

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ СВОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

© 2024 г. С. А. Абрамов^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

Поступила в редакцию 03.03.2024 г.

Переработанный вариант 05.04.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Корни определяющего полинома, построенного для данного линейного обыкновенного дифференциального оператора, дают информацию об особенностях решений соответствующего однородного дифференциального уравнения. Обсуждаются операторы и уравнения, коэффициенты которых являются формальными лорановыми рядами. Такого же вида рассматриваются и решения. В этих предположениях описывается структура определяющего полинома произведения дифференциальных операторов. Это структурное (мультипликативное) свойство сохраняется и в случае сходящихся рядов. Библ. 8.

Ключевые слова: линейные обыкновенные однородные дифференциальные уравнения, определяющий полином, формальные лорановы ряды, индуцированные рекуррентные операторы.

DOI: 10.31857/S0044466924090067, EDN: WKRNAUK

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения, имеющие вид формальных лорановых рядов, могут строиться с помощью индуцированного рекуррентного оператора, предоставляющего соотношение для коэффициентов такого рода решений. Уточним, что *формальным лорановым рядом* над полем K называется выражение $s(x)$ (формальная сумма — вопросы сходимости для таких рядов не рассматриваются), имеющее вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)x^n, \quad (1)$$

где все $c(n)$, т.е. коэффициенты ряда принадлежат K , и, при этом, существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $c(n) = 0$ при $n < m$; для такого m ряд (1) можно переписать в виде $\sum_{n=m}^{\infty} c(n)x^n$, или в виде $c(m)x^m + c(m+1)x^{m+1} + \dots$. Подчеркнем, что и при наличии такого m ряд (1) мы считаем двусторонним, равно как и последовательность его коэффициентов, — в такой двусторонней последовательности все элементы, имеющие, в частности, отрицательные достаточно большие по абсолютной величине значения индекса равны нулю.

В некоторых публикациях по компьютерной алгебре употребляется термин “формальный мероморфный ряд”, мы в этой статье используем термин “формальный лоранов ряд”, как в большинстве публикаций.

Для формальных лорановых рядов определены основные арифметические операции и дифференцирование — подробности даются в п. 2.1.

В этом контексте рассмотрение рекуррентных операторов возникает в связи с тем, что если имеется дифференциальный оператор

$$L = a_r(x)D^r + \dots + a_1(x)D + a_0(x) \quad (2)$$

(здесь и далее D обозначает оператор дифференцирования ряда по x) и в роли коэффициентов оператора L выступают формальные лорановы ряды над некоторым полем K , то тогда этому L может быть сопоставлен *индуцированный* рекуррентный оператор

$$L^{(1)} = b_t \sigma^t + b_{t-1} \sigma^{t-1} + \dots \in K[n][[(\sigma^{-1})]], \quad (3)$$

в котором

- σ — оператор сдвига, т.е. $\sigma c(n) = c(n+1)$ для произвольной последовательности $\{c(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
- коэффициенты b_i суть полиномы от n над K , имеющие степень не выше, чем r — максимальной степени вхождения D в L ,
- оператор σ входит в $L^{(1)}$ с конечным числом целых неотрицательных показателей степени и, вообще говоря, с бесконечным числом целых отрицательных показателей. Подробности даются в п. 2.3.

Таким образом, $L^{(1)}$ представляется в виде формального лоранова ряда по σ^{-1} . При этом, если применение L к ряду (1) дает двусторонний ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}(n)x^n$, то двусторонняя последовательность коэффициентов $\{\tilde{c}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ получается применением $L^{(1)}$ к двусторонней последовательности $\{c(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. В частности, любому решению вида (1) уравнения $L(y) = 0$ соответствует решение $\{\tilde{c}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ уравнения $L^{(1)}(c) = 0$ и наоборот. Существенно, что решением уравнения $L(y) = 0$ служит формальный ряд, в то время как решением уравнения $L^{(1)}(c) = 0$ — последовательность коэффициентов.

Оператор $L^{(1)}$ может использоваться в вычислении коэффициентов решения-ряда. Разумеется, сам индуцированный оператор $L^{(1)}$ требует построения. Но, если он уже построен (с учетом того, что для предполагаемых вычислений может требоваться лишь некоторый “фрагмент” оператора $L^{(1)}$, а не весь этот оператор, — в вычислениях оказывается нужным лишь конечное число членов оператора $L^{(1)}$, имеющих отрицательные показатели степени при σ), то, как будет установлено ниже, определяющий полином (см. п. 2.2) и некоторые другие вспомогательные объекты оказываются тоже построенными, коль скоро упомянутый “фрагмент” был достаточно представительным — они, эти вспомогательные объекты, без особых затрат извлекаются из $L^{(1)}$. Еще до прямого вычислительного использования рекуррентного оператора сам его вид позволяет находить некоторые характеристики решений-рядов, что дополнительно открывает возможность доказательства некоторых свойств коэффициентов решений, а также различных величин и объектов, сопоставляемых как самому дифференциальному уравнению, так и его решениям. Так, в п. 3.2 доказываются некоторые мультипликативные свойства определяющих полиномов (теоремы 1, 2).

Нелишним будет подчеркнуть, что в статье не предлагается новых методов решения дифференциальных уравнений. Цель статьи иная — доказать наличие полезных нетривиальных свойств для такого важного инструмента исследования и решения дифференциальных уравнений, как определяющий полином и, соответственно, определяющее уравнение.

В статье используются стандартные обозначения $K[x]$ для кольца полиномов и $K((x))$ для поля или кольца формальных лорановых рядов от x над заданным полем (или кольцом) K , т.е. полиномов и рядов с коэффициентами, принадлежащими полю или кольцу K .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Формальные лорановы ряды

Для краткости там, где это не вызывает недоразумений, мы будем вместо “формальный лоранов ряд” писать “лоранов ряд” или просто “ряд”. Ряд, все коэффициенты которого равны нулю, обозначается символом 0. Выделяют также ряд, все коэффициенты $c(n)$ которого, кроме $c(0)$, равны нулю, при этом $c(0) = 1$; он обозначается символом 1. Ряд $-s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-c(n))x^n$ является противоположным ряду $s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)x^n$. Ряд $\tilde{s}(x)$ является обратным ряду $s(x)$, если $s(x)\tilde{s}(x) = 1$; для любого ненулевого ряда $s(x)$ существует обратный $s^{-1}(x)$.

Если $s(x) \neq 0$, то, как уже было сказано в разд. 1, существует наименьшее $m \in \mathbb{Z}$ такое, что коэффициент $c(m)$ ряда $s(x)$ отличен от нуля. Это m будем обозначать через $\text{val } s(x)$ и называть *валуацией* ряда $s(x)$ (в [2, гл. 15], используется термин “младшая степень”). Коэффициент $c(m)$ называется *младшим коэффициентом* ряда $s(x)$ и обозначается через $\text{tc } s(x)$. По определению считаем, что $\text{val } (0) = \infty$, $\text{tc}(0) = 0$. Легко проверяется, что $\text{val } s(x)t(x) = \text{val } s(x) + \text{val } t(x)$, $\text{tc } s(x)t(x) = \text{tc } s(x) \cdot \text{tc } t(x)$ и $\text{val } (s(x) + t(x)) \geq \min\{\text{val } s(x), \text{val } t(x)\}$ для любых $s(x), t(x) \in K((x))$. Добавим, что $\text{val } s^{-1}(x) = -\text{val } s(x)$, $\text{tc } s^{-1}(x) = (\text{tc } s(x))^{-1}$ для любого $s(x) \in K((x)) \setminus \{0\}$.

При определенных таким образом операциях формальные лорановы ряды над полем K сами образуют поле $K((x))$. Это и другие свойства таких рядов см. в [2, гл. 15], [3, гл. 1, §1], [4, гл. 1].

Производная ряда $s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)x^n$ определяется как $Ds(x) = s'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n)x^n$, где $d(n) = (n+1)c(n+1)$ для всех n , из чего следует, что коэффициент $d(-1)$ производной всегда равен нулю.

Каждый из рассматриваемых рядов имеет конечную валуацию, это позволяет применять к ряду дифференциальный оператор. Такое применение дает нулевой ряд, если и только если применение индуцированного оператора к последовательности коэффициентов данного ряда дает нулевую последовательность.

Далее мы используем обозначение $O(x^m)$, где $m \in \mathbb{Z}$, для не указываемого явно формального ряда, валюация которого больше или равна m .

2.2. Валюационный блок, приращение, определяющий полином

Определяющий полином, сопоставляемый уравнению $L(y) = 0$, где L имеет вид (2), содержит среди своих корней все валюации лорановых решений исходного уравнения. Такой полином может иметь и “лишние” корни. Известны алгоритмы проверки существования решения с заданной валюацией v и построения таких решений в случае существования. Лишние корни могут быть отбракованы этими алгоритмами.

Определение 1. Валюационным блоком оператора L будем называть любое множество целых чисел, содержащее валюации всех ненулевых формальных лорановых решений оператора L . (Не исключается, что валюационный блок содержит и какие-то целые числа, не являющиеся валюациями рассматриваемых решений.)

Определяющий полином для данного L может строиться по-разному. Обычно в таком построении участвует целое число, которое ниже будет именоваться приращением:

Определение 2. С оператором (2) свяжем *приращение*

$$\omega_L = \min_{0 \leq j \leq r} (\text{val } a_j - j). \quad (4)$$

Приравнивая нулю младший коэффициент в выражении для ряда $L(s(x))$, получаем алгебраическое определяющее уравнение $I_L(n) = 0$ (см. [1, §8]), левая часть которого дает определяющий полином:

$$I_L(n) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = \omega_L}} \text{tc}(a_j) n^j, \quad (5)$$

$$n^j = n(n-1) \dots (n-j+1).$$

Имеем $\text{val } L(s) \geq \omega_L + \text{val } s(x)$. Непосредственно проверяется, что если $\text{val } s(x) = n$, то

$$L(s(x)) = (\text{tc } s(x)) I_L(n) x^{n+\omega_L} + O(x^{n+\omega_L+1}),$$

т.е. ряд $L(s(x))$ имеет при $x^{n+\omega_L}$ коэффициент $\text{tc } s(x) I_L(n)$. Таким образом, для ненулевого $s(x)$ равенство $I_L(n) = 0$ является необходимым условием равенства $L(s(x)) = 0$.

Сказанное иллюстрируется проостым примером.

Пример 1. Пусть $L = D$. В соответствии с (4) имеем

$$\omega_L = -1, \quad I_L(n) = n. \quad (6)$$

Таким образом, $L(s(x)) = 0$ влечет $I_L(\text{val } s(x)) = 0$, т.е. $\text{val } s(x) = 0$. Тот вывод, который здесь может быть сделан непосредственно из ранее сказанного таков: если уравнение $D(y) = 0$ имеет ненулевое решение $s(x) \in K((x))$, то $s(x) = C + O(x)$, где C является ненулевой константой; решение $s(x) \in K((x))$ не может содержать x в отрицательной степени. Ни на что большее, в частности, на то, что $O(x)$ для $s(x)$ есть просто 0, равенства (6) не указывают.

2.3. Индуцированные рекуррентные операторы

Пусть K — поле характеристики 0, например, какое-то числовое поле, и σ — оператор сдвига по n : $\sigma(n) = n + 1$.

Предложение 1 (см. [5], [6]). (i) *Соответствие*

$$x \rightarrow \sigma^{-1}, \quad x^{-1} \rightarrow \sigma, \quad D \rightarrow (n+1)\sigma \quad (7)$$

задает изоморфизм $\mathcal{F}_D^\sigma$ кольца $K((x))[D]$ на кольцо $K[n][(\sigma^{-1})]$. Обратный изоморфизм задается так:

$$n \rightarrow xD, \quad \sigma \rightarrow x^{-1}, \quad \sigma^{-1} \rightarrow x. \quad (8)$$

(ii) Пусть $L \in K((x))[D]$, $R = \mathcal{F}_D^\sigma(L)$. Пусть $s(x) = \sum_n c(n)x^n$, $\bar{s}(x) = \sum_n \bar{c}(n)x^n$, $s(x), \bar{s}(x) \in K((x))$ так, что $L(s(x)) = \bar{s}(x)$. Тогда $R(c) = \bar{c}$, где $c, \bar{c}$ являются последовательностями коэффициентов рядов $s(x), \bar{s}(x)$.

Пример 2. Пусть $L = xD - (x - 1)$, тогда

$$L^{\textcircled{1}} = \sigma^{-1}(n+1)\sigma - (\sigma^{-1} - 1) = n+1 - \sigma^{-1}.$$

Пусть $y(x) = s(x)$, где $s(x)$ — ряд (1). Тогда $L(y) = 0$, если и только если $L^{\textcircled{1}}(c) = 0$, т.е. выполнение равенства $(n+1)c(n) - c(n-1) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, необходимо и достаточно для того, чтобы ряд (1) удовлетворял уравнению $L(y) = 0$. Нетрудно видеть, что $c(n) = 0$ при $n \leq -2$, а $c(-1)$ может быть выбрано произвольно, и $c(n) = \frac{c(-1)}{(n+1)!}$ при $n \geq -1$.

3. РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕШЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ПОЛИНОМ

3.1. Определяющий полином и приращение в индуцированном операторе

Предложение 2. Пусть $L^{\textcircled{1}}$ имеет вид (3). Тогда

- (i) $\omega_L = -t$,
- (ii) $I_L(n) = b_t(n-t) = b_t(n + \omega_L)$.

Доказательство. Обозначим через j_0 наибольшее целое такое, что $0 \leq j_0 \leq r$ и соответствующее ему значение $j_0 - \text{val } a_{j_0}$ максимально. Максимальная степень, в которой σ появляется в $L^{\textcircled{1}}$, есть $t = j_0 - \text{val } a_{j_0}$. Старшим по степени σ слагаемым в $L^{\textcircled{1}}$ служит

$$\begin{aligned} b_t(n)\sigma^t &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = -t}} \text{tc}(a_j) \sigma^{-\text{val } a_j} \underbrace{(n+1)\sigma \cdots (n+1)\sigma}_j = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = -t}} \text{tc}(a_j) \sigma^{-\text{val } a_j} (n+1) \cdots (n+j) \sigma^j = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = -t}} \text{tc}(a_j) \sigma^{j - \text{val } a_j} (n-j+1) \cdots n = \\ &= \sigma^t \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = -t}} \text{tc}(a_j) n^{\underline{j}} \right). \end{aligned}$$

Коэффициент при σ^t будет полиномом

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq r \\ \text{val } a_j - j = \text{val } a_{j_0} - j_0}} \text{tc}(a_j) (n+t)^{\underline{j}} \quad (9)$$

от n . Этот полином имеет степень j_0 и, как следствие, является ненулевым. Очевидно, что максимальность $j - \text{val } a_j$ для $0 \leq j \leq r$ влечет минимальность $\text{val } a_j - j$, что соответствует определению (4) значения ω_L . Имеем (i).

Сравнение выписанного коэффициента (9) с (4) показывает, что справедливо (ii).

Пример 3. Вновь рассмотрим случай $L = D$. Имеем (6). Здесь $t = 1$, $b_t = n+1$. Равенства (i), (ii), очевидно, выполняются.

Из предложения 2 (ii) следует, что если определяющий полином имеет целые корни, то исходное уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде ряда $s(x)$, валюация которого равна наибольшему из целых корней полинома $I(n)$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 3. Если определяющий полином (5) обладает целыми корнями, то множество решений исходного дифференциального уравнения, имеющих вид ненулевых формальных рядов, не пусто.

3.2. Мультипликативность определяющего полинома

Сформулируем и докажем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть L_1, L_2 — дифференциальные операторы вида (2). Тогда

- (i) $\omega_{L_1 L_2} = \omega_{L_1} + \omega_{L_2}$;
- (ii) $I_{L_1 L_2} = I_{L_1}(n + \omega_{L_2})I_{L_2}(n)$.

Доказательство. Согласно предложению 1(i) мы имеем

$$(L_1 L_2)^{\textcircled{1}} = L_1^{\textcircled{1}} L_2^{\textcircled{1}}.$$

Раскрываем произведение из правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned} & (\sigma^{-\omega_{L_1}} I_{L_1}(n) + b_{t_1-1} \sigma^{-\omega_{L_1}-1} + \dots)(\sigma^{-\omega_{L_2}} I_{L_2}(n) + b_{t_2-1} \sigma^{\omega_{L_2}-1} + \dots) = \\ & = \sigma^{-\omega_{L_1} - \omega_{L_2}} I_{L_1}(n + \omega_{L_2}) I_{L_2}(n) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаются (i), (ii).

Из приведенного доказательства теоремы 1 следует, что определяющий полином обладает мультипликативным свойством, указанным в п. (ii) этой теоремы.

Пример 4. Вернемся к примеру 1 и рассмотрим оператор $L^k = \underbrace{D \cdots D}_k$. По теореме 1 имеем

$$\omega_{L^k} = -k, \quad I_{L^k}(n) = n^k. \quad (10)$$

Теорема 1 (ii) допускает

Следствие. Пусть $L_1, L_2 \in k((x))[D]$ и $L = L_1 L_2$. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}\}, \{\beta_1, \dots, \beta_{N_2}\}$ суть множества корней определяющих полиномов I_{L_1}, I_{L_2} в некотором расширении $\tilde{K}$ поля K . Тогда множество корней полинома I_L в $\tilde{K}$ есть

$$\{\alpha_1 - \omega_{L_2}, \dots, \alpha_{N_1} - \omega_{L_2}, \beta_1, \dots, \beta_{N_2}\}.$$

3.3. Валюационные блоки

Теорема 2. Пусть L_1, L_2 — операторы, V_1, V_2 — валюационные блоки (см. определение 1) этих операторов. Пусть $L = L_1 L_2$ и пусть $\tilde{V}_1$ получено из V_1 вычитанием ω_{L_2} из каждого его элемента. Тогда $V = \tilde{V}_1 \cup V_2$ является валюационным блоком оператора L .

Доказательство. Валюации формальных лорановых решений операторов L_1, L_2 являются корнями полиномов I_{L_1}, I_{L_2} . Валюации всех решений оператора L являются корнями I_L . По теореме 1 (ii) валюации всех таких решений содержатся в V .

3.4. Заключительные пример и замечание

Пример 5. Для

$$L = (x^2 + O(x^3))D^3 - 1, \quad (11)$$

в соответствии с (4), (5) имеем:

$$\omega_L = -1, \quad I_L(n) = n^3 = n(n-1)(n-2). \quad (12)$$

Пользуясь теоремой 1, можно определить $\omega_{L^2}, I_{L^2}(n)$, не прибегая к явному виду оператора L^2 :

$$\omega_{L^2} = (-1) + (-1) = -2, \quad (13)$$

$$I_{L^2}(n) = ((n-1)(n-2)(n-3))n(n-1)(n-2) = n(n-1)^2(n-2)^2(n-3). \quad (14)$$

С помощью системы Maple (см. [7]) А.А. Рябенко нашла выражение для L^2 :

$$(x^4 + O(x^5))D^6 + (6x^3 + O(x^4))D^5 + (6x^2 + O(x^3))D^4 + O(x^2)D^3 + 1, \quad (15)$$

из которого можно также получить (13), (14) — слагаемые вида $O(\dots)$ в (15) не оказывают влияния на приращение и определяющий полином, сопоставляемые оператору L^2 .

Можно проверить правильность (12), рассматривая некоторый конкретный вариант $O(x^3)$, т.е. вариант “хвоста” ряда, входящего в (11).

Например, заменим $O(x^3)$ нулевым рядом. Таким образом, пусть $L = x^2 D^3 - 1$. Для оператора

$$L^2 = x^4 D^6 + 6x^3 D^5 + 6x^2 D^4 - 2x^2 D^3 + 1$$

получаем, исходя из (4) и (5):

$$\omega_{L^2} = -2,$$

и

$$I_{L^2}(n) = n^6 + 6n^5 + 6n^4 = n(n-1)^2(n-2)^2(n-3).$$

То же самое получается и по теореме 1 (см. (13), (14)).

Замечание 1. Доказанное мультипликативное свойство определяющих полиномов (теорема 1) сохраняется при переходе от формальных рядов к сходящимся в силу того, что правила сложения, умножения и дифференцирования одинаковы для обоих видов рядов.

Автор выражает признательность А.А.Рябенко за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
3. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Henrici P. Applied and computational complex analysis. Vol. 1. John Wiley & Sons, 1974.
5. Abramov S. EG—eliminations // J. of Difference Equations and Applications. 1999. V. 5. P. 393—433.
6. Abramov S., Petkovsek M., Ryabenko A. Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Math. 2000. V. 210. P. 3—25.
7. Maple online help: <http://www.maplesoft.com/support/help/>

ON THE MULTIPLICATIVE PROPERTY OF DEFINING POLYNOMIALS

S. A. Abramov*

119333 Moscow. Vavilova str, 44, Dorodnitsyn Computing Center,
Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

Received: 03.03.2024

Revised: 05.04.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. The roots of the indicial polynomial constructed for a given linear ordinary differential operator provide information about the features of solutions of the corresponding homogeneous differential equation. Operators and equations whose coefficients are formal Laurent series are discussed. Solutions of the same kind are considered. These assumptions describe the structure of the indicial polynomial of the product of differential operators. This structural (multiplicative) property is preserved in the case of converging series.

Keywords: linear ordinary homogeneous differential equations, defining polynomial, formal Laurent series, induced recurrent operators.