

Продолжения полиномиальных матриц

Аннотация

Добавление членов высоких степеней к элементам невырожденной полиномиальной матрицы может привести к потере невырожденности матрицы. Ранее был предложен алгоритм проверки для заданной полиномиальной матрицы осуществимости такой потери. В предлагаемой новой редакции этот алгоритм, установив возможность потери невырожденности, явно указывает продолжения элементов матрицы путем добавления к ним новых членов (при этом элементы-полиномы могут превращаться в формальные степенные ряды), которые приводят к вырожденной матрице.

1. Введение

Задача распознавания строго невырожденных матриц (т.е. матриц, остающихся невырожденными при любом продолжении элементов матрицы добавлением членов более высоких степеней, что может превращать полиномы в формальные степенные ряды) является разрешимой алгоритмической задачей: в [1, 2] предложен алгоритм, применимый к любой матрице указанного вида и дающий ответ “да”, если матрица строго невырождена, и “нет” — в противном случае. Отметим, что в случае ответа “нет” представлял бы интерес контрпример, подтверждающий, что исходная матрица не является строго невырожденной, т.е. пример продолжения элементов матрицы, приводящего к вырожденной матрице. Такое продолжение могло бы быть использовано в каких-то последующих вычислениях.

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий для заданной невырожденной полиномиальной квадратной матрицы, не являющейся при этом строго невырожденной, построить продолжение, дающее вырожденную матрицу. Это продолжение задается в некотором обозримом виде, даже если число добавляемых членов бесконечно.

Напомним, что кольцо полиномов от x над полем K обозначается через $K[x]$, кольцо формальных степенных рядов — через $K[[x]]$.

В [3] предложен алгоритм, применимый к произвольной невырожденной квадратной матрице $P = (p_{ij})$, в которой все элементы p_{ij} суть полиномы от x над полем K ; алгоритм позволяет проверить, верно ли, что P *строго невырождена*, т.е. матрица $P + Q$ невырождена при любой матрице Q с элементами из кольца $K[[x]]$ формальных степенных рядов, имеющей, во-первых, такой же размер, как P , и, во-вторых, обладающей свойством $\text{val } Q \geq 1 + \deg P$. Как обычно, валюацией $\text{val } f(x)$ степенного ряда или полинома называется младшая степень x , имеющая в $f(x)$ ненулевой коэффициент; по определению $\text{val } 0 = \infty$. Валюацией матрицы, составленной из степенных рядов или полиномов, называется наименьшая из валюаций всех элементов этой матрицы. Степенью составленной из полиномов матрицы считается наибольшая из всех степеней элементов, при этом $\deg 0 = -\infty$.

Будем говорить, что полином $p(x) \in K[x]$ является *усечением* ряда $f(x) \in K[[x]]$, если $p(x)$ получается из $f(x)$ отбрасыванием всех членов степени большей, чем некоторое целое $d \geq -1$, называемое *степенью усечения*. Усечение $p(x)$ может быть названо в этом случае d -*усечением* ряда $f(x)$. Ряд $f(x)$ называется *продолжением* полинома $p(x)$. Равенство $d = -1$ означает, что $p(x) = 0$ и мы не имеем никакой информации об $f(x)$, кроме его принадлежности $K[[x]]$. Полиномиальная матрица P есть усечение матрицы M с элементами в $K[[x]]$, если каждый элемент матрицы P служит усечением соответствующего элемента матрицы M , которая в этом случае есть продолжение матрицы P .

При заданном d -усечении $p(x)$ ряда $f(x)$ выполнено $f(x) = p(x) + g(x)$, где $g(x) \in K[[x]]$ — некоторый ряд, для которого $\text{val } g(x) \geq d + 1$. Валюацией *усечения* такого вида называем валюацию полинома $p(x)$.

В дальнейшем мы рассматриваем заданную полиномиальную матрицу P как усечение некоторой неизвестной нам матрицы

$$M = (m_{ij}), \quad m_{ij} \in K[[x]].$$

В [3] разбирался случай, когда все элементы P суть усе-

чения элементов матрицы M , при этом степень усечения d одинакова для всех элементов матрицы и совпадает со степенью матрицы P . Строгая невырожденность матрицы P гарантирует для матрицы M ее невырожденность. В [3, предл. 1] доказан критерий, т.е. необходимое и достаточное условие, строгой невырожденности полиномиальной матрицы P :

$$d + \text{val } P^* \geq \text{val } \det P, \quad (1)$$

где $P^* = (p_{ij}^*)$ — матрица алгебраических дополнений элементов матрицы P . Напомним, что алгебраическим дополнением элемента p_{ij} называется $p_{ij}^* = (-1)^{i+j} \bar{P}_{ij}$, где $\bar{P}_{ij}$ — минор элемента p_{ij} ([4, § 5]).

Далее полагаем, что для заданной полиномиальной невырожденной матрицы $P = (p_{ij})$ зафиксированы такие целые числа $d_{ij} \geq -1$, что

$$\deg p_{ij} \leq d_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Если все d_{ij} равны между собой ($d_{ij} = d$), то усечение будет называться *плоским*. Заметим, что степень соответствующей полиномиальной матрицы P может быть меньше d .

Ниже мы исходим из определения строго невырожденного усечения, без предположения, что оно плоское.

Определение 1. Пусть $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, — невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ таковы, что выполнено (2). Будем называть заданное таким образом усечение *строго невырожденным*, если для любой $n \times n$ -матрицы $Q = (q_{ij})$, элементы которой принадлежат $K[[x]]$, $\text{val } q_{ij} \geq d_{ij} + 1$, матрица $P + Q$ невырождена.

Для плоского усечения выполнение условия (1) является критерием ее строгой невырожденности и в том случае, если $d > \deg P$.

2. Переход к плоскому усечению

Определение 2. Пусть имеет место (2) и $d = \max d_{ij}$. Для заданного усечения его *K -завершением* назовем полиномиальную

матрицу, полученную добавлением к каждому p_{ij} при $d_{ij} < d$ каких-либо членов степеней $d_{ij} + 1, \dots, d$ с коэффициентами из K . *Формальным завершением* назовем такое завершение, в котором все добавляемые члены имеют попарно различные неопределенные (символьные) коэффициенты.

Из определения 2 видно, что K -завершение является продолжением заданного усечения и продолжение K -завершения является продолжением также и исходного усечения. Отсюда следует, что усечение является строго невырожденным, если и только если каждое его K -завершение, рассматриваемое как плоское d -усечение, — строго невырождено. Если какое-либо K -завершение $P' = (p'_{ij})$ вырождено или не является строго невырожденным, то исходное усечение не является строго невырожденным.

Задача в том, чтобы для заданного усечения, не являющегося строго невырожденным, построить вырожденное продолжение M . Такую матрицу M мы будем называть *контрпримером к гипотезе о строгой невырожденности* усечения, или коротко — контрпримером. Построение контрпримера сводится к построению K -завершения P' , которое либо вырождено (и тогда $M = P'$), либо не является строго невырожденным. Во втором случае достаточно построить контрпример M для P' , тогда M будет также контрпримером и для исходного усечения.

В [3], в доказательстве предложения 1 описано (с точностью до замены обозначения P на P'), как построить вырожденное продолжение M для не являющейся строго невырожденной полиномиальной матрицы P' . Пусть $\deg P' \leq d$, $\text{val det } P' = \nu$ и $P'^* = (p'^*_{ij})$ — матрица алгебраических дополнений для P' . Из того, что P' не является строго невырожденной матрицей, следует, что для нее не выполняется условие (1), т.е. существует элемент $p'^*_{i_0 j_0}$ такой, что $d + \text{val } p'^*_{i_0 j_0} < \nu$. Тогда $n \times n$ -матрица $M = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} p'_{ij} - \frac{\det P'}{p'^*_{i_0 j_0}}, & \text{если } i = i_0, j = j_0, \\ p'_{ij}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

является контрпримером для P' (обоснование см. в [3, разд. 3], в

частности, обоснование того, что рациональная функция $\frac{\det P'}{p_{i_0 j_0}'^*}$ разлагается в ряд, не содержащий степеней x с показателями меньшими, чем $\deg p_{ij}'$.

3. Свойства формального завершения

Для невырожденной полиномиальной $n \times n$ -матрицы $P = (p_{ij})$ и целых чисел $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$, таких, что выполнено (2), построим формальное завершение $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Часть элементов $\tilde{P}$ будет зависеть от неопределенных коэффициентов, которые мы дальше будем называть параметрами. Обозначим через T множество всех параметров из $\tilde{P}$.

Определитель формального завершения $\det \tilde{P}$ является полиномом от x . Его степень не превышает dn , коэффициенты зависят от параметров из множества T :

$$\det \tilde{P} = r_\nu(T) x^\nu + r_{\nu+1}(T) x^{\nu+1} + \dots + r_{dn}(T) x^{dn}, \quad (4)$$

где $r_\nu(T) \neq 0$, $0 \leq \nu \leq dn$. Число ν будем называть валюацией $\det \tilde{P}$, свободной от параметров, если $r_\nu(T)$ — константа. Если же при некоторых значениях из K параметров T младший коэффициент $r_\nu(T)$ обращается в ноль, ν будем называть T -валюацией.

Коэффициенты определителя являются полиномами над K от параметров из T , причем степень вхождения каждого $t \in T$ не превосходит 1. Такого рода полином, обозначим его $r(T)$, является либо константой ($r(T) \in K$), либо суммой константы и конечной суммы членов вида $a t_1 \dots t_s$, где $a \in K$, $t_1, \dots, t_s \in T$. Пусть $t \in T$. Тогда $r(T)$ можно представить в виде:

$$r(T) = \alpha(T) t + \beta(T), \quad (5)$$

где $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ не зависят от t , но, возможно, зависят от некоторых других параметров из T и являются полиномами такой же структуры, что и $r(T)$.

Покажем, как индуктивно для ненулевого полинома $r(T)$ подобрать набор значений из K для входящих в него параметров, при которых $r(T)$ принимает ненулевое значение в K . Индукцию проведем по количеству параметров, входящих в $r(T)$.

Итак, $r(T)$ зависит от t . Если $\beta(T) = 0$, т.е. $r(T) = \alpha(T)t$, найдем набор значений, при котором в ноль не обращается полином $\alpha(T)$, зависящий от меньшего количества параметров, чем $r(T)$; для t можно взять любое ненулевое значение из K , например, 1. Если $\beta(T)$ — ненулевая константа, то для t можно взять значение 0 и для параметров из $\alpha(T)$ — любые значения, например, тоже 0. Если $\beta(T)$ — ненулевой полином, найдем набор значений, при котором в ноль не обращается $\beta(T)$; для t и параметров, от которых зависит $\alpha(T)$, но не зависит $\beta(T)$, берем значение 0.

Такие наборы значений параметров понадобятся в следующем разделе при построении контрпримера для усечения по его формальному завершению $\tilde{P}$.

4. Построение контрпримера

Построим для формального завершения $\tilde{P}$ матрицу алгебраических дополнений $\tilde{P}^* = (\tilde{p}_{ij}^*)$. Заметим, что каждый элемент $\tilde{P}^*$ — это, с точностью до знака, минор, т.е. определитель подматрицы формального завершения, и, следовательно, является полиномом от x с коэффициентами вида (5). При любых значениях параметров, валюация не может стать меньше, чем $\mu = \text{val } \tilde{P}^*$. Т.е. $\text{val } P'^* \geq \mu$ для любого K -завершения P' .

Валюация $\nu = \text{val } \det \tilde{P}$ также может быть свободной от параметров или нет, и $\text{val } \det P' \geq \nu$ для любого K -завершения P' .

Предложение 1. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ таковы, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть, далее, T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ .

Пусть ν — свободная от параметров валюация определителя $\det \tilde{P}$ и выполняется

$$d + \mu \geq \nu.$$

Тогда заданное усечение строго невырождено.

Доказательство. Итак $\text{val det } \tilde{P} = \nu$ для всех значений параметров из T , т.е. $\text{val det } P' = \nu$ для любого K -завершения P' . Также для любого K -завершения P' выполняется $\text{val } P'^* \geq \mu$, где P'^* — матрица алгебраических дополнений для P' . Следовательно,

$$d + \text{val } P'^* \geq d + \mu \geq \nu = \text{val det } P'.$$

Следовательно, для любого K -завершения P' выполняется критерий (1), т.е. все K -завершения строго невырождены. $\square$

Предложение 2. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ такие, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть, далее, T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ . Пусть при этом выполнено

$$d + \mu < \nu.$$

Тогда заданное усечение не является строго невырожденным.

Доказательство. Поскольку $\text{val } \tilde{P}^* = \mu$, то в матрице $\tilde{P}^*$ найдется элемент $\tilde{p}_{i_0 j_0}^*$, являющийся полиномом от x , в котором присутствует ненулевое слагаемое вида $r(T) x^\mu$. Покажем, что это обеспечивает существование K -завершения P' такого, что выполняется $\text{val } P'^* = \mu$, где P'^* — матрица алгебраических дополнений для P' .

Действительно, либо $r(T)$ не зависит от параметров из T , либо имеет вид (5) и можно найти значения для параметров из $r(T)$ такие, что $r(T)$ не равно нулю, как описано в предыдущем разделе. Те параметры из T , которые не входят в $r(T)$, можно положить равными 0. Для матрицы P' , соответствующей построенным значениям, получим $\text{val } p_{i_0 j_0}'^* = \text{val } P'^* = \mu$.

Далее, для любого завершения P' выполняется $\text{val det } P' \geq \nu$. Возможно, что матрица P' , соответствующая построенным значениям, окажется вырожденной ($\text{val det } P' = \infty$), тогда P' является контрпримером и заданное усечение не является строго

невырожденным. Иначе, получаем

$$d + \text{val } P'^* = d + \mu < \nu \leq \text{val } \det P'.$$

Следовательно, для построенного P' не выполняется критерий (1). Строим для него контрпример M согласно (3). $\square$

Предложение 3. Пусть невырожденная полиномиальная $n \times n$ -матрица $P = (p_{ij})$, $p_{ij} \in K[x]$, и целые числа $d_{ij} \geq -1$, $i, j = 1, \dots, n$ такие, что выполнено (2), задают усечение с формальным завершением $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$. Пусть далее T — множество параметров формального завершения, (4) — определитель формального завершения, и $\tilde{P}^*$ — матрица алгебраических дополнений для $\tilde{P}$, валюация которой равна μ .

Пусть ν — T -валюация определителя $\det \tilde{P}$, т.е. $r_\nu(T)$ в (4) зависит от некоторого параметра t , и выполняется

$$d + \mu \geq \nu.$$

Тогда заданное усечение не является строго невырожденным.

Доказательство. Согласно определению 2, каждый параметр t в формальном завершении $\tilde{P}$ является коэффициентом в некотором элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$ при x в некоторой степени k , $0 \leq k \leq d$.

Как указано в разделе 3, если $r_\nu(T)$ в (4) зависит от параметра t , то $r_\nu(T)$ имеет вид

$$r_\nu(T) = \alpha(T)t + \beta(T). \quad (6)$$

Очевидно, что $\alpha(T)$ — коэффициент в $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ при $x^{\nu-k}$.

Далее заметим, что если $k < d$, то следующие коэффициенты в (4) имеют вид

$$\begin{aligned} r_{\nu+1}(T) &= \alpha(T)s + \gamma(T), \\ \dots & \\ r_{\nu+d-k}(T) &= \alpha(T)q + \delta(T), \end{aligned} \quad (7)$$

где s — параметр при x^{k+1} в элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, и т.д. вплоть до q — параметр при x^d в элементе $\tilde{p}_{i_1, j_1}$. Валюация полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ равна $\nu - k$. Иначе в определитель (4) входил бы ненулевой член, равный произведению tx^k и младшего члена полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$, и

степень x в нем была бы меньше ν . Из этого следует, что $r_\nu(T)$ не зависит от параметров из $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, кроме t ; $r_{\nu+1}(T)$ не зависит от параметров коэффициентов в $\tilde{p}_{i_1, j_1}$ при степенях x , больших $k+1$, и т.д. вплоть до того, что $r_{\nu+d-k}(T)$ не зависит от параметров из $\tilde{p}_{i_1, j_1}$, кроме q .

Найдем значения параметров из $\alpha(T)$ из (6) такие, что $\alpha(T)$ не обращается в 0. Оставшиеся параметры из $\beta(T)$ положим равными 0, а t — равным $-\beta(T)/\alpha(T)$. При этих значениях $r_\nu(T)$ обращается в 0, т.е. $\text{val det } \tilde{P}$ увеличивается; валюация полинома $\tilde{p}_{i_1, j_1}^*$ становится равной $\nu - k$, поэтому значение $\text{val } \tilde{P}^*$ может возрасти не более, чем до $\nu - k$.

Далее можно последовательно обнулить $r_{\nu+1}(T), \dots, r_d(T)$, положив оставшиеся параметры в $\gamma(T), \dots, \delta(T)$ из (7) равными 0, $s = -\gamma(T)/\alpha(T), \dots, q = -\delta(T)/\alpha(T)$. Оставшиеся в T параметры полагаем равными 0. Возможно, что матрица P' , соответствующая выбранным значениям, окажется вырожденной ($\text{val det } P' = \infty$), тогда P' является контрпримером. Иначе, получим: $\text{val det } P' > \nu + d - k$, $\text{val } P'^* \leq \nu - k$. Тогда

$$d + \text{val } P'^* \leq d + \nu - k < \text{val det } P'$$

и, следовательно, для P' критерий строгой невырожденности не выполняется. Строим контрпример M согласно (3). $\square$

Из предложения 1 и доказательств предложений 2 и 3 следует справедливость следующей теоремы:

Теорема. *Существует алгоритм, который для любого усечения, не являющегося строго невырожденным, строит его продолжение в виде такой вырожденной матрицы, каждый элемент которой есть либо полином, либо сумма полинома и указываемой рациональной функции от x , разложенной в формальный степенной ряд.*

Доказательство. В качестве доказательства дадим описание алгоритма построения контрпримера для усеченной матрицы, заданной невырожденной полиномиальной матрицей P и числами d_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющими (2).

1. Построить формальное завершение $\tilde{P}$ и построить для него матрицу алгебраических дополнений $\tilde{P}^*$. Вычислить определитель формального завершения $\det \tilde{P}$. Найти $\nu = \text{val } \det \tilde{P}$ и $\mu = \text{val } \tilde{P}^*$.
2. Если $d + \mu < \nu$, построить контрпример следуя доказательству предложения 2, иначе — предложения 3.

□

5. Пример

Пусть задана полиномиальная матрица

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

и степени усечения $d_{11} = 1$, $d_{12} = 0$, $d_{21} = 2$, $d_{22} = 1$.

Тогда $d = \max d_{ij} = 2$.

Формальное завершение в этом случае имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} t_1 x^2 + x + 1 & t_3 x^2 + t_2 x + 1 \\ 1 & t_4 x^2 - x + 1 \end{pmatrix},$$

где t_1, t_2, t_3, t_4 — параметры. Определитель формального завершения $\det \tilde{P} = t_1 t_4 x^4 + (-t_1 + t_4)x^3 + (t_1 - t_3 + t_4 - 1)x^2 - t_2 x$ имеет валуацию равную $\nu = 1$ и зависит от параметра t_2 .

Матрица алгебраических дополнений к формальному завершению имеет вид

$$\tilde{P}^* = \begin{pmatrix} t_4 x^2 - x + 1 & -1 \\ -t_3 x^2 - t_2 x - 1 & t_1 x^2 + x + 1 \end{pmatrix},$$

ее валуация равна $\mu = 0$ и не зависит от параметров.

Поскольку в этом примере $d + \mu > \nu$ ($2 + 0 > 1$) и $r_1(t_2) = -t_2$, строим контрпример, следуя доказательству предложения 3.

Младший коэффициент $\det \tilde{P}$ обращается в 0 при $t_2 = 0$. Следующий коэффициент, при x^2 , обращаем в 0, положив $t_1 = 1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 0$. При таких значениях параметров $\text{val } \det \tilde{P} = 3$ и,

следовательно, $d + \text{val } \tilde{P}^* < \text{val } \det \tilde{P}$ ($2 + 0 < 3$). Оставшийся параметр t_4 полагаем равным 0. Получаем завершение для исходной усеченной матрицы

$$P' = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 & 1 \\ 1 & 1 - x \end{pmatrix}$$

и соответствующую ей матрицу алгебраических дополнений

$$\tilde{P}^* = \begin{pmatrix} -x + 1 & -1 \\ -1 & x^2 + x + 1 \end{pmatrix}.$$

Если в формуле (3) возьмем $i_0 = j_0 = 1$, то получим контрпример

$$M = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{1 - x} & 1 \\ 1 & 1 - x \end{pmatrix},$$

поскольку $\det P' = x^3$ и $\tilde{p}_{11}^* = -x + 1$. Неполиномиальный элемент в левом верхнем углу матрицы может быть представлен в виде формального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Литература

1. Абрамов С.А., Рябенко А.А. *Усеченные ряды в роли матричных элементов* // Фундаментальная и прикладная математика, 2025 (в печати).
2. Abramov S., Ryabenko A. *Matrices of infinite series: checking non-singularity based on truncations* // Computer algebra: 6th International Conference Materials. Moscow, 23–25 June, 2025. Moscow: RUDN University. P. 27–30.
3. Abramov S., Barkatou M. *On Strongly Non-Singular Polynomial Matrices* // In: Schneider C., Zima E. (eds) *Advances in Computer Algebra*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2018 (226): 1–17.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.

Сведения об авторах

Абрамов Сергей Александрович, д.ф-м.н., гл.н.с.

Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН,
проф. факультета вычислительной математики и кибернетики

МГУ им. М.В. Ломоносова

sergeyabramov@mail.ru

Рябенко Анна Андреевна, к.ф-м.н., ст.н.с.

Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН

anna.ryabenko@gmail.com