Формулы интегрирования функций Бесселя $J_{2k+1}(z), Y_{2k+1}(z)$, полученные с помощью системы компьютерной алгебры

С.А.Абрамов, А.А.Рябенко (Вычислительный центр РАН, Москва)
sabramov@ccas.ru, ryabenko@cs.msu.ru

Использование современной системы компьютерной алгебры при решении математических задач часто открывает возможность эксперимента — построения точных решений задачи для небольших значений параметров. Может повезти, и изучение этих решений приведет к догадке (гипотезе) о том, как выглядит решение в случае произвольных параметров. После этого система компьютерной алгебры может помочь проверить появившуюся гипотезу. Такова одна из компьютерных технологий, полезных для математических исследований.

Следуя этой схеме (технологии), с помощью системы Maple авторами была найдена и доказана еще одна формула для интеграла функции Бесселя $J_n(z)$ для нечетных натуральных n:

$$\int J_n(z)dx = -\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\prod_{j=1}^{k}(n^2-(2\,j-1)^2)}{z^{2\,k}} J_n'(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(1-2\,k)\prod_{j=1}^{k-1}(n^2-(2\,j-1)^2)}{z^{2\,k-1}} J_n(z) + C.$$

Эта формула отсутствует в известных авторам справочниках по специальным функциям.

Теми же компьютерно-алгебраическими средствами показано, что для четных натуральных n не существует представления какой-либо первообразной для $J_n(z)$ в виде линейной комбинации над $\mathbf{C}(z)$ функции $J_n(z)$ и ее производных.

Из всех сведений о функциях $J_n(z)$ при обосновании сделанных выше утверждений использовалось только то, что $z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(1-n^2)$ является для $J_n(z)$ минимальным аннулирующим линейным дифференциальным оператором над $\mathbf{C}(z)$. Отсюда следует, что аналогичные утверждения, включая формулу интегрирования, сохраняют силу и для $Y_n(z)$.