3. Гильберт Д., Основания геометрии. М-Л.: ОГИЗ. Гостехизлат, 1948.
4. Кириллов А. А., Что такое число. М: Физматлит-Наука, 1993.
5. Маклейн С., Категории для работающих математиков. М: Физматлит, 2004.
6. Марков А. А., Нагорный Н. М., Теория алгорифмов. М: Наука, 1984.
7. J. von Neumann, Mathematitions. Collected Works / New York, London, Oxford, Paris: Pergamon Press. 1961. V. 1. P. 1-9.

Абрамов С. А., Погудин Г. А.

О пространстве решений линейных разностных уравнений в кольце вычислимых бесконечных последовательностей

Аннотация

Исследуется разрешимость некоторых алгоритмических задач, связанных с размерностью пространства решений линейных разностных уравнений с коэффициентами в виде бесконечных вычислимых (т.е. заданных алгоритмически) последовательностей.

1. Существование ненулевых решений

Далее обозначение R привлекается для кольца двусторонних вычислимых последовательностей рациональных чисел с определенными поэлементно сложением и умножением. Термин «вычислимая последователность» означает здесь, что каждая из рассматриваемых последовательностей $v(n)$ представлена некоторым алгоритмом вычисления значения $v(n)$ по значению n.

Для линейных разностных уравнений вида

$$a_r(n)y(n+r) + \cdots + a_1(n)y(n+1) + a_0(n)y(n) = 0 \qquad (1)$$

с двусторонними бесконечными последовательностями $a_r(n), \ldots, a_0(n) \in R$ в роли коэффициентов мы рассматриваем векторные пространства над $\mathbb{Q}$ тех решений, которые имеют вид такого же рода последовательностей.

Далее под «уравнением» всегда понимается уравнение вида (1), под «решением» — принадлежащее R решение.

В настоящей заметке мы доказываем неразрешимость некоторых алгоритмических задач, касающихся линейных разностных уравнений с коэффициентами в R. Большинство доказательств основывается на следствии классического результата А.Тьюринга [5] о неразрешимости известной задачи остановки. Это следствие таково: пусть множество M содержит по меньшей мере два элемента, и для этого множества известен алгоритм проверки равенства любых двух заданных его элементов. Тогда невозможен алгоритм проверки, содержит ли произвольная данная односторонняя последовательность $c(0), c(1), \ldots,$ элементы которой принадлежат M, хотя бы один элемент, равный заданному $a \in M$; и то же самое — ответа на вопрос об отсутствии элементов, равных $a \in M$.

Бесконечные последовательности — объект, встречающийся во всех областях математики. В работе с этими последовательностями важную роль играет выбираемый способ их представления. В настоящей статье используется алгоритмический способ: последовательность задается алгоритмом (каждая последовательность — своим) вычисления значения элемента по индексу этого элемента. Рассматривая пространства имеющих вид двусторонних последовательностей решений, мы устанавливаем алгоритмическую неразрешимость задачи вычисления размерности этого пространства для заданного уравнения и задачи проверки, имеются ли вообще ненулевые решения у заданного уравнения (разд. 3). Далее устанавливается, что даже когда заранее известно, что ненулевые решения существуют, более того — мы знаем, что значение размерности этого пространства принадлежит известному числовому интервалу, который, содержит по меньшей мере два целых неотрицательных значеня, то и тогда размерность в общем случае не может быть найдена алгоритмически (разд. 4).

Настоящая статья продолжает тематическую линию публикаций [1–4], [6] о разностных уравнениях с бесконечными последовательностями в роли коэффициентов.

2. Сигнальные уравнения

Предложение 1. *Пусть*

$$v(0), v(1), \dots \tag{2}$$

— вычислимая последовательность. Тогда может быть предъявлено разностное уравнение первого порядка (его можно назвать сигнальным*), размерность пространства решений которого равна* 1*, если (2) не имеет ненулевых элементов, и равна* 0 *(т.е. уравнение не имеет ненулевых решений) в противном случае.*

Доказательство. Исходя из имеющейся вычислимой последовательности $v(n)$ определим вычислимую двустороннюю последовательность $w(n)$:

- если $n < 0$, то $w(n) = 1$;
- если $n \geq 0$ и при этом $v(k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$, то $w(n) = 1$;
- если $n \geq 0$ и при этом $v(k) = 1$ для некоторого $0 \leq k \leq n$, то $w(n) = 0$.

Таким образом, последовательность $w(n)$ состоит из одних единиц, если и только если последовательность $v(n)$ состоит из одних нулей. Если последовательность $v(n)$ содержит хотя бы одну единицу, то найдется n_0 такое, что $w(n) = 1$ при $n \leq n_0$ и $w(n) = 0$ при $n > n_0$. В первом случае уравнение $y(n+1) - w(-n)y(n) = 0$ имеет пространство решений размерности 1 (решениями будут все постоянные последовательности), во втором случае пространство решений имеет размерность 0 (уравнение не имеет ненулевых решений).

Алгоритм, который проверяет наличие ненулевых решений у данного уравнения, давал бы возможность проверять наличие ненулевых элементов в заданной вычислимой последовательности $v(0), v(1), \ldots$, что противоречит результату Тьюринга [5]. $\square$

В разд. 3 будет предложен еще один вид сигнального уравнения.

3. Размерность пространства решений

Следующее предложение является очевидным следствием предложения 1.

Предложение 2 *(i) Невозможен алгоритм, проверяющий наличие ненулевого решения для заданного уравнения.*

(ii) Невозможен алгоритм, вычисляющий размерность пространства решений заданного уравнения.

Определение 1. Пусть k — положительное целое. Бесконечную двустороннюю последовательность из нулей и единиц будем называть k-*секционной*, если общее число ее нулевых элементов равно $k-1$ и в этой последовательности нет двух подряд идущих нулевых элементов. Если последовательность $a(n)$ является k-секционной, то разностное уравнение первого порядка

$$a(n)y(n+1) - a(n+1)y(n) = 0 \tag{3}$$

назовем k-*секционным.*

Далее без специальных оговорок считается, что k — это некоторое неотрицательное целое.

Пусть $a(n)$ — k-секционная последовательность. Множество

$$N = \{n \in \mathbb{Z} \mid a(n) = 0\}$$

содержит $k-1$ элемент. На $\mathbb{Z} \setminus N$ введем отношение эквивалентности $\sim$: полагаем $n_1 \sim n_2$ если и только если между n_1 и n_2 нет элементов множества N. Класс эквивалентности по $\sim$ назовем *секцией.* Так как последовательность $a(n)$ является k-секционной, число секций равно k. Для этого случая несложно устанавливаются следующие свойства решений $y(n)$ уравнения (3):

1° если для некоторого n имеем $a(n) = 0$, то $y(n) = 0$;

2° внутри каждой секции решение $y(n)$ постоянно.

(Это означает, в частости, что последовательности, являющиеся решениями k-секционных уравнений, являются вычислимыми последовательностями.)

Отсюда получаем:

Предложение 3. *Размерность пространства решений произвольного k-секционного уравнения равна k.*

Это свойство k-секционных уравнений допускает применение в духе предложения 1.

Предложение 4. *Пусть $k \geq 2$ и $v(n)$ — вычислимая последовательность вида (2). Тогда может быть предъявлено k-секционное уравнение вида (3),пространство решений которого имеет размерность k, коль скоро последовательность $v(n)$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, и имеет размерность 1 в противном случае.*

Доказательство. Исходя из вычислимой последовательности $v(n)$ можно получить такую вычислимую k-секционную последовательность $a(n)$, что

- если $n < 0$, то $a(n) = 1$,
- если $n \geq 0$ и $v(0) = \cdots = v(n) = 0$, то $a(n) = 1$,
- если $n \geq 0$ и для некоторого $1 \leq m \leq n$ выполняется $v(0) = \cdots = v(m-1) = 0$, $v(m) \neq 0$, то $a(n) = 0$ для $n = m, m+2, \ldots, m+2(k-1)$ и $a(n) = 1$ в противном случае.

По предложению 2 пространство решений уравнения

$$a(n)y(n+1) - a(n+1)y(n) = 0 \tag{5}$$

имеет размерность k, если исходная последовательность $v(n)$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, и имеет размерность 1 в противном случае. □

4. Варианты задачи определения размерности

Предложение 5. *Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$. Невозможен алгоритм, который по заданному уравнению вида (1) устанавливает, верно ли, что размерность его пространства решений равна k.*

Это предложение является, очевидно, следствием предложения 1 (i) (случаи $k = 0, 1$) и предложения 3 (случай $k \geq 2$).

Можно поставить вопрос более узко с надеждой на его алгоритмическую разрешимость. Пусть заранее известно, что рассматриваемое уравнение имеет какие-то ненулевые решения. Более того, известен интервал, содержащий более одного элемента, которому принадлежит значение размерности. Возможно ли в этом случае определить размерность пространства решений?

Выясняется, что надежды на алгоритмическую разрешимость тщетны и в этом случае.

Предложение 6. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ и $l - k > 2$. Невозможен алгоритм, который по уравнению, о котором известно, что для размерности пространства его решений d выполнено $k < d < l$, вычисляет точное значение этой размерности.*

Доказательство. Пусть (2)— вычислимая последовательность. Зададим вычислимую двустороннюю последовательность $a(n)$ следующим образом:

- если n принадлежит множеству $S = \{-2, -4, \ldots, -2k\}$, то $a(n) = 0$,
- если $n < 0$ и $n \notin S$, то $a(n) = 1$.
- если $n \geq 0$ и

$$v(0) = \cdots = v(n-1) = 0,\ v(n) = 1 \qquad (6),$$

  то $a(n) = 0$,
- если $n \geq 0$ и условие (6) не выполнено, то $a(n) = 1$.

Размерность d пространства решений соответствующего уравнения (5) равна $k + 1$, если последовательность $v(n)$ не имеет ненулевых элементов и равна $k + 2$, если ненулевые решения имеются. В обоих случаях условие $k < d < l$ выполняется, так как $l - k > 2$. Если бы удалось алгоритмически определить значение d, то, тем самым, мы бы алгоритмически определили наличие ненулевых элементов в заданной вычислимой последовательности v, что вступило бы в противоречие с результатом Тьюринга [5]. $\square$

Литература

1. Abramov S., Pogudin G.. *Linear difference operators with sequence coefficients having infinite-dimentional solution spaces* // ACM Comm. in Computer Algebra, 2023, Vol. 57, No. 1: 1—4.
2. Abramov S., Barkatou M. A., Petkovsek M. *Linear difference operators with coeffcients in the form of infnite sequences* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, Vol. 61, No. 10: 1582–1589.
3. Ovchinnikov A., Pogudin G., Scanlon T. *Effective difference elimination and Nullstellensatz* // Journal of European Mathematical Society, 2020, Vol. 22, No. 8: 2419–2452.
4. Pogudin G., Scanlon T., Wibmer M. *Solving difference equations in sequences: Universality and Undecidability* // Forum of Mathematics, Sigma, 2020, Vol. 8, e33.
5. A. Turing. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* // Proceedings of the London Mathematical Society, 1936, Series 2, 42: 230–265.
6. Wibmer M. *On the dimension of systems of algebraic difference equations* // Advances in Applied Mathematics, 2021, Vol. 123: 102–136.