и средняя кривизна изгибаемого многогранника не всегда сохраняются в процессе изгибания, их линейные комбинации $I = H + K \cdot V$ инвариантны.

Таким образом, нами доказана

Теорема 5. *Пусть P — конечный вложенный изгибаемый многогранник в одном из трёхмерных пространств постоянной кривизны ($\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$). Тогда величина*

$$I = H + K \cdot V \tag{11}$$

инвариантна относительно изгибания.

Литература

1. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // УМН, 66:3(399) (2011), 3–66.

2. Сабитов И. Х. *Объёмы многогранников* — М. : МЦНМО, 2002.
3. Alexander R. *Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I* // Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 661–678.
4. Долбилин Н. П. *Теорема Минковского о многогранниках* // Квант, 2006, № 4, 2–8.
5. Schläfli L. *Theorie der vielfachen Kontinuität* // Gesammelte mathematische Abhandlungen, Birkhäuser, Basel, 1950.
6. Краснов В. А. *Средняя кривизна многогранника* // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики. Труды XIV Приокской научной конференции, 16–17 июня 2023 года (2023), 93–100.
7. Гайфуллин А. А. Аналитическое продолжение объема и гипотеза кузнечных мехов в пространствах Лобачевского // Матем. сб., 206:11 (2015), 61–112.
8. Гайфуллин А. А. *Вложенные изгибаемые сферические кросс-политопы с непостоянными объемами* // Геометрия, топология и приложения, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Николая Петровича Долбилина, Тр. МИАН, 288, МАИК, М., 2015, 67–94.
9. Alexandrov V. *An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space* // Beiträge zur Algebra und Geometrie, 38:1 (1997), 11–18.

Лексин В. П.

Монодромия систем Жордана–Похгаммера

1. Системы Жордана–Похгаммера

Линейная пфаффова система Жордана–Похгаммера [4], определяемая набором параметров $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, имеет вид:

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В работах [4, 6] показано, что система Жордана–Похгаммера вполне интегрируема в смысле Фробениуса. Это, в частности, означает, что система имеет линейное пространство решений размерности, равной порядку системы, то есть n .

2. Решения и фундаментальная матрица решений системы Жордана–Похгаммера

Теперь мы дадим описание фундаментальной матрицы решений системы Жордана–Похгаммера.

Пусть $y(z_1, \dots, z_n) = (y_1(z_1, \dots, z_n), \dots, y_n(z_1, \dots, z_n))$ — решение системы (1) с параметрами $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Как показано в работах [4, 6], компоненты решения системы задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_{\gamma} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\Phi(t) = \prod_{i=1}^n (t - z_i)^{\beta_i}$.

Подробнее опишем подынтегральное выражение. Рассмотрим проколотую в n точках комплексную плоскость $S = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ и многозначную аналитическую функцию на ней $\Phi(t) = \prod_{j=1}^n (t - z_j)^{\beta_j}$, $t \in S$. Ветвление этой функции определяет представление фундаментальной группы $\rho_\Phi : \pi_1(S, t_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ в группу по умножению ненулевых комплексных чисел. Как хорошо известно, фундаментальная группа $\pi_1(S, t_0) = F_n$ изоморфна свободной группе с n свободными образующими. Представителями свободных образующих в свободной группе $\pi_1(S, t_0)$ можно

выбрать так называемые "малые петли", каждая из которых выходит из одной и той же точки $t_0 \in S$, подходит в S к точке z_j , обходит ее против часовой стрелки по достаточно малой окружности и затем по начальному пути возвращается в точку t_0 . Все пути подхода к выколотым точкам можно выбрать непересекающимися друг с другом, кроме точки t_0 . Обозначим соответствующие малые петли и их классы в фундаментальной группе γ_j . Представление ρ_Φ принимает на этих петлях значения

$$\rho_\Phi(\gamma_j) = e^{2\pi\sqrt{-1}\beta_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Рассмотрим многозначные аналитические 1-формы (дифференциалы)

$$\eta_i = \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Выберем такой элемент γ фундаментальной группы $\pi_1(S, t_0) = F_n$, представленный отображением окружности $\gamma : S^1 \rightarrow S$, чтобы дифференциальные 1-формы $\gamma^*\eta_i$, $1 \leq i \leq n$, были однозначными дифференциальными 1-формами на окружности. Отметим, что для этого достаточно, чтобы отображение γ представляло или единичный элемент группы или элемент из коммутанта фундаментальной группы $\pi_1(S, t_0)$ (петли Похгаммера или двойные петли [13]). Теперь мы можем интегрировать эти однозначные 1-формы по окружности. Получим интегралы, зависящие как от параметров, так и от точек $z_1, \dots, z_n$ на комплексной плоскости: $I_i(z_1, \dots, z_n) = \int_{S^1} \gamma^*\eta_i$. По определению, положим $\int_\gamma \eta_i = \int_{S^1} \gamma^*\eta_i$. Такой подход к интегрированию

многозначных дифференциалов (вместо использования гомологий и когомологий с коэффициентами в локальных системах и их спаривания) использовался в лекциях А. Варченко [12]. Из коммутаторов малых петель можно набрать базис $([\bar{\gamma}_1], \dots, [\bar{\gamma}_n])$ в группе гомологий свободной группы $H_1(F_n = \pi_1(S, t_0), \mathbb{Z})$.

Теперь сформулируем как теорему утверждение, в котором дано описание интегрального представления компонент решений системы Жордана–Похгаммера и ее фундаментальной матрицы решений.

Теорема 1. Вектор-функция $y_\gamma(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z))$, в которой компоненты $y_i(z)$ задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_{\gamma} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt,$$

где γ — это некоторая петля Похгаммера, является решением системы Жордана–Похгаммера (1). Матрица $Y(z) = (y_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,n}$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $y_{ij}(z) = \beta_i \int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt$, является фундаментальной матрицей решений системы (1).

Доказательство теоремы 1 можно найти в работах [4, 6, 9].

3. Представление монодромии системы Жордана–Похгаммера

Система Жордана–Похгаммера не имеет особых точек в дополнении к объединению диагональных гиперплоскостей $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus H$, $H = \cup_{i,j=1}^n \{z_i = z_j\}$. Возьмем неособую точку $z_0 \in \mathbb{C}_*^n$ и петлю γ с началом и концом в z_0 . Аналитическое продолжение $Y_\gamma(z)$ вдоль петли γ фундаментальной матрицы решений $Y(z)$, рассматриваемой в малой окрестности точки z_0 , в силу интегрируемости системы Жордана–Похгаммера приводит к равенству $Y_\gamma(z) = Y(z)M(\gamma)$, где $M(\gamma)$ — невырожденная постоянная матрица, зависящая лишь от гомотопического класса петли γ . Сопоставление каждому гомотопическому классу $\bar{\gamma}$ петли γ матрицы $M^{-1}(\gamma) = M(\gamma^{-1})$ определяет представление фундаментальной группы

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}_*^n, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

которое называется представлением монодромии системы Жордана–Похгаммера (1).

4. Топология дополнения комплексного линейного пространства к объединению диагональных гиперплоскостей

Указанное в заглавии раздела дополнение (обозначенное ранее как $\mathbb{C}_*^n$) имеет нетривиальную фундаментальную группу, изоморфную группе крашенных кос P_n с образующими A_{ij} , представленными обходами по малым петлям диагональных гиперплоскостей и явно указанным ниже набором соотношений. Все гомотопические группы более высокого порядка равны нулю, то есть пространство $\mathbb{C}_*^n$ является пространством Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, 1)$, где группа π изоморфна группе крашенных кос P_n с названными выше образующими A_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, и соотношениями

$$A_{rs}A_{ij}A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{если } s < i \\ & \text{или } i < r < s < j, \\ A_{rj}A_{ij}A_{rj}^{-1}, & \text{если } s = i, \\ A_{rj}A_{sj}A_{ij}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } i = r < s < j, \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{sj}A_{rj}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } r < i < s < j. \end{cases}$$

Алгебра когомологий пространства $\mathbb{C}_*^n$ над полем комплексных чисел вычислена В. И. Арнольдом и она изоморфна алгебре дифференциальных форм, порожденной логарифмическими формами $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, $i \neq j$, с соотношениями Арнольда для каждой тройки индексов i, j, k :

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} + \omega_{kj} \wedge \omega_{ij} = 0.$$

Профакторизуем комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ по группе перестановок S_n , действующей перестановками координат. Результатом факторизации всего пространства $\mathbb{C}^n$ будет, в силу теоремы Шевалле, также $\mathbb{C}^n$. Обозначим через D результат факторизации объединения диагональных гиперплоскостей. Тогда фундаментальная группа фактор-пространства $\mathbb{C}_*^n/S_n$ по указанному действию группы перестановок S_n изоморфна группе кос B_n с образующими σ_k , $k = 1, \dots, n-1$, и соотношениями

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-2,$$

$$\sigma_k \sigma_\ell = \sigma_\ell \sigma_k, \quad |k - \ell| \geq 2. \quad (2)$$

Описанная факторизация определяет длинную точную последовательность гомотопических групп, нетривиальная часть которой есть последовательность с участием группы крашенных кос P_n , группы кос B_n , группы перестановок S_n и тривиальной единичной группы 1:

$$1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1.$$

Группа крашенных кос P_n является подгруппой группы кос B_n и образующие A_{ij} , $i < j$, группы крашенных кос выражаются через образующие группы кос B_n следующим образом:

$$A_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

5. Представление Бурау группы кос

Представление Бурау группы кос B_n определяется чисто алгебраически, сопоставлением стандартным образующим σ_k , $k = 1, \dots, n-1$, группы кос B_n следующих обратимых матриц над кольцом многочленов Лорана от одной переменной:

$$M_k = \rho_B(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Легко проверить, что указанные матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос $M_k M_{k+1} M_k = M_{k+1} M_k M_{k+1}$; $M_k M_l = M_l M_k$ (2). Таким образом, ρ_B определяет представление группы кос

$$\rho_B : B_n \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}[T, T^{-1}])$$

в группу обратимых матриц порядка n над кольцом многочленов Лорана от одной переменной. Ограничение представления Бурау на подгруппу крашенных кос задает представление последней, которое мы обозначим ρ_P .

6. Представление Гасснер группы крашенных кос

Представление Гасснер ρ_G является представлением группы крашенных кос P_n в группу обратимых матриц над кольцом полиномов Лорана от n переменных

$$\rho_G : P_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[T_1^{\pm}, \dots, T_n^{\pm}]).$$

Это представление есть обобщение ограничения представления Бурау ρ_P на группу крашенных кос и они строятся по одной алгебраической схеме. Но если представление Бурау продолжается до представления ρ_B всей группы кос B_n , то для представления Гасснер продолжение в общем случае отсутствует. Выше указано как образующие A_{ij} группы крашенных кос выражаются через стандартные образующие σ_k группы кос, и потому представление Гасснер также можно задать как мультипликативное отображение в обратимые матрицы на косах σ_k , а затем проверяются соотношения группы крашенных кос для полученных матриц $\rho_G(A_{ij})$. Итак, мы определим значения на образующих σ_k следующими равенствами:

$$M_k = \rho_G(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T_k & T_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Однако часть соотношений группы кос B_n , а именно,

$$M_k M_{k+1} M_k = M_{k+1} M_k M_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-2,$$

выполняется только тогда, когда все переменные $T_1 = T_2 = \dots = T_{n-1}$ равны между собой и мы получаем представление Бурау. Но если вычислить матрицы, соответствующие образующим A_{ij} , используя точное представление группы кос B_n в группу автоморфизмов свободной группы с n образующими, то, как показала Бетти Джейн Гасснер [1], соотношения группы крашенных кос выполняются и возникает матричное представление группы крашенных кос, названное именем Гасснер. В книге З. Морана [7] и в работе К. Кнудсена [5] указаны матрицы, соответствующие

образующим A_{ij} в представлении Гасснер:

$$\rho_G(A_{rs}) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T_r + T_r T_s & 0 & (1 - T_r)T_r & 0 \\ 0 & \bar{u} & I_{s-r-1} & \bar{v} & 0 \\ 0 & 1 - T_s & 0 & T_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s} \end{pmatrix},$$

где векторы-столбцы $\bar{u}$, $\bar{v}$ имеют вид

$$\bar{u} = ((1 - T_{r+1})(1 - T_s), \dots, (1 - T_{s-1})(1 - T_s))^\top,$$

$$\bar{v} = ((1 - T_{r+1})(T_r - 1), \dots, (1 - T_{s-1})(T_r - 1))^\top.$$

7. Монодромия системы Жордана–Похгаммера с равными параметрами

Пусть все параметры системы Жордана–Похгаммера (1) равны между собой: $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \lambda$. Т. Коно в 1988 году, используя инвариантность системы Жордана–Похгаммера относительно перестановок координат и компонент решения, показал, что система Жордана–Похгаммера опускается на фактор-пространство по указанному диагональному действию группы перестановок и представление монодромии фактор-системы совпадает с представлением Бурау, когда в матрицах монодромии Бурау вместо формального параметра T используется комплексное число $e^{2\pi i \lambda}$. В рассматриваемом случае это является решением многомерной проблемы Римана–Гильберта, когда алгебраически заданное представление Бурау реализовано как представление монодромии интегрируемой системы с простыми полярными особенностями, а именно, фактор-система имеет полюса первого порядка на дивизоре особенностей.

8. Монодромия системы Жордана–Похгаммера с произвольными параметрами

Как показали Капович и Милсон в работе 2001 года [4], монодромия системы Жордана–Похгаммера (1) с произвольными

параметрами эквивалентна представлению Гасснер, когда формальным переменным присвоены комплексные значения $T_k = e^{2\pi i \beta_k}$, $k = 1, \dots, n$. Это также решение многомерной проблемы Римана–Гильберта для представления Гасснер.

9. Аналоги систем Жордана–Похгаммера, связанные с другими системами корней, отличными от A_n

Системы Жордана–Похгаммера теснейшим образом связаны с коксетеровской системой корней типа A_n . Полными аналогами этих систем являются системы Книжника–Замолодчикова в форме Чередника

$$d\Psi = k \sum_{\alpha \in R_+} (1 - s_\alpha) \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \Psi,$$

где s_α — отражения, отвечающие положительным корням системы корней R . Эта система переписывается в следующем виде

$$d\Psi = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{\alpha^* \otimes \alpha}{\alpha(z)} \Psi,$$

где α^* — двойственный вектор относительно стандартной билинейной формы $(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, а h_α — $W(R)$ -инвариантная система констант: $h_{w\alpha} = h_\alpha$, $w \in W(R)$, $W(R)$ — группа Коксетера, порожденная отражениями относительно корней из R . Для систем корней типа A_n , $n \geq 2$, уравнение Книжника–Замолодчикова в форме Чередника (будем говорить — уравнение Чередника) является системой Жордана–Похгаммера с равными параметрами.

Уравнения Чередника входят в класс V-систем Веселова

$$dy = \sum_{\alpha \in R} \alpha^\vee \otimes \alpha \frac{(d\alpha(z))}{\alpha(z)} y,$$

где R — конечная система линейных функционалов в некотором $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а вектор $\alpha^\vee$ является дуальным ковектору α относительно билинейной формы $B(x, y) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, x)(\alpha, y)$.

Если набор ковекторов является системой положительных корней некоторой коксетеровской системы корней, то система Веселова вполне интегрируема. Веселов и Чалых нашли деформации систем корней (уже не в классе систем корней), для которых система Веселова сохраняет интегрируемость. Уравнения Чередника и V -системы Веселова являются аналогами систем Жордана–Похгаммера, связанными с другими системами корней или просто наборами векторов.

Для систем корней определены группы кос $B_n(R)$ и группы крашенных кос $P_n(R)$, для которых имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow P_n(R) \rightarrow B_n(R) \rightarrow W_n(R) \rightarrow 1.$$

Основными результатами в начале двухтысячных годов были доказательства того, что эти обобщённые системы Жордана–Похгаммера определяют представления обобщённых групп кос [2, 6, 10, 11]. Однако, явная матричная форма представлений частично найдена с помощью матрицы Картана для системы корней R только в случае обобщённого представления Бурау Гивенталем и Сквайром [2, 8].

Литература

1. Gassner B. J. “On braid groups”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **25**, 10–22 (1961).
2. Givental A. B. “Twisted Picard–Lefschetz formulas”, *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), 10–18.
3. Kohno T. “Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations”, *Contemp. Math.*, **78**, 339–363 (1988).
4. Kapovich M., Millson J. “Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation”, *Canad. Math. Bull.* **44**, 36–60 (2001).
5. Knudsen K. P. “On the kernel of the Gassner representation”, *Archiv der Mathematik*, **85**, n.2, 108–117 (2005).
6. Leksin V. P. *Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connec-*

tions. *IRMA Lectures in Mathematical and Theoretical Physics: "Differential Equations and Quantum groups* EMS Publishing House, 2007, Pages 255–267.

7. Moran S. *Mathematical theory of knots and braids. An introduction*. North-Holland Mathematics studies 82, North-Holland-Amsterdam. New York. Oxford, Elsevier SPC. Inc. 1983.
8. Squier C. C. “Matrix representations of Artin groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**, 49–53 (1988).
9. Feigin M. V., Veselov A. P. “V-systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields”, *International Mathematics Research Notes*, Volume 2018, Issue 7, April 2017, Pages 2070–2098.
10. Чередник И. *Монодромия r -систем и обобщенные группы кос.* ДАН СССР **256** (1989), 15–18.
11. Cherednik I. *Monodromy Representations for Generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. **27** (1991), 711–726.
12. Varchenko A. N. “Special functions, KZ type equations, and representations theory” *CBMS regional conference series in Mathematics*. **Nom. 98**. AMS/NSF. 2003.
13. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. “Курс современного анализа”, М: Госиздат Физматлит (1962).

Мирошниченко А. Н.

Канторово множество и его свойства

Аннотация

В данной статье речь пойдет об одном из классических фрактальных множеств – Канторовом множестве и его основных свойствах.

1. Историческая справка

Георг Кантор (нем. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) – немецкий математик, ученик Карла Вейерштрасса. Родился: 3 марта 1845 года, Санкт-Петербург, Россия. Наиболее известен как создатель теории множеств. Основатель и первый президент Германского математического общества, инициатор создания Международного конгресса математиков.

Кантор впервые определил сравнение произвольных множеств, включая бесконечные, по их “мощности” (обобщению понятия количества) через понятие взаимно-однозначного соответствия между множествами чисел.

В 1897 году отошёл от научного творчества. Идеи Кантора не принимались многими современниками, но впоследствии оказали большое влияние на развитие математики. Умер: 6 января 1918 года (72 года), Галле, Германия.

Чем известен: создатель теории множеств. Кантор создал теорию множеств и “никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором”, как сказал Д. Гильберт. Возникла опора для более или менее строгих рассуждений, и появилась возможность делать некоторые любопытные математические построения. А есть такой принцип, что все, что в математике существует, чему-то так или иначе в реальном мире соответствует. Вот и давайте посмотрим, что бывает.

2. Канторово множество – канторова пыль

Берем отрезок $[0, 1]$ и удаляем середину: интервал $(1/3, 2/3)$. Концы не удаляем. Потом поступаем так с двумя оставшимися отрезками.

Получается циклический процесс, который, однако, весь отрезок не исчерпает; в пределе кое-что останется (хотя бы концы выкидываемых интервалов). Вот то, что осталось, и есть канторово множество.

Первые несколько шагов:

Можно перейти в троичную систему счисления, в которой

цифры только 0, 1 и 2, и числа из $[0, 1]$ разложены по отрицательным степеням тройки. Канторово множество содержит числа, в которых нет цифры 1. С оговорками, правда: $1/3$ запишется либо как 0, 1, либо как 0, 0(2), а $2/3$ - как 0, 2 либо как 0, 1(2). Число удаляется, если в любой его записи есть хоть одна единичка.

Ясно, хотя и удивительно, что в канторовом множестве находятся не только концы выкидываемых интервалов. Ведь множество этих концов счетно, а канторово множество – нет.

Множество счетно, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами.

Другими словами, это бесконечное множество, между элементами которого и множества натуральных чисел можно построить взаимно однозначное соответствие (биекцию).

Несчётность канторова множества легко установить: числа в нём в троичной записи содержат только цифры 0 и 2; замените 2 на 1 и трактуйте это как двоичное разложение. Получите весь отрезок! Один к одному, без повторов.

Еще раз: чисел в канторовом множестве столько же, сколько на всем отрезке! Точки отрезка можно “пересчитать” точками дырявого канторова множества, которое не занимает никакого места.

Да, его мера равна нулю. Это легко установить, подсчитав длину выкидываемых интервалов. На каждом шаге вдвое больше интервалов, длина каждого в три раза меньше. То есть, выкидывается на каждом шаге $2/3$ от предыдущего шага. На первом шаге выкидывается треть. Сложим все (это прогрессия со знаменателем $2/3$) и получим 1. Выкидывается вся длина.

Получается множество точек, не занимающее на отрезке никакой длины, при этом точек там столько же, сколько и на всем отрезке.

Множество это нигде не плотно: в его замыкании нет ни одного отрезка.

Вдумайтесь: на отрезке точки лежат “раздельно”, даже самый маленький отрезок в множество не помещается, а длина у них есть.

Можно построить множество, которое не будет содержать рациональных точек (кроме 0 и 1), пересчитав их и каждый раз

растягивая один из выкидываемых интервалов так, чтобы туда попало очередное рациональное число.

Можно еще жестче: вычислимы числа счетны. Вычислимые, это те, которые можно генерировать цифра за цифрой некоторым алгоритмом, а алгоритм – это просто текст. С учетом кодировки текста, алгоритм это просто целое число. Да, любые ошибки в программе допустимы, и много программ вычисляют одно и то же число, но все равно, вычисляемых чисел счетное множество. Можно построить канторово множество из одних невычисляемых чисел, что довольно забавно.

А если выкидывать не интервалы, а отрезки: вместе с концами? Получится канторово множество за вычетом концов выкидываемых интервалов (а этих концов счетное множество). Состоит оно из чисел, во всех вариантах троичной записи которых нет единичек. Например, $0,(20)$. Конечных дробей не будет.

Наконец, у множества кантора есть размерность: фрактальная, но всё-таки. Определяется она как предел отношения логарифма числа кубиков с ребром ε , необходимых для покрытия множества, к логарифму ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$. Еще знак надо поменять. Для отрезков, понятное дело, число “кубиков” (отрезков) растет как $1/\varepsilon$, что дает единицу. Для плоских множеств число квадратиков растет как ε^2 , что приводит к размерности 2. Для канторова множества удобно ε уменьшать втрое на каждом шаге, и таких отрезков надо всегда вдвое больше, чем на предыдущем шаге. В итоге получается размерность $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$.

Канторово множество служит основой для дальнейших построений, многие из которых вылезают и в реальный мир.

Свойства:

1. Канторово множество замкнуто.
2. Канторово множество является нигде не плотным совершенным множеством.
3. Канторово множество континуально.
4. Канторово множество имеет топологическую размерность 0.
5. Канторово множество имеет промежуточную (то есть не целую) хаусдорфову размерность равную приблизительно равную

$0,63 \left(\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63 \right)$. В частности, оно имеет нулевую меру Лебега.

6. Каждый нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

7. Всякий метризуемый компакт – образ канторова множества при некотором непрерывном отображении.

8. Канторово множество универсально для всех нульмерных пространств со счётной базой.

3. Дополнительные определения.

Диадический компакт [англ.] – компакт, представимый как непрерывный образ канторова куба. Диадическое пространство [англ.] – топологическое пространство, для которого существует компактификация, являющаяся диадическим компактом.

Гомеоморфно – это взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между двумя топологическими пространствами.

Нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек – пространство, которое гомеоморфно канторову множеству.

Подводя итог вышесказанному, можно сделать вывод, что Канторово множество представляет интерес не только с точки зрения топологии и теории меры, но и с точки зрения теории чисел [3], помогая лучше осознать понятия “счётность” и “континуальность” множеств рациональных и действительных чисел.

Литература

1. *Сайт Википедия*

// URL: https://ru.ruwiki.ru/wiki/Канторово_множество/

2. *Сайт Википедия*

// URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кантор,_Георг/

3. Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. Зарождение теории чисел // Вестник Государственного социально-гуманитарного университета, 2017, №4 (28), Естественные науки. – С. 26-33.

Интеграл Хопфа

1. Вычисление инварианта Хопфа [1]–[3] некоторых расслоений по интегральному определению Уитни [2, с. 204] приводит к интегралам

$$h_i = (-1)^{i-1} \int_{S^{n-1}} u_i du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_n$$

($i = 1, 2, \dots, n$ и $\widehat{}$ – знак «пропустить») отдельных слагаемых формы объёма

$$\tau = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} u_i du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_n$$

сферы $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1\}$ (см., например, [3, с. 243]). В следующем пункте 2 будет показано, что

$$V(S^{n-1}) := \int_{S^{n-1}} \tau = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (1.1)$$

– объём всей сферы, Γ – гамма-функция. Цель настоящей заметки – доказать

Утверждение. Для любого i интеграл h_i не зависит от i :

$$h_i = \frac{1}{n} V(S^{n-1}). \quad (1.2)$$

Независимость от номера побуждает как-то назвать интеграл. Например, интегралом Хопфа.

2. В полярных координатах

$$\begin{aligned} \tau &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} > 0, \\ u_1 &= \frac{x_1}{r}, u_2 = \frac{x_2}{r}, \dots, u_n = \frac{x_n}{r} \end{aligned}$$

проколотого пространства $\mathbb{R}^n \setminus 0$ объём сферы легко подсчитывается интегралом Пуассона

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sqrt{\pi}^n$$

(стандартный знак внешнего произведения дифференциалов опущен). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= d(ru_1) d(ru_2) \dots d(ru_n) = \\ &= (rdu_1 + u_1 dr)(rdu_2 + u_2 dr) \dots (rdu_n + u_n dr) = \\ &= r^{n-1} dr \cdot \tau. \end{aligned}$$

Так возникает форма τ и равенство

$$\sqrt{\pi}^n = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \int_{S^{n-1}} \tau = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) V(S^{n-1}).$$

Откуда следует (1.1).

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ удобно называть *полярными* координатами на сфере S^{n-1} . Они не независимы. Но именно в них *глобальным* образом выражается форма объёма τ и так называемая форма «телесный угол» в алгебраической топологии [4, с. 285]. Термин *сферические* естественно закрепить за независимыми угловыми координатами из $(n-2)$ -х широт $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \in (0, \pi)$ и одной долготы $\varphi \in [0; 2\pi)$.

Традиционное представление [5, с. 401-402], [6, с. 19] декартовых координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ пространства $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{ось } x_n\}$ сферическими координатами $r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi$ при ограничении на сферу ($r = 1$) даёт связь

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \theta_1, \\ u_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \varphi, \\ u_n &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \varphi \end{aligned} \tag{2.1}$$

полярных координат со сферическими на сфере без двух полюсов.

3. Доказательство утверждения. Во-первых, отметим, что по симметрии переменных все интегралы h_i с нечётными номерами равны между собой. Аналогично, равны все с чётными. Поэтому достаточно установить равенство представителей обеих групп. Как увидим ниже, удобнее всего вычислять h_{n-1} и h_n .

Начнём с малых n . Это позволит выработать идею для общего случая. Потребуются табличные интегралы [5, с. 402]

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin t \, dt &= 2, & \int_0^\pi \sin^2 t \, dt &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \pi, \\ \int_0^\pi \sin^3 t \, dt &= \frac{4}{3}, & \int_0^\pi \sin^4 t \, dt &= \frac{3}{8} \pi, \\ \int_0^\pi \sin^5 t \, dt &= \frac{16}{15}, & \int_0^\pi \sin^6 t \, dt &= \frac{5}{16} \pi, \\ \int_0^\pi \sin^7 t \, dt &= \frac{32}{35}, & \int_0^\pi \sin^8 t \, dt &= \frac{35}{128} \pi.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Пусть $n = 2$. Имеем окружность S^1 длины $V(S^1) = 2\pi$ с формой $\tau = u_1 du_2 - u_2 du_1$ и связью $u_1 = \cos \varphi$, $u_2 = \sin \varphi$. В этом случае

$$\begin{aligned}h_1 &= \int_{S^1} u_1 \, du_2 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d \sin \varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} V(S^1), \\ h_2 &= - \int_{S^1} u_2 \, du_1 = - \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d \cos \varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi = \frac{1}{2} V(S^1).\end{aligned}$$

Для $n = 3$ имеем сферу S^2 с площадью $V(S^2) = 4\pi$, формой $\tau = u_1 du_2 du_3 - u_2 du_1 du_3 + u_3 du_1 du_2$ и связью $u_1 = \cos \theta_1$, $u_2 = \sin \theta_1 \cos \varphi$, $u_3 = \sin \theta_1 \sin \varphi$. В таком случае

$$\begin{aligned}h_2 &= - \int_{S^2} u_2 \, du_1 du_2 = - \int_{S^2} \sin \theta_1 \cos \varphi \, d(\cos \theta_1) d(\sin \theta_1 \sin \varphi) = \\ &= \int_{S^2} \sin^2 \theta_1 \cos \varphi \, d\theta_1 (\cos \theta_1 \sin \varphi \, d\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \varphi \, d\varphi) = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta_1 \cos^2 \varphi \, d\theta_1 d\varphi = \frac{4}{3} \pi = \frac{1}{3} V(S^2). \\ h_1 &= h_3 = \int_{S^2} u_3 \, du_1 du_2 = \int_{S^2} \sin \theta_1 \sin \varphi \, d(\cos \theta_1) d(\sin \theta_1 \cos \varphi) = \\ &= \int_{S^2} \sin \theta_1 \sin \varphi (-\sin \theta_1) \, d\theta_1 \sin \theta_1 (-\sin \varphi) d\varphi =\end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi = \frac{1}{3} V(S^2).$$

Упражнение 1. Для $n = 4$ проверить равенство (1.1) и сравнить запись с вычислениями в [3, с. 244].

Упражнение 2. Вычислить интегралы h_7 и h_8 при $n = 8$ (важный случай для изучения расслоения Хопфа $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$). *Указание:* используются все табличные интегралы (3.1).

Метод подсчёта двух последних интегралов очевидным образом переносится на случай произвольного n . Фактически проходит индукция для h_{n-1} и h_n .

Используя связь (2.1), запишем формы под интегралами

$$h_{n-1} = (-1)^{n-2} \int_{S^{n-1}} u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_{n-2} du_n,$$

$$h_n = (-1)^{n-1} \int_{S^{n-1}} u_n du_1 du_2 \dots du_{n-1}$$

в сферических координатах. Для h_n имеем процесс

$$\begin{aligned} du_1 &= d(\cos \theta_1) = -\sin \theta_1 d\theta_1, \\ du_1 du_2 &= -\sin \theta_1 d\theta_1 d(\sin \theta_1 \cos \theta_2) = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2, \\ du_1 du_2 du_3 &= \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) = \\ &= -\sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\ &\vdots \\ du_1 du_2 \dots du_{n-1} &= (-1)^{n-1} \sin^{n-1} \theta_1 \sin^{n-2} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-2} \sin \varphi \cdot \\ &\quad \cdot d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-2} d\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-1} u_n du_1 du_2 \dots du_{n-1} = \\ &= \sin^n \theta_1 \sin^{n-1} \theta_2 \dots \sin^3 \theta_{n-2} \sin^2 \varphi d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-2} d\varphi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогично для h_{n-1} находится форма

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-1} u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_{n-2} du_n = \\ &= \sin^n \theta_1 \sin^{n-1} \theta_2 \dots \sin^3 \theta_{n-2} \cos^2 \varphi d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-2} d\varphi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Упражнение 3. Провести строгую математическую индукцию для равенства (3.2) или (3.3).

Итак, в сферических координатах интегралы h_{n-1} и h_n сводятся к однократным повторным

$$\begin{aligned} \begin{cases} h_{n-1} \\ h_n \end{cases} &= \int_0^{2\pi} \begin{cases} \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \end{cases} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^4 \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \\ &\dots \int_0^\pi \sin^n \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

Поскольку интегралы от $\cos^2 \varphi$ и $\sin^2 \varphi$ равны, то $h_{n-1} = h_n$. Для завершения доказательства утверждения остаётся воспользоваться формулой [5, с. 402]

$$\int_0^\pi \sin^{k-1} t dt = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma((k+1)/2)}.$$

Простой подсчёт даёт

$$\pi \sqrt{\pi}^{n-2} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{n} \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{n} V(S^{n-1}).$$

Литература

1. Whitehead J. H. C. An expression of Hopf's invariant as an integral, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 33 (197), 117–123.
2. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования. – М.: ИЛ, 1960.
3. Ботт Р., Ту Л. Б. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. – М.: Наука, 1989.
4. Шварц Л. Анализ, т. II. – М.: Мир, 1972.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. – М.: Наука, 1972.
6. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Факториал Пресс, 2000.

Об одном уравнении, возникающем при исследовании распространения звуковой волны в кристалле с дислокациями

Аннотация

Рассматривается система уравнений, описывающая распространение сигнала в твердом теле с дислокациями. Исследовано существование решений в виде бегущих волн и необходимые для этого условия.

Ключевые слова: нелинейные волны.

Основные уравнения

В работе [1] предложена математическая модель, описывающая упругие волны в твёрдом теле с дислокациями, которая учитывает взаимодействие дислокаций с решёткой кристалла и между собой:

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k},$$

$$A \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + B \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i,$$

где U – упругое смещение, ξ – дислокационное смещение, A – масса дислокации, B – сила трения на единицу длины дислокации, P_{ik} – тензор напряжений, ρ – плотность материала, f – сила, действующая на дислокацию (см. [2]).

Свободная энергия кристалла F записывается в виде

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} U_{ij} U_{kl} + \frac{1}{2} c_{ik} \xi_i \xi_k + \frac{1}{2} \beta'_{ijkl} (b_i \xi_j + b_j \xi_i) U_{kl},$$

здесь λ_{ijkl} – модули упругости, c_{ik} – модули жёсткости дислокации, β'_{ijkl} – тензор акустодислокационного воздействия, b_i – вектор Бюргерса.

В работах [2,3] пульсационные составляющие считались пропорциональными ξ^2 :

$$A = A_0(1 + A_1 \xi^2),$$

$$B = B_0(1 + B_1\xi^2),$$

что приводило к рассмотрению одного уравнения относительно упругого смещения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - c^2 \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{B}{A} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - c^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{\beta^2}{A\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \\ = \frac{c^2 \alpha}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{c^2 \alpha B}{2A} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

где c – скорость продольной волны в материале без дислокаций, β – коэффициент акустодислокационного воздействия, α – коэффициент, описывающий нелинейность материала. В работе [2] разыскивается решение этого уравнения в виде бегущей волны $U(\eta = x - Vt)$:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\beta^2 U}{A\rho V^4(1 - \frac{c^2}{V^2}(1 + \alpha U_\eta))} = 0,$$

для чего делается предположение $V \gg c$. В [2] утверждается, что в этом случае будут существовать решения в виде бегущей волны.

Между тем, это обыкновенное дифференциальное уравнение поддаётся исследованию без предположения $V \gg c$:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} (1 + \alpha U_\eta) \right) + \frac{\beta^2 U}{A\rho V^4} = 0.$$

Произведём стандартную замену переменных $p(U) = U_\eta$. Наше уравнение теперь можно записать в виде

$$p_U p \left(1 - \frac{c^2}{V^2} (1 + \alpha p) \right) + \frac{\beta^2 U}{A^2 \rho V^4} = 0$$

и проинтегрировать по U с учётом начальных условий $U(0) = U_0$, $p(U_0) = p_0$:

$$\begin{aligned} U^2 = \frac{2A^2 \rho V^2 c^2 \alpha}{3\beta} p^3 - \frac{A^2 \rho V^4}{\beta} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} \right) p^2 - \\ - \frac{2A^2 \rho V^2 c^2 \alpha}{3\beta} p_0^3 - \frac{A^2 \rho V^4}{\beta} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} \right) p_0^2 + U_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили кубическую параболу на фазовой плоскости (U^2, p) , которая может иметь от одного до трёх действительных корней в зависимости от скорости V и начальных условий.

Если такой корень всего один, то ограниченного решения не существует – решение уходит в бесконечность; если есть два или три корня с положительным максимумом между двумя из них, то существует ограниченное решение исходного уравнения (см. [4]).

Эти различия определяются значением параметра

$$Q = \frac{V^6(1-\frac{c^2}{V^2})^3}{8A^3c^6\alpha^3} \left(p_0 + \frac{3}{\alpha} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} \right) V^2 p_o^2 - \frac{3\beta U_0^2}{2A^2\rho V^2 c^2 \alpha} \right) + \\ + \left(p_0 + \frac{3}{\alpha} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} \right) V^2 p_o^2 - \frac{3\beta U_0^2}{2A^2\rho V^2 c^2 \alpha} \right)^2,$$

а именно: когда $Q > 0$, вещественный корень один, когда $Q < 0$, есть три различных вещественных корня, наконец, когда $Q=0$, существует один простой и один двукратный корень нашего кубического уравнения.

Три вещественных корня гарантируют наличие ограниченного на бесконечности решения, а в последнем случае существование такого решения требует наличия положительного локального максимума между двумя корнями.

Также можно показать, что при условии $V \gg c$ (как в [2]) можно подобрать начальные условия, при которых бегущей волны не существует: для этого достаточно потребовать, например, чтобы параметр

$$Q' = \frac{V^6}{8A^3c^6\alpha^3} \left(p_0 + \frac{3}{\alpha} V^2 p_o^2 - \frac{3\beta U_0^2}{2A^2\rho V^2 c^2 \alpha} \right) + \left(p_0 + \frac{3}{\alpha} V^2 p_o^2 - \frac{3\beta U_0^2}{2A^2\rho V^2 c^2 \alpha} \right)^2$$

оказался положительным.

Обсуждение

Показано существование различных режимов для рассматриваемой системы. Ограниченные на бесконечности волновые решения исходного уравнения четвёртого порядка могут как существовать,

так и не существовать, в зависимости от начальных условий и скорости волны.

Исходное уравнение четвёртого порядка, насколько нам известно, в литературе не изучено, поэтому представляется интересным исследовать для него задачи существования, единственности и разрушения решения за конечное время.

Литература

1. Бурлак Г. Н., Островский И. В. // Письма в ЖТФ, 1997, Т. 23, Вып. 18, С. 69–74.
2. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В. // ЖТФ, 2010, Т. 80, Вып. 4, С. 149–151.
3. Ерофеев В. И. // Письма в ЖТФ, 2008, Т. 34, Вып. 4, С. 32–36.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: “Наука”, 1974 г.

Чепыжов В. В.

О пределе нулевой вязкости глобальных аттракторов 2D систем Навье-Стокса с сухим трением

Аннотация

Доказано, что глобальные аттракторы двумерной системы Навье-Стокса с экмановским трением в пределе нулевой вязкости сходятся в пространстве Соболева H^1 к обобщённому глобальному аттрактору 2D системы Эйлера с таким же трением. Изучены три постановки начально-краевой задачи.

1. Введение

В работе изучаются глобальные аттракторы двумерных систем Навье-Стокса с дополнительным членом, описывающим сухое трение при различных граничных условиях. Такие системы возникают в математической геофизике (см. [8]). Они моделируют крупномасштабные процессы, протекающие в атмосфере или океане. Основная диссипация, которая происходит в планетарном пограничном слое, описывается системой Навье-Стокса с экмановским членом (сухое трение). В системе также присутствует малый положительный параметр ν , кинематическая вязкость, который отвечает за мелкомасштабную диссипацию. Глобальный аттрактор 2D системы Навье-Стокса является компактным связным конечномерным множеством в бесконечномерном фазовом пространстве H^1 соответствующей динамической системы (динамической полугруппы). (Здесь H^1 обозначает пространство Соболева, согласованное с граничными условиями).

При $\nu = 0$ система Навье-Стокса переходит в 2D систему Эйлера с трением. Эта система изучена существенно хуже, чем 2D система Навье-Стокса. Например, для нее не известна теорема единственности решения начально-краевой задачи, которая необходима при построении глобального аттрактора соответствующей динамической системы в фазовом пространстве начальных условий H^1 . Тем не менее для такой системы Эйлера возможно построить обобщенный глобальный аттрактор, который является компактным множеством в фазовом пространстве H^1 , возможно, бесконечной размерности. В работе будет доказано, что глобальные аттракторы 2D системы Навье-Стокса с трением в пределе нулевой вязкости стремятся к обобщенному аттрактору 2D системы Эйлера с трением в смысле отклонения по Хаусдорфу множеств в пространстве H^1 . Будут рассмотрены три постановки начально-краевой задачи.

2. 2D система Навье-Стокса с трением и её аттрактор

Рассматривается 2D система Навье–Стокса с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = \nu \Delta u + g(x), & t \geq 0, \\ \operatorname{div} u = \partial_{x_1} u^1 + \partial_{x_2} u^2 = 0, & x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u^0(x), \end{cases} \quad (1)$$

которая в пределе нулевой вязкости при $\nu \rightarrow 0^+$ формально переходит в 2D систему Эйлера с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = g(x), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u^0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Неизвестными являются двумерный вектор скорости $u = u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t))$ и скалярное давление $p = p(x, t)$. Внешняя сила $g = g(x) = (g^1(x), g^2(x))$ известна.

Член ru , где $r > 0$ (фиксированное число), параметризует сухое (экмановское) трение, благодаря чему система (1) становится диссипативной при всех $\nu \geq 0$, включая систему Эйлера с трением (2) при $\nu = 0$.

Будем рассматривать три постановки задачи с разными граничными условиями.

- (i) Течение во всей плоскости, т.е., $x \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) Периодическое течение (на торе) $x \in \mathbb{T}^2 = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^2$, т.е., периодические граничные условия: $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$.
- (iii) Течение в ограниченной односвязной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ со “свободными” граничными условиями:

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{curl} u|_{\partial\Omega} = \partial_{x_1} u^2 - \partial_{x_2} u^1|_{\partial\Omega} = 0,$$

где n обозначает внешнюю нормаль к границе области $\partial\Omega$. Можно также рассмотреть более общий случай многосвязной области Ω с выкинутым конечным числом “островов”, на границе которых ставятся те же граничные условия.

Важный физический случай течения в ограниченной области с условиями прилипания на границе $u|_{\partial\Omega} = 0$ рассматриваться не будет. Проблема в этом случае не решена.

Системы вида (1) и (2) описывают плоские течения, соответственно, вязкой и невязкой (идеальной) жидкости в водоеме над грубым, шершавым дном: (i) течения на всей плоскости, (ii) периодические течения и (iii) течения в ограниченной области со свободными граничными условиями (не физическая постановка).

Изучается поведение глобальных аттракторов $\mathcal{A}_\nu$ двумерной системы Навье-Стокса с трением (1) при $\nu \rightarrow 0^+$.

Введем пространства Соболева, соответствующие рассматриваемым граничным задачам:

(i) $\mathcal{H}^s := \{u \in H^s(\mathbb{R}^2)^2, \quad \operatorname{div} u = 0\}, \quad s \geq 0.$

(ii) $\mathcal{H}^s := \{u \in H^s(\mathbb{T}^2)^2, \quad \operatorname{div} u = 0\}.$

(ii) Для этой задачи в ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ обозначим

$$\mathcal{V} = \{u \in C^\infty(\Omega)^2, \quad u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{curl} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{div} u = 0\}.$$

Тогда $\mathcal{H}^s := [\mathcal{V}]_{H^s(\Omega)^2}.$

Мы будем использовать пространства $\mathcal{H}^0$, $\mathcal{H}^1$ и $\mathcal{H}^2$.

Фазовым пространством для систем Навье-Стокса (1) и Эйлера (2) будет служить пространство $\mathcal{H}^1$ со стандартным скалярным произведением и нормой Соболева

$$(u, v)_1 := (u, v)_{\mathcal{H}^1} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2,$$

где $(u, v) = \int_D u(x) \cdot v(x) dx$ и $\|u\|^2 = (u, u)$ – скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}^0$, а область интегрирования D есть $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}^2$ или Ω в зависимости от рассматриваемой задачи.

Рассмотрим сначала систему Навье-Стокса с трением (1).

Обозначим трилинейную форму

$$b(u, v, w) := ((u, \nabla)v, w) = \int_D ((u(x), \nabla)v(x), w(x)) dx,$$

которая непрерывна на $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1$.

Перечислим важные свойства ортогональности трилинейной формы $b(u, v, w)$.

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall u, v, w \in \mathcal{H}^1 \quad \Rightarrow \quad b(u, v, v) = 0.$$

Выполнено для любых граничных условий, а также для 3D системы Навье-Стокса.

$$b(u, u, \Delta u) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}^2.$$

Выполнено только для 2D случая для рассматриваемых трех граничных задач.

Функция $u(x, t) \in C([0, T], \mathcal{H}^1) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^2)$ называется решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, если

$$\frac{d}{dt}(u(t), w) + b(u, u, w) + \nu(\nabla u, \nabla w) + r(u(t), w) = (g, w), \quad \forall w \in \mathcal{H}^1.$$

Причем производная по времени понимается в смысле обобщенный функций на интервале $(0, T)$.

Теорема 1. Пусть $u^0, g \in \mathcal{H}^1$. Тогда при $\nu > 0, \forall T > 0$, система (1) имеет единственное решение $u \in C([0, T], \mathcal{H}^1) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^2)$, и выполнено следующее уравнение баланса для функции энергии и энтропии $\|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 + \nu (\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2) + r \|u(t)\|_1^2 = (g, u(t))_1. \quad (3)$$

Идея доказательства. Необходимо исходное уравнение

$$\partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = \nu \Delta u + g(x)$$

умножить скалярно в $\mathcal{H}^0$ на функции u и Δu и воспользоваться свойствами ортогональности $b(u, u, u) = 0$ и $b(u, u, \Delta u) = 0$, а также тем, что

$$(\nabla p, u) = 0, \quad (\nabla p, \Delta u) = 0$$

в силу того, что $\operatorname{div} u = 0$. (Вектор функции с нулевой дивергенцией ортогональны градиентам функций).

Рассмотрим операторы

$$S(t) : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^1, \quad S(t)u^0 = u(t), \quad t \geq 0,$$

где $u(t)$ – решение системы (1) с начальным условием u^0 .

Определение 1. Множество $\mathcal{A}_\nu \subseteq \mathcal{H}^1$ называется *глобальный аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$, если (i) $\mathcal{A}_\nu$ компактно в $\mathcal{H}^1$; (ii) $\mathcal{A}_\nu$ притягивает любые ограниченные множества B из $\mathcal{H}^1$:

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}^1}(S(t)B, \mathcal{A}_\nu) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty);$$

(iii) $\mathcal{A}_\nu$ строго инвариантно: $S(t)\mathcal{A}_\nu = \mathcal{A}_\nu$ для всех $t \geq 0$.

Здесь dist_E обозначает (несимметрическое) расстояние по Хаусдорфу от множества X до Y в банаховом пространстве E :

$$\operatorname{dist}_E(X, Y) := \sup_{x \in X} \operatorname{dist}_E(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E.$$

3. 2D система Эйлера с трением и её обобщённый аттрактор

Изучим теперь систему Эйлера с трением (2).

Функция $u(x, t) \in C([0, T], \mathcal{H}^1)$ называется решением системы (2) на отрезке $[0, T]$, если

$$\frac{d}{dt}(u(t), w) + b(u(t), u(t), w) + r(u(t), w) = (g, w), \quad \forall w \in \mathcal{H}^1.$$

Теорема 2. Пусть $u^0, g \in \mathcal{H}^1$. Тогда при $\nu = 0$ система (2) имеет по крайней мере одно решение $u(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}^1)$ и для любого такого решения вещественная функция $\|u(t)\|_1^2 = \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2$ является абсолютно непрерывной по времени t , и выполняется тождество для энергии и энстрофии

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 + r \|u(t)\|_1^2 = (u(t), g)_1. \quad (4)$$

Заметим, что формально теорема 2 получается из теоремы 1, если подставить $\nu = 0$. Однако настоящее доказательство более сложно и основано на уравнении вихря

$$\partial_t \omega + (u, \nabla) \omega + r \omega = \operatorname{curl} g, \quad \omega(x, t) = \operatorname{curl} u = \partial_{x_1} u^2 - \partial_{x_2} u^1,$$

которому удовлетворяет любое решение $u(x, t)$ уравнения Эйлера с трением. Это линейное уравнение переноса имеет ряд хороших свойств. В частности для него получается тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega(t)\|^2 + r \|\omega(t)\|^2 = (\omega(t), \operatorname{curl} g),$$

которое, по сути, совпадает с тождеством (4), поскольку

$$\|\nabla u\|^2 = \|\operatorname{curl} u\|^2 + \|\operatorname{div} u\|^2 = \|\operatorname{curl} u\|^2 = \|\omega(t)\|^2.$$

Вопрос о справедливости теоремы единственности для двумерной системы Эйлера в пространстве $C([0, T]; \mathcal{H}^1)$ при условии, что $u^0, g \in \mathcal{H}^1$ остается открытым.

Замечательная теорема В. Юдовича о единственности решения системы Эйлера (см. [9]) доказана для более гладких условий $u^0, g \in \mathcal{W}^{1,\infty}$ и в более гладком пространстве $L^\infty(0, T; W^{1,\infty})$.

Переходя к аттрактору, необходимо обобщить определение глобального аттрактора для систем Навье-Стокса (1) с единственностью на случай системы Эйлера (2), решения которой в классе $C([0, T]; \mathcal{H}^1)$ могут быть не единственными.

Определение 2. Множество $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{H}^1$ называется (*обобщенным*) *глобальным аттрактором* (2), если: (i) $\mathcal{A}_0$ компактно в $\mathcal{H}^1$; (ii) $\mathcal{A}_0$ является *притягивающим*: для любого ограниченного в $C_b(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}^1)$ подмножества $\mathcal{B} = \{u(t), t \geq 0\}$, состоящего из решений системы (2), выполняется

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{B}(t), \mathcal{A}_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

(iii) $\mathcal{A}_0$ минимально по включению среди всех компактных притягивающих множеств.

Здесь $\mathcal{B}(t)$ корректно определенное сечение в момент $t \geq 0$ множества ограниченных траекторий $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(t) = \{u(t), u \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{H}^1.$$

Аттракторы для классической 2D системы Навье-Стокса (т.е. при $r = 0$) были построены в пионерских работах О. А. Ладыженской, М. И. Вишика, А. В. Бабина, Р. Темама (см. [6,7]).

Глобальный аттрактор для двумерной системы Навье-Стокса с трением (1) был построен в работе А. А. Ильина, К. Патни и С. В. Зелика (см. [4]) в фазовом пространстве $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^2)$. Для построения аттрактора использовался метод энергетических тождеств из работы R. Rosa (см. [5]). Однако, имея уравнение баланса энергии и энтропии, с помощью метода R. Rosa строится глобальный аттрактор и в рассматриваемых фазовых пространствах $\mathcal{H}^1$.

Более сложный вопрос о построении обобщенного аттрактора $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{H}^1$ двумерной системы Эйлера с трением (2) в сильной топологии $\mathcal{H}^1$ решен в работах В. В. Чепыжова, А. А. Ильина и С. В. Зелика (см. [1,2]), где также существенную роль играло уравнение баланса энергии и энтропии (4), которое доказывается с использованием методов известной работы R. DiPerna, P. Lions по уравнениям переноса (см. [3]).

4. Предел нулевой вязкости аттракторов системы Навье-Стокса с трением

Итак, для каждого $\nu > 0$ система Навье-Стокса (1) обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\nu$, при этом предельная система Эйлера (2) при $\nu = 0$ имеет обобщенный глобальный аттрактор $\mathcal{A}_0$, причем семейство множеств $\{\mathcal{A}_\nu\}_{\nu \geq 0}$ равномерно ограничено в пространстве $\mathcal{H}^1$:

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\nu} \|u\|_1 \leq \frac{\|g\|_1}{r} \quad \forall \nu \geq 0.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. Пусть $g \in \mathcal{H}^1$. Тогда аттракторы $\mathcal{A}_\nu$ в $\mathcal{H}^1$ сильно полунепрерывно сверху зависят от ν при $\nu \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_0) = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $\nu_n \rightarrow 0^+$, и для каждого ν_n выберем определенным образом точку, лежащую на аттракторе $\mathcal{A}_{\nu_n}$ уравнения (1) с $\nu = \nu_n$. А именно, выберем ту точку $\bar{u}_n \in \mathcal{A}_{\nu_n}$, от которой расстояние до $\mathcal{A}_0$ равно расстоянию от $\mathcal{A}_{\nu_n}$ до $\mathcal{A}_0$. Ясно, что в силу компактности $\mathcal{A}_{\nu_n}$ и $\mathcal{A}_0$ это можно сделать.

В силу строгой инвариантности глобального аттрактора, через точку $\bar{u}_n$ в момент времени $t = 0$ проходит полная траектория $u_n(t)$ (решение системы (1) с $\nu = \nu_n$, которая ограничена в $\mathcal{H}^1$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$), т.е. $u_n(0) = \bar{u}_n$. Итак,

$$\bar{u}_n = u_n(0) \in \mathcal{A}_{\nu_n}, \quad u_n \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H}^1), \quad \|u_n(\cdot)\|_{C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H}^1)} \leq \text{const}, \quad (6)$$

равномерно по n . Кроме того, в силу выбора точек $\bar{u}_n$ выполняется равенства

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^1}(u_n(0), \mathcal{A}_0) = \text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_{\nu_n}, \mathcal{A}_0). \quad (7)$$

В силу (6) из семейства полных траекторий $u_n(t)$ можно выделить подпоследовательность, вновь обозначенную через $u_n(t)$, такую что

$$u_n(t) \rightharpoonup u_0(t) \quad \text{*}-\text{слабо в } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{H}^1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

и предельная функция $u_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением системы Эйлера с диссипацией (2) на всей оси времени, которое равномерно (по $t \in \mathbb{R}$) ограничено в $\mathcal{H}^1$.

Доказательство этого факта повторяет доказательство аналогичного предельного перехода в работе А. А. Ильина, К. Патни и С. В. Зелика. Используется, что

$$\nu_n(\nabla u_n(t), \nabla \varphi) \rightarrow 0 \quad (\nu_n \rightarrow 0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2, \operatorname{div} \varphi = 0.$$

Очевидно, что $u_0(t) \in \mathcal{A}_0 \forall t \in \mathbb{R}$ и в частности $u_0(0) \in \mathcal{A}_0$.

Из (8) следует, что

$$u_n(0) \rightharpoonup u_0(0) \quad \text{слабо в } \mathcal{H}^1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Осталось показать, что эта сходимость является *сильной*.

Принципиально важным является тот факт, что в силу теоремы 2 полная траектория $u_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$ системы Эйлера (2) удовлетворяет уравнению баланса энергии и энтрофии (4), а также то, что на сечении $t = 0$ выполняется (9).

Полные траектории $u_n = u_n(t)$ системы Навье-Стокса (1) удовлетворяют уравнениям баланса энергии и энтрофии (3). Отбросим в этом уравнении второе слагаемое, содержащее ν , которое положительно, умножим полученное неравенство на e^{2rt} и проинтегрируем по t от $-h_n$ до 0, где $h_n \rightarrow +\infty$. Получим

$$\|u_n(0)\|_1^2 \leq \|u_n(-h_n)\|_1^2 e^{-2rh_n} + 2 \int_{-h_n}^0 (u_n(t), g)_1 e^{2rt} dt.$$

В силу (6) при $n \rightarrow \infty$ первый член справа исчезает, а для второго в силу (8) имеем

$$\int_{-h_n}^0 (u_n(t), g)_1 e^{2rt} dt \rightarrow \int_{-\infty}^0 (u_0(t), g)_1 e^{2rt} dt,$$

откуда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1^2 \leq 2 \int_{-\infty}^0 (u_0(t), g)_1 e^{2rt} dt.$$

Предельная траектория $u_0(t)$ есть решение системы Эйлера (2) и удовлетворяет энергетическому тождеству (4), которое мы

аналогично умножаем на e^{2rt} и интегрируем по t от $-h_n$ до 0 и получаем равенство

$$\|u_0(0)\|_1^2 = \|u_0(-h_n)\|_1^2 e^{-2rh_n} + 2 \int_{-h_n}^0 (u_0(t), g)_1 e^{2rt} dt.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\|u_0(0)\|_1^2 = 2 \int_{-\infty}^0 (u_0(t), g)_1 e^{2rt} dt,$$

что вместе с предыдущим неравенством дает

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1^2 \leq 2 \int_{-\infty}^0 (u_0(t), g)_1 e^{2rt} dt = \|u_0(0)\|_1^2. \quad (10)$$

Из слабой сходимости $u_n(0) \rightharpoonup u_0(0)$ в $\mathcal{H}^1$ (см. (9)) выводим, что

$$\|u_0(0)\|_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1.$$

Следовательно, вместе с (10) получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1^2 \leq \|u_0(0)\|_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1.$$

Это влечёт существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|_1 = \|u_0(0)\|_1.$$

Из слабой сходимости $u_n(0) \rightharpoonup u_0(0)$ в $\mathcal{H}^1$ и сходимости норм следует сильная сходимость:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - u_0(0)\|_1 = 0.$$

С учётом (7) это дает

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_{\nu_n}, \mathcal{A}_0) = \text{dist}_{\mathcal{H}^1}(u_n(0), \mathcal{A}_0) \leq \|u_n(0) - u_0(0)\|_1 \rightarrow 0.$$

Поскольку в процессе доказательства мы переходили к подпоследовательностям, то на самом деле мы доказали, что

$$\liminf_{\nu_n \rightarrow 0^+} \text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_{\nu_n}, \mathcal{A}_0) = 0$$

для *любой* последовательности $\nu_n \rightarrow 0^+$. Очевидно, что из этого следует (5). Теорема доказана.

5. Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 23-71-30008).

Литература

1. Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V. *Strong trajectory and global $\mathbf{W}^{1,p}$ -attractors for the damped-driven Euler system in $\mathbb{R}^2$* // Discrete Contin. Dyn. Syst. B – 2017. – Vol. 22, №5. – P. 1835–1855.
2. Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V. *Vanishing viscosity limit for global attractors for the damped Navier–Stokes system with stress free boundary conditions* // Physica D – 2018. – Vol. 376–377. P. 31–38.
3. DiPerna R., Lions P. *Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory* // Invent. Math. – 1989. – Vol. 98. – P. 511–547.
4. Ilyin A. A., Patni K., Zelik S. V. *Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^2$* // Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2016. – Vol. 36. – P. 2085–2102.
5. Rosa R. *The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains* // Nonlinear Anal. – 1998. – Vol. 32. – P. 71–85.
6. Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. – New York: Springer. – 1997.
7. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений*. – Москва: Наука. – 1989.
8. Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*. Т.1. – Москва: Мир. – 1984.
9. Юдович В. И. *Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1963, – Т. 3, №6. – С. 1032–1066.

On the Fibonacci numbers over $\mathbb{F}_p$

Abstract

We study the sequence $\mathcal{F}_p$ of the Fibonacci numbers modulo prime p . The new lower bound of size of the Minkowsky sum $\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p$ is obtained.

1. Introduction

Fibonacci sequence is the sequence $F_1, F_2, \dots$ such that

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{i+2} = F_i + F_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Numbers $F_i, i \in \mathbb{N}$ are called Fibonacci numbers.

We consider the Fibonacci sequence $f_1, f_2, \dots$ modulo m . This means that $f_i = F_i \pmod{m}$, with $m \in \mathbb{N}$. The Fibonacci sequence modulo m is periodic. The smallest period of the Fibonacci sequence modulo m is called the Pisano period $\pi(m)$. We will consider the prime $m = p$ and we also assume $f_n \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

The famous Binet's formula for Fibonacci numbers

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-n} \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

is also true for Fibonacci numbers f_n modulo prime p . But $\sqrt{5}$ belongs to the field $\mathbb{F}_{p^2} = \{m + \sqrt{5}n \mid m, n \in \mathbb{F}_p\}$, $\sqrt{5}$ is the element of algebraic extension of $\mathbb{F}_p$, or $\mathbb{F}_p$ if $\sqrt{5} \in \mathbb{F}_p$.

Let us denote by $\mathcal{F}_p$ the set of Fibonacci numbers modulo prime p . It means

$$\mathcal{F}_p = \{f_1, \dots, f_{\pi(p)}\}, \quad |\mathcal{F}_p| = \pi(p).$$

Let us define two types of sets:

- 1) additive shift: $\mathcal{F}_p + q = \{x + q \mid x \in \mathcal{F}_p\}, \quad q \in \mathbb{F}_p;$
- 2) Minkowskii sum: $\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p = \{x + y \mid x, y \in \mathcal{F}_p\}.$

We prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $\mathcal{F}_p$ be the set of Fibonacci numbers modulo prime p , and $|\mathcal{F}_p| \leq p^{3/4}$, then the bound*

$$|\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p| \geq \frac{1}{12}|\mathcal{F}_p|^{4/3} - \frac{1}{12}|\mathcal{F}_p|^{1/3} + 1$$

holds.

Proof of Theorem 1

If we denote the set $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ of values of the sequence defined by the linear recurrence relation:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} - \varepsilon_k x_n, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_k^k = 1 \quad (1)$$

by $C_{a, \varepsilon_k, x_1^0, x_2^0}$. In our denotation, Fibonacci numbers $\mathcal{F}_p = C_{1, -1, 1, 1}$ and $-\mathcal{F}_p = C_{1, -1, -1, -1}$. We will use the following Prop. 3 from [1].

Proposition 3. *For the intersection of the sets of values of the two linear recurrence sequences (1) and the subgroup $G \subset \mathbb{F}_p^*$, the inequality holds:*

$$|C_{a, \varepsilon_k, x_1^0, x_2^0} \cap (C_{a, \varepsilon_k, x_1^0, x_2^0} - q)| \leq \max \left(3 \cdot 2^{2/3} k^{4/3} |C_{a, \varepsilon_k, x_1^0, x_2^0}|^{2/3}, \frac{12}{p} |C_{a, \varepsilon_k, x_1^0, x_2^0}|^2 \right).$$

Proof of Theorem 1. The total number of pairs (x, y) such that $x, y \in \mathcal{F}_p$ is $|\mathcal{F}_p|^2$. This means that $|\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p| \leq |\mathcal{F}_p|^2$. Let us estimate the number of pairs $(x, y) \in \mathcal{F}_p^2$ such that $x + y = q$ for $q \in \mathbb{F}_p$. We have that

$$\#\{(x, y) \in \mathcal{F}_p^2 \mid x + y = q\} = |\mathcal{F}_p \cap (-q - \mathcal{F}_p)| = |C_{1, -1, 1, 1} \cap (C_{1, -1, -1, -1} - q)|.$$

Using Prop. 3 from [1] we obtain that

$$|C_{1, -1, 1, 1} \cap (C_{1, -1, -1, -1} - q)| \leq 12 \max \left(|\mathcal{F}_p|^{2/3}, \frac{1}{p} |\mathcal{F}_p|^2 \right).$$

In our case $k = 2$. If $|\mathcal{F}_p| \leq p^{3/4}$ then for any $q \in \mathbb{F}_p^*$ we have the bound

$$\#\{(x, y) \in \mathcal{F}_p^2 \mid x + y = q\} \leq 12 |\mathcal{F}_p|^{2/3}.$$

Also we see that

$$\#\{(x, y) \in \mathcal{F}_p^2 \mid x + y = 0\} \leq |\mathcal{F}_p|.$$

Thus, the number of pairs $(x, y) \in \mathcal{F}_p$ such that $x + y \neq 0$ does not exceed $|\mathcal{F}_p|^2 - |\mathcal{F}_p|$. The number of different $q \in \mathbb{F}_p^*$, such that there exist $x, y \in \mathcal{F}_p$ and $x + y = q$ not less than

$$\frac{|\mathcal{F}_p|^2 - |\mathcal{F}_p|}{12|\mathcal{F}_p|^{2/3}}.$$

We have the following bound

$$|\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p| = \#\{q \in \mathbb{F}_p \mid \exists x, y \in \mathcal{F}_p : x + y = q\} \geq \frac{1}{12}|\mathcal{F}_p|^{4/3} - \frac{1}{12}|\mathcal{F}_p|^{1/3} + 1.$$

□

Literature

1. Vyugin I. V. *On the structure of solutions graph of the Markoff–Hurwitz equation and recurrence sequences* // Arxiv:2509.19289

Сведения об авторах

Абрамов Сергей Александрович — д.ф.-м.н., гл.н.с. Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН, проф. факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (sergeyabramov@mail.ru)

Артамонов Дмитрий Вячеславович — к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент (artamonovdv@my.msu.ru)

Ахметьев Петр Михайлович — д.ф.-м.н., ИЗМИРАН Троицк Москва, в.н.с. (pmakhmet@mail.ru)

Байбакова Жанна Романовна — студентка ГОУ ВО МО «ГСГУ» (zhanna_baibak11@mail.ru)

Винник Кристина Сергеевна — студентка ГОУ ВО МО «ГСГУ» (kristina.vinnik.05@mail.ru)

Вьюгин Илья Владимирович — к.ф.-м.н., Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», доцент (ilyavyugin@yandex.ru)

Краснов Владимир Александрович — к.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, доцент (vladimir.krasnov3107@gmail.com, krasnov-va@rudn.ru)

Лексин Владимир Павлович — д.ф.-м.н., профессор ГОУ ВО МО «ГСГУ» (lexin_vp@mail.ru)

Мирошниченко Алина Николаевна — студентка ГОУ ВО МО ГСГУ (alinamiron05@gmail.com)

Петров Евгений Евгеньевич — к.ф.-м.н.

Рябенко Анна Андреевна — к.ф.-м.н., ст.н.с. Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН (anna.ryabenko@gmail.com)

Смирнов Александр Юрьевич — к.ф.м.н., м.н.с. Физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, ст.н.с. Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Пушкова (smirnoff.alexandr@gmail.com)

Чепыжов Владимир Викторович — д.ф.-м.н., Институт проблем передачи информации, РАН, Москва, гл.н.с. НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород (cher@iitp.ru)

Dutta Sashadhar — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», аспирант (duttamathe@gmail.com)

Научное издание

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИКИ**

**ТРУДЫ
XVI ПРИОКСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
5-7 июня 2025 года**

Технический редактор: Мироненко С.Н.
Компьютерная верстка: Бирюкова О.Н.

Подписано в печать 19.06.2026. Формат 60х90/16
Усл. печ. лис. 10. Тираж 100. Заказ №0251/38/96н

140411, г. Коломна, ул. Зеленая, 30
ГОУ ВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет»

Отпечатано в ГОУ ВО МО «ГСГУ», 140411, г. Коломна, ул. Зеленая, 30