

Об одной компьютерно-алгебраической технологии*

С.А. Абрамов, А. А. Рябенко

ВЦ РАН,

Москва 119991, ГСП-1, Вавилова 40.

abramov@ccas.ru, ryabenko@cs.msu.ru

Аннотация

Современная система компьютерной алгебры предоставляет возможность экспериментальных точных вычислений (включая выкладки над формулами), позволяющих получить решение рассматриваемой задачи для ряда небольших исходных данных. Результаты могут стать основой для выдвижения какой-то гипотезы, касающейся общего решения задачи. Система компьютерной алгебры может далее помочь в проверке появившейся гипотезы.

1 Введение

В статье подробно прослеживается путь получения одного математического результата, сформулированного в разделе 7 в виде теоремы 1. В преодолении этого пути существенную роль играет использование системы компьютерной алгебры Maple ([1]).

Материал статьи, в частности, демонстрирует ряд возможностей систем компьютерной алгебры, полезных для теоретических исследований.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 07-01-00482-а.

2 Эксперименты, гипотезы, доказательства

Заслуживает внимания точка зрения, согласно которой математика — экспериментальная наука, и разница между ней и физикой “... только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей” ([2]).

Использование современной системы компьютерной алгебры при решении математических задач часто открывает возможность эксперимента: на основе имеющихся математических теорий с помощью такой системы оказывается возможным построение точных решений задачи для небольших исходных данных, например — небольших значений параметров. Может повести, и изучение этих решений приведет к догадке (гипотезе) о том, как выглядит решение в случае произвольных допустимых исходных данных. После этого система компьютерной алгебры может помочь проверить и, возможно, доказать появившуюся гипотезу. Такова одна из компьютерных технологий, полезных для математических исследований.

В дальнейших разделах статьи приводится пример применения этой технологии. Рассказывается, как с помощью системы Maple была найдена и доказана еще одна формула для интеграла функции Бесселя $J_n(z)$ для нечетных натуральных n . Теми же компьютерно-алгебраическими средствами показано, что для четных натуральных n аналогичной формулы не существует.

3 Предварительное наблюдение

Предварительное наблюдение: для функции Бесселя $J_1(z)$ имеет место соотношение

$$\int J_1(z) dz = -J_1'(z) - \frac{1}{z} J_1(z) + C. \quad (1)$$

Записав это соотношение как

$$\left(-J_1'(z) - \frac{1}{z} J_1(z)\right)' - J_1(z) = 0, \quad (2)$$

его можно доказать, исходя лишь из дифференциального уравнения для $J_1(z)$:

$$z^2 J_1''(z) + z J_1'(z) + (z^2 - 1) J_1(z) = 0. \quad (3)$$

В самом деле, раскрывая скобки в левой части (2) и домножая на $-z^2$, получаем левую часть равенства (3). Попытка получить подобную формулу для $\int J_2(z) dz$ к успеху не приводит, и, тем более, нет ясности с общим случаем: для каких натуральных n существует представление какой-либо первообразной для $J_n(z)$ в виде линейной комбинации над $\mathbb{C}(z)$ функции $J_n(z)$ и ее производных? (Напомним, что для $J_n(z)$ выполняется $z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0$.)

4 Интегрирование с помощью дифференцирования

В [3] рассмотрена следующая общая задача. Пусть

$$L = a_k(z) D^k + \dots + a_1(z) D + a_0(z) \in \mathbb{C}(z)[D]$$

($D = \frac{d}{dz}$, $a_0(z), a_1(z), \dots, a_k(z)$ — полиномы или рациональные функции). Существует ли оператор $R \in \mathbb{C}(z)[D]^1$ такой, что

$$\int y dz = R(y) + C$$

для любой функции $y(z)$, для которого L является минимальным аннулирующим оператором, принадлежащим кольцу $\mathbb{C}(z)[D]$? Если да, то надо построить такой оператор R , — мы назовем его *интегрирующим* оператором.

¹⁾ Если K — некоторое поле, t — какая-либо переменная, то $K(t)$ обозначает поле рациональных функций от t с коэффициентами из K ; аналогично, если A — некоторое кольцо (возможно, поле), то $A[t]$ обозначает кольцо полиномов от t с коэффициентами из A . В духе этих соглашений $\mathbb{C}(z)[D]$ есть кольцо линейных дифференциальных операторов с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от z с комплексными коэффициентами. Соответственно, $\mathbb{C}[z][D]$ или, то же самое, $\mathbb{C}[z, D]$, есть кольцо линейных дифференциальных операторов с коэффициентами, являющимися полиномами от z с комплексными коэффициентами.

В [3] доказано, что оператор R существует, если и только если уравнение

$$L^*(y) = 1$$

имеет рациональное, т.е. принадлежащее полю рациональных функций $\mathbb{C}(z)$, решение. Здесь L^* — оператор, сопряженный к L :

$$L^* = (-D)^k \circ a_k(z) + \dots + (-D) \circ a_1(z) + a_0(z).$$

Доказано также, что если $r(z)$ — рациональное решение уравнения $L^*(y) = 1$, то оператор $1 - r(z)L$ делится слева на D и дает (левое) частное R :

$$D \circ R = 1 - r(z)L. \quad (4)$$

Этот алгоритм назван в [3] алгоритмом аккуратного интегрирования. Его можно было бы также называть алгоритмом интегрирования с помощью дифференцирования.

Обозначим минимальный аннулирующий $J_1(z)$ оператор из $\mathbb{C}(z)[D]$ через L_1 . Мы имеем

$$L_1 = z^2 D^2 + zD + (z^2 - 1), \quad L_1^* = z^2 D^2 + 3zD + z^2.$$

Уравнение $L_1^*(y) = 1$ обладает единственным рациональным решением $\frac{1}{z^2}$, — в этом можно убедиться с помощью системы Maple, о чем будет сказано подробнее в разделе 5.

Далее

$$1 - \frac{1}{z^2} L_1 = -D^2 - \frac{1}{z} D + \frac{1}{z^2} = -D^2 - D \circ \frac{1}{z} = D \circ \left(-D - \frac{1}{z} \right),$$

откуда $R = -D - \frac{1}{z}$.

Равенство $\int f(z) dz = -f'(z) - \frac{1}{z} f(z) + C$ выполняется не только для $J_1(z)$, но и для любого другого решения $f(z)$ уравнения $L(y) = 0$, где $L = z^2 D^2 + zD + (z^2 - 1)$. В теории специальных функций наряду с $J_1(z)$ рассматривается функция Бесселя второго рода $Y_1(z)$, удовлетворяющая тому же самому уравнению. Интегрирование функции $Y_1(z)$ также может быть выполнено в соответствии с формулой

$$\int Y_1(z) dz = -Y_1'(z) - \frac{1}{z} Y_1(z) + C.$$

В дальнейшем мы не станем специально упоминать функции Бесселя второго рода $Y_n(z)$, но все, что будет установлено для функций $J_n(z)$, справедливо и для $Y_n(z)$.

В рассмотренном примере уравнение $L_1^*(y) = 1$ имело одно решение в $\mathbb{C}(z)$. В [3] показано, что в любом случае, когда L является минимальным аннулирующим оператором, уравнение $L^*(y) = 1$ либо не имеет рациональных решений, либо имеет одно такое решение, либо множество его рациональных решений имеет вид $\{r_0 + Ch \mid C \in \mathbb{C}\}$, где r_0 и h суть некоторые фиксированные рациональные функции. В последнем случае все первообразные могут быть получены обсуждаемым способом.

Для $J_2(z)$ построение интегрирующего оператора оказывается невозможным. В этом случае

$$L_2 = z^2 D^2 + zD + (z^2 - 4), \quad L_2^* = z^2 D^2 + 3zD + z^2 - 3,$$

и уравнение $L_2^*(y) = 1$ не имеет рациональных решений.

5 Эксперимент приводит к гипотезе

Функция Бесселя $J_n(z)$ первого рода удовлетворяет уравнению $L_n(y) = 0$, где $L_n = z^2 D^2 + zD + (z^2 - n^2)$, $n = 1, 2, \dots$. Мы уже знаем, что для $J_1(z)$ существует первообразная, являющаяся линейной комбинацией над $\mathbb{C}(z)$ функций $J_1'(z)$ и $J_1(z)$, а для $J_2(z)$ аналогичной первообразной не существует, и что это связано с тем, что уравнение $L_1^*(y) = 1$ имеет рациональное решение, а уравнение $L_2^*(y) = 1$ — нет.

Легко видеть, что

$$L_n^* = z^2 D^2 + 3zD + z^2 + 1 - n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вопрос можно поставить так: для каких n уравнение $L_n^*(y) = 1$ имеет рациональное решение?

Проведем эксперимент, — проверим несколько первых значений n с помощью системы компьютерной алгебры Maple.

```
> M := z^2*diff(y(z),z,z)+3*z*diff(y(z),z)+
> (z^2+1-n^2)*y(z)=1:
> DEtools[ratsols](eval(M,n = 1),y(z));
```

$$[[[]], \frac{1}{z^2}]$$

Процедура `ratsol` из пакета `DEtools` для данного неоднородного дифференциального уравнения выдает список из двух элементов. Первый элемент — список, содержащий базис рациональных решений соответствующего однородного уравнения, второй элемент — частное рациональное решение исходного неоднородного уравнения. Здесь мы видим, что при $n = 1$ однородное уравнение не имеет рациональных решений, но существует частное рациональное решение $\frac{1}{z^2}$ неоднородного уравнения. При $n = 2$ рациональных решений нет:

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 2), y(z));
```

```
[[[]]]
```

Эти ответы для случаев $n = 1, 2$ упоминались в разделе 4. Продолжим вычисления.

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 3), y(z));
```

```
[[[]], \frac{8 + z^2}{z^4}]
```

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 4), y(z));
```

```
[[[]]]
```

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 5), y(z));
```

```
[[[]], \frac{384 + 24z^2 + z^4}{z^6}]
```

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 6), y(z));
```

```
[[[]]]
```

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 7), y(z));
```

```
[[[]], \frac{46080 + 1920z^2 + 48z^4 + z^6}{z^8}]
```

```
> DEtools[ratsols](eval(M, n = 8), y(z));
```

```
[[[]]]
```

После рассмотрения восьми первых значений n гипотеза напрашивается сама собой — уравнение $L_n^*(y) = 1$ имеет рациональное решение при нечетном n и не имеет при четном n .

6 Доказательство гипотезы

К сожалению, система Maple не может непосредственно проверить, для каких именно n уравнение $L_n^*(y) = 1$ имеет рациональное решение. По форме уравнения $L_n^*(y) = 1$ легко заключить, что ни при каком n у него нет полиномиальных решений (если $p(z) \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$, $d = \deg p(z)$, то $L_n^*(p(z))$ есть полином степени $d+2$), а если существует решение в $\mathbb{C}(z) \setminus \mathbb{C}[z]$, то его знаменатель имеет вид z^m , $m \in \mathbb{N}$ (0 — единственная особая точка оператора L_n^*).

Построим разложение решения уравнения $L_n^*(y) = 1$ в ряд в точке $z = \infty$ (при этом n выступает как параметр):

```
> Ser:=Slode[FPseries](M,y(z),v(k),z=infinity);
```

$$FPSstruct\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{v(k)}{z^k}, v(k) + (k^2 + 9 - n^2 - 6k)v(k-2)\right)$$

Процедура `FPseries` из пакета `Slode` строит для дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами решение в виде формального степенного ряда в заданной точке²). Решение представляется в виде специальной структуры `FPSstruct`. Первый элемент структуры — решение в виде ряда, для которого вычислены значения нескольких начальных коэффициентов (здесь вычислены три первых коэффициента), остальные обозначены через $v(k)$. Второй элемент структуры — линейное рекуррентное соотношение, с помощью которого можно последовательно вычислить любое количество коэффициентов ряда. По умолчанию количество начальных вычисленных коэффициентов берется наименьшим из достаточных для беспрепятственного вычисления остальных коэффициентов с помощью рекуррентного соотношения (учитывается порядок соотношения и целые корни его старшего коэффициента). Можно вычислить еще несколько коэффициентов ряда, — например, все коэффициенты при z^{-k} , $k \leq 7$. Для этого зададим `FPseries` дополнительный параметр `terms = 7`:

²) В системе Maple до версии 11 включительно процедура `FPseries` строит решения только для однородных уравнений. Здесь используется расширенная версия пакета `Slode`, в которой возможна работа с неоднородными уравнениями с рациональными правыми частями.

```
> Ser:=Slode[FPseries](M,y(z),v(k),z=infinity,
> terms=7);
```

$$FPSstruct\left(\frac{1}{z^2} + \frac{-1+n^2}{z^4} + \frac{(-9+n^2)(-1+n^2)}{z^6} + \sum_{k=8}^{\infty} \frac{v(k)}{z^k},\right. \\ \left. v(k) + (k^2 + 9 - n^2 - 6k)v(k-2)\right)$$

Видно, что $v(k) = 0$ для нечетных k . Имеет смысл исключить нечетные значения k . Кроме того, для облегчения проверки нашей гипотезы, высказанной в разделе 5, используем разложение на множители младшего коэффициента рекуррентного соотношения:

```
> S:=indets(Ser,'Sum'(anything,anything))[]:
> S=Sum(eval(op(1,S),[v(k)=v(2*k),k=2*k]),
> k=4..infinity);
```

$$\sum_{k=8}^{\infty} \frac{v(k)}{z^k} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{v(2k)}{z^{2k}}$$

```
> Ser := eval(op(1,Ser),%),
> map(factor,eval(op(2,Ser),k=2*k));
```

$$Ser := \frac{1}{z^2} + \frac{-1+n^2}{z^4} + \frac{(-9+n^2)(-1+n^2)}{z^6} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{v(2k)}{z^{2k}}, \\ v(2k) - (n-3+2k)(n+3-2k)v(2k-2)$$

Найденное решение Ser может быть рациональной функцией со знаменателем вида z^m , $m \in \mathbb{N}$, если и только если младший коэффициент рекуррентного соотношения для $v(k)$ обращается в нуль при некотором целом $k_0 > 0$. Это значит, что если n — нечетное, то рациональное решение существует, и тогда $k_0 = \frac{n+3}{2}$. При четном n рациональных решений нет.

7 Основной результат

Для нечетного n имеем

- > $1/z^2 + (-1+n^2)/z^4 + (-9+n^2)*(-1+n^2)/z^6 +$
- > $\text{Sum}(v(2*k)/z^{(2*k)}, k=4..(n+1)/2),$
- > $v(2*k) - (n^2 - (2*k-3)^2)*v(2*k-2);$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{-1+n^2}{z^4} + \frac{(-9+n^2)(-1+n^2)}{z^6} + \sum_{k=4}^{\frac{n+1}{2}} \frac{v(2k)}{z^{2k}},$$

$$v(2k) - (n^2 - (-3+2k)^2)v(2k-2)$$

Это рациональное решение можно записать так

$$r_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (n^2 - (2j-1)^2)}{z^{2k}}.$$

Теперь из формулы (4) найдем интегрирующий оператор для $J_n(z)$ при нечетных n . Нетрудно показать, что если $r(z) \in \mathbb{C}(z)$, то

$$1 - rL_n = D \circ (-rz^2D - rz + r'z^2) + f, \quad (5)$$

$f \in \mathbb{C}(z)$. Если n нечетно, и в качестве r мы берем решение r_n уравнения $L_n^*(y) = 1$, то $f = 0$, иначе правая часть (5) не делилась бы слева на D .

Таким образом, при нечетных n

$$\int J_n(z) dz = -r_n(z)z^2 J_n'(z) + (r_n'(z)z^2 - r_n(z)z)J_n(z) + C.$$

Результат, полученный с помощью системы компьютерной алгебры, можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1 При нечетных натуральных n имеем

$$\int J_n(z) dz = - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\prod_{j=1}^k (n^2 - (2j-1)^2)}{z^{2k}} J_n'(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(1-2k) \prod_{j=1}^{k-1} (n^2 - (2j-1)^2)}{z^{2k-1}} J_n(z) + C.$$

При четных натуральных n не существует представления какой-либо первообразной для $J_n(z)$ в виде линейной комбинации над $\mathbb{C}(z)$ функции $J_n(z)$ и ее производных.

Не составляет большого труда переписать полученное доказательство этой теоремы, не прибегая при этом к описанию экспериментов и упоминанию системы Maple.

Формула, данная в этой теореме, отсутствует в известных справочниках по специальным функциям, в частности, в [4].

Сама система Maple использует для интегрирования $J_n(z)$ при нечетных натуральных n формулы, которые содержатся в [4]:

$$\int J_1(z)dz = -J_0(z) + C,$$

$$\int J_n(z)dz = -J_0(z) - 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} J_{2k}(z) + C, \quad n = 3, 5, \dots;$$

> int(BesselJ(1, z), z);

$$-BesselJ(0, z)$$

> int(BesselJ(3, z), z);

$$1 - BesselJ(0, z) - 2 BesselJ(2, z)$$

и т.д.

Литература

- [1] Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., McCarron J., DeMarco P. Maple 11 introductory programming guide // Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario, Canada, 2007.
- [2] Арнольд В.И. Что такое математика? // МЦНМО, 2002.
- [3] Abramov S.A., van Hoeij M. Integration of solutions of linear functional equations // Integral Transformations and Special Functions **8**. 1999. no. 1-2, P. 3–12.

- [4] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган // М.: Наука, 1979.