Усеченные ряды и формальные экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1)]

©2020 г. С.А.Абрамов[1,*], А.А.Рябенко[1,], Д.Е.Хмельнов[1,***]**
[1]***119333 Москва, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия***
[*]***e-mail: sergeyabramov@mail.ru***
[**]***e-mail: anna.ryabenko@gmail.com***
[***]***e-mail: dennis_khmelnov@mail.ru***
Поступила в редакцию
Переработанный вариант
Принята к публикации

Подход, использованный нами ранее для построения лорановых и регулярных решений, позволяет, в сочетании с известным алгоритмом многоугольников Ньютона, находить формальные экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, имеющими вид усеченных степенных рядов. (Таким образом, относительно исходного уравнения доступна лишь неполная информация.) Входящие в решения ряды также представляются в усеченном виде. Для этих рядов предлагаемый комбинированный подход позволяет получить максимально возможное число членов. Библ. 12.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, усеченные степенные ряды, формальные экспоненциально-логарифмические решения, многоугольники Ньютона.

1. Введение

Эта статья является продолжением статей авторов [1], [2]. Здесь вновь рассматриваются вопросы, связанные с построением решений линейных дифференциальных уравнений, заданных "приближенно": коэффициенты уравнений представлены степенными рядами, для которых известны лишь начальные члены. Каждый коэффициент задан в виде $a(x) + O(x^t)$, где $a(x)$ — полином, $t > \deg a(x)$. И вновь нас интересуют информация о решениях (на этот раз — о формальных экспоненциально-логарифмических решениях, определение дается в разд. 2.2), не зависящая от неизвестных "хвостов" коэффициентов, т.е. информация, инвариантная относительно всех возможных продолжений имеющихся начальных отрезов рядов.

Таким образом, исходное уравнение задано не полностью. Как следствие, решение тоже получается представленным в неполном виде, но при этом имеющаяся исходная информация используется на сколько это, в принципе, возможно. А именно, мы добиваемся того, чтобы в тех рядах, которые будут входить в решения, было определено наибольшее возможное число членов.

Использованный в [1], [2] подход основан на вовлечении в построение решений символьных коэффициентов. Имеются в виду символы, привлекаемые для изображения незаданных коэффициентов, скрытых за символами O-большое. Эти добавляемые символьные коэффициенты мы называем *литералами*, их можно также называть *литеральными коэффициентами*. Если сказать совсем коротко, наш метод литеральных коэффициентов состоит в поочередном вычислении коэффициентов рядов, входящих в решения, и эти вычисления используют известные из уравнения величины и продолжаются, пока значения

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00032).

литералов не оказывают влияния на те величины, которые появляются в решениях. Этот подход в настоящей статье применяется в комбинации с известным методом многоугольников Ньютона [3]–[6].

Метод многоугольников Ньютона в нашей статье находит применение в поиске экспоненциальных частей, а метод литеральных коэффициентов — в поиске регулярных частей интересующих нас решений, необходимые определения даются в разд. 2.2.

Как уже говорилось в [2], А.Д.Брюно в [7] предложил основанный на многоугольниках Ньютона метод, который для рядов, входящих в решения, позволяет найти любое число членов. Этот подход получил дальнейшее развитие в [8]. Уравнения, в общем случае, — нелинейные, заданные полностью с помощью явно указанных аналитических функций одной или нескольких переменных. Очевидно, это несколько иная задача.

Цель нашего подхода — получение максимально возможного числа членов рядов, входящих в решения уравнения, заданного, фактически, не полностью: ряды-коэффициенты уравнения известны лишь в усеченном виде. Эта максимальность обосновывается в нашей статье предложениями 1, 2 и 3.

В разд. 6 описана наша реализация предложенного в разд. 5 алгоритма. Даются примеры ее использования. Средством реализации нами выбран Maple 2019 [9].

2. Предварительные сведения

2.1. *Начальные понятия*

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

- $K[x]$ — кольцо полиномов от x над K,
- $K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов от x над K,
- $K((x))$ — поле формальных лорановых рядов от x над K, являющееся полем частных кольца $K[[x]]$.

Степень $\deg a(x)$ полинома $a(x)$ определяется как обычно, при этом $\deg 0 = -\infty$. Для элементов кольца $K[[x]]$ и поля $K((x))$ вводится понятие валюации: для $a(x) = \sum a_i x^i$ полагаем

$$\operatorname{val} a(x) = \min\{i \mid a_i \neq 0\},$$

при этом $\operatorname{val} 0 = \infty$.

В $K[x], K[[x]], K((x))$ определено дифференцирование $D = \frac{d}{dx}$. Мы будем рассматривать операторы и дифференциальные уравнения, записанные с помощью операции $\theta = x\frac{d}{dx}$. В исходном операторе

$$L = \sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^i \in K[x][\theta] \tag{1}$$

полиномиальный коэффициент $a_i(x)$ ниже будет предполагаться имеющим вид

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j,$$

где t_i — неотрицательное целое, большее или равное $\deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$ (если $t_i > d_i = \deg a_i(x)$, то $a_{ij} = 0$ для $j = d_i + 1, d_i + 2, \ldots, t_i$). Использованные в (1) степени оператора θ понимаются как композиции: $\theta^{\,i} y = \theta(\theta(\ldots\theta(y)\ldots))$, левых и правых скобок — по i штук.

Далее *усеченному дифференциальному уравнению*

$$\big(a_r(x) + O(x^{t_r+1})\big)\,\theta^{\,r} y(x) \;+\cdots+ \big(a_1(x) + O(x^{t_1+1})\big)\,\theta y(x) \;+ \\ + \big(a_0(x) + O(x^{t_0+1})\big)\, y(x) = 0, \quad (2)$$

$t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$, мы сопоставляем оператор (1), а также набор чисел $t_0, t_1, \ldots, t_r$. Для обозначения оператора с коэффициентами-рядами

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^{\,i} \in K[[x]][\theta],$$

где

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^j \in K[[x]],$$

мы используем букву $\mathcal{L}$. Для оператора с полиномиальными коэффициентами используем букву L.

Определение 1. *Продолжением* уравнения (2) будем называть любое уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ с оператором

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{r} \tilde{a}_i(x)\theta^{\,i} \in K[[x]][\theta],$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е. $\operatorname{val}(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)) > t_i$, $i = 0, 1, \ldots, r$.

Если L (или $\mathcal{L}$) — некоторый дифференциальный оператор, то под *решениями оператора* L (или $\mathcal{L}$) мы понимаем решения уравнения $L(y) = 0$ (соответственно $\mathcal{L}(y) = 0$).

2.2. *Формальные экспоненциально-логарифмические решения*

Обозначение $\mathbb{Z}_{>0}$ используется далее для множества положительных целых чисел.

Определение 2. Формальными *экспоненциально-логарифмическими* решениями дифференциального уравнения называются решения вида

$$\exp\{Q(x)\}\, x^{\lambda} w(x), \quad (3)$$

где $Q(x) \in K[x^{-1/q}]$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \in K$ и $w(x) \in K((x^{1/q}))[\ln(x^{1/q})]$, а также конечные суммы решений вида (3).

Будем называть $\exp\{Q(x)\}$ *экспоненциальной частью* формального решения (3), соответственно $Q(x)$ называем *показателем экспоненциальной части*, $x^{\lambda}w(x)$ — *регулярной частью* формального решения (3). В [3], [4] обсуждался алгоритм построения r линейно независимых формальных экспоненциально-логарифмических решений вида (3) для $\mathcal{L}(y) = 0$.

Во введении мы в общих чертах уже обрисовали подход, основанный на привлечении литеральных коэффициентов или, как мы условились их короче называть — литералов. Было сказано, что в настоящей статье мы используем этот подход в сочетании с методом многоугольников Ньютона. Целесообразно поэтому сообщить некоторые общие сведения об этом методе. В этом разделе мы полагаем, что уравнение задано полностью, т.е. в нашем контексте — что ряды, представляющие коэффициенты уравнения, известны нам целиком. Приведем определение многоугольника Ньютона из [3], [4]: мы в дальнейшем основываемся именно на этом определении многоугольника Ньютона. (В [7, 8] используется несколько иное определение.)

Определение 3. Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2$ для $\mathcal{L}(y)=0$ отмечены точки (i, n_i), где $n_i = \operatorname{val} a_i(x)$, $i=0,1,\ldots,r$ и определено множество $\mathcal{Q}_i^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\le i, y\ge n_i\}$. Пусть M^+ — объединение всех $\mathcal{Q}_i^+$ для $i=0,1,\ldots,r$. *Многоугольником Ньютона* для $\mathcal{L}(y)=0$ называется выпуклая оболочка множества M^+. Будем обозначать этот многоугольник через $\mathcal{N}(\mathcal{L})$.

Пусть $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ имеет s вершин: (i_j, η_j), $j=1,\ldots,s$, где $i_{j-1}<i_j$ для $j>1$, $i_0=0$. Сторону с вершинами $(i_{j-1},\, \eta_{j-1})$ и $(i_j,\, \eta_j)$ обозначим посредством S_j и сопоставим ей ее *наклон* $k_j = (\eta_j-\eta_{j-1})/(i_j-i_{j-1})$. Приведем краткое описание алгоритма из [3], [4] построения формальных экспоненциально-логарифмических решений для $\mathcal{L}(y)=0$.

Если $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ имеет сторону с наклоном 0, то сторона S_1 имеет вершины $(0,\eta_1)$ и (i_1,η_1), где $i_1>0$. Тогда исходное уравнение имеет i_1 таких решений вида (3), в которых $q=1$ и $Q=0$. Такие решения называются *регулярными*. Классические алгоритмы построения регулярных решений можно найти, например, в [10], [11, гл. II, VIII], [12, гл. IV]. Также такие алгоритмы предлагались в [7].

Если некоторая сторона S_j имеет наклон $k>0$, то (см., например, [4, Ch.3]) исходное уравнение имеет i_j-i_{j-1} различных формальных решений с показателем экспоненциальной части

$$Q(x) = -\frac{\varepsilon}{kx^k}+\cdots,$$

где $\varepsilon\in K\setminus\{0\}$; многоточие заменяет здесь конечное число слагаемых, содержащих меньшие, чем k, рациональные степени x^{-1}. Число ε является корнем *характеристического уравнения*, связанного со стороной S_j:

$$\sum_{\substack{i=i_{j-1}\\ (i,n_i)\in S_j}}^{i_j} a_{i,n_i}\varepsilon^{i-i_{j-1}} = 0, \tag{4}$$

где запись “ $(i,n_i)\in S_j$ ” означает, что точка (i,n_i) принадлежит стороне S_j. Будем называть $-\varepsilon/(kx^k)$ *ведущим слагаемым* $Q(x)$.

Пусть с помощью $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ определены ведущие слагаемые в показателях экспоненциальных частей всех формальных решений, т.е. определены $-\varepsilon_{j,l}/(k_jx^{k_j})$, $l=1,\ldots,i_j-i_{j-1}$, $j=1,\ldots,s$. Для каждого ненулевого наклона $k_j=p_j/q_j$ (н.о.д. $(p_j,q_j)=1$, т.е. p_j и q_j взаимно просты) и каждого корня $\varepsilon_{j,l}$ характеристического уравнения (4) в исходном уравнении выполняется подстановка

$$y(x) = \exp\left\{-\frac{\varepsilon_{j,l}}{k_jt^{p_j}}\right\} z(t),\ \ x=t^{q_j}, \tag{5}$$

где $z(t)$ — новая неизвестная, t — новая независимая переменная. После сокращения на $\exp\{-\varepsilon_{j,l}/(k_jt^{p_j})\}$, получаем уравнение $\mathcal{L}_1(z)=0$ порядка r с коэффициентами из $K((t))$. Обозначим через $\operatorname{val}\mathcal{L}_1$ минимальное значение валюаций всех коэффициентов $\mathcal{L}_1$. Если $\operatorname{val}\mathcal{L}_1<0$, умножаем коэффициенты уравнения на $t^{-\operatorname{val}\mathcal{L}_1}$, чтобы получить уравнение с коэффициентами из $K[[t]]$. К новому уравнению применяем алгоритм построения формальных экспоненциально-логарифмических решений, но при этом в $\mathcal{N}(\mathcal{L}_1)$ будем рассматривать только те стороны, наклон которых меньше p_j. Для каждого $z(t)$, построенного таким образом решения уравнения $\mathcal{L}_1(z)=0$, получим следующее решение исходного уравнения $\mathcal{L}(y)=0$:

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon_{j,l}}{k_jx^{k_j}}\right\} z(x^{1/q_j}).$$

Замечание 1. В работах [5], [6] предлагается эффективный алгоритм построения формальных решений для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, где поле K не является в общем случае алгебраически замкнутым. Этот алгоритм, который авторы называют "рациональным алгоритмом Ньютона", строит решения в виде

$$y(x) = \exp\{Q(1/t)\}\, t^{\lambda} w(t),\ x = \Lambda t^{q}, \tag{6}$$

где $Q(1/t) \in K_1[1/t]$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda, \Lambda \in K_1$ и $w(t) \in K_1[[t]][\ln(t)]$. Поле K_1 является конечным алгебраическим расширением K. Для $q > 1$ формула (6) представляет по крайней мере q разных решений вида (3). Для каждой стороны $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ с наклоном $k_j = p_j/q_j$, с которой связано характеристическое уравнение $\chi(\varepsilon) = 0$, вместо постановок (5) выполняются подстановки

$$y(x) = \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{k_j t^{p_j}}\right\} z(t),\ x = \Lambda t^{q_j},$$

где ε обозначает корень неприводимого над K делителя полинома $\chi(\varepsilon)$. В программной реализации нашего алгоритма мы используем алгоритм из [6].

3. Экспоненциальная часть решения для уравнения с усеченными коэффициентами

Для уравнения (2) с усеченными коэффициентами положим $n_i = \operatorname{val} a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$. Допустим, что валюации всех коэффициентов этого уравнения одинаковы для всех продолжений, т.е. $n_i < \infty$, $a_i(x) \neq 0$ для $i = 0, 1, \ldots, r$. Тогда для любого продолжения $\mathcal{L}(y) = 0$ уравнения (2) $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ и характеристические уравнения, связанные с его сторонами, будут совпадать с $\mathcal{N}(L)$ и характеристическими уравнениями для $\mathcal{N}(L)$, где L определяется (1). Для всех продолжений уравнения (2) множества всех ведущих слагаемых экспоненциальных частей формальных решений будут одинаковы.

Пример 1. Рассмотрим усеченное уравнение

$$(-x^2 + O(x^4))\, \theta^5 y(x) + (x^3 + O(x^4))\, \theta^4 y(x) + (x + O(x^3))\, \theta^3 y(x) +$$

$$+ (x^3 + O(x^4))\, \theta^2 y(x) + (x + O(x^3))\, \theta\, y(x) + (-1 + O(x))\, y(x) = 0.$$

Здесь

$$L = -x^2\, \theta^5 + x^3\, \theta^4 + x\, \theta^3 + x^3\, \theta^2 + x\, \theta - 1.$$

$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ для каждого из продолжений $\mathcal{L}(y) = 0$ этого усеченного уравнения имеет вершины $(0, 0),\ (3, 1),\ (5, 2)$. Множество всех ведущих слагаемых экспоненциальных частей формальных решений для каждого из продолжений:

$$-\frac{3}{x^{1/3}},\ \ \frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}},\ \ -\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}},\ \ -\frac{2}{x^{1/2}},\ \ \frac{2}{x^{1/2}}$$

Таким образом, формальные решения для каждого продолжения имеют вид

$$\exp\left\{-\frac{3}{x^{1/3}}\right\} y_1(x),\ \exp\left\{\frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}}\right\} y_2(x),\ \exp\left\{-\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}}\right\} y_3(x),$$

$$\exp\left\{-\frac{2}{x^{1/2}}\right\} y_4(x),\ \exp\left\{\frac{2}{x^{1/2}}\right\} y_5(x),$$

где множители $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), y_5(x)$ пока неизвестны.

Пусть теперь в уравнении (2) $a_i(x) = 0$, $n_i = \infty$ для некоторых i. Пусть при этом все t_i заданы так, что точки (i, t_i) лежат внутри $\mathcal{N}(L)$. В этом случае, как и в предыдущем, $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ для каждого продолжения $\mathcal{L}(y) = 0$ уравнения (2) и характеристические уравнения, связанные со сторонами $\mathcal{N}(\mathcal{L})$, будут совпадать с $\mathcal{N}(L)$ и характеристическими уравнениями для L. Для всех продолжений множества всех ведущих слагаемых экспоненциальных частей формальных решений будут одинаковы.

Пример 2. Для усеченного уравнения

$$(-x^2 + O(x^4))\,\theta^5 y(x) + (x^3 + O(x^4))\,\theta^4 y(x) + (x + O(x^3))\,\theta^3 y(x) +$$
$$+ O(x^3)\,\theta^2 y(x) + O(x)\,\theta\, y(x) + (-1 + O(x))\, y(x) = 0$$

имеем

$$L = -x^2\,\theta^5 + x^3\,\theta^4 + x\,\theta^3 - 1.$$

Многоугольник Ньютона совпадает с многоугольником Ньютона из примера 1. Множество всех ведущих слагаемых экспоненциальных частей формальных решений для всех продолжений такие же, как в примере 1.

Если в уравнении (2) валюации ведущего коэффициента могут не совпадать для разных продолжений (т.е. $n_r = \infty$, $a_r(x) = 0$ в (2)), то существуют продолжение $\mathcal{L}_1(y) = 0$ уравнения (2) такое, что его порядок меньше r, и такое продолжение $\mathcal{L}_2(y) = 0$, что порядок равен r, при этом валюация ведущего коэффициента может быть как $t_r + 1$, так и любое целое, большее t_r. Т.е. в $\mathcal{N}(\mathcal{L}_2)$ последняя сторона и соответствующие ей ведущие коэффициенты экспоненциальной части неинвариантны относительно $\mathcal{L}_1(y) = 0$.

Пример 3. Рассмотрим усеченное уравнение

$$O(x^2)\,\theta^5 y(x) + (x^3 + O(x^4))\,\theta^4 y(x) + (x + O(x^3))\,\theta^3 y(x) +$$
$$+ O(x^3)\,\theta^2 y(x) + O(x)\,\theta\, y(x) + (-1 + O(x))\, y(x) = 0.$$

Для

$$L = x^3\,\theta^4 + x\,\theta^3 - 1$$

множеством всех ведущих слагаемых экспоненциальных частей формальных решений будет

$$-\frac{3}{x^{1/3}},\ \ \frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}},\ \ -\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}},\ \ \frac{1}{2x^2},$$

а для продолжения

$$\tilde{L} = -x^2\,\theta^5 + x^3\,\theta^4 + x\,\theta^3 - 1$$

множество всех ведущих слагаемых будет таким же, как в примере 1. Заметим, что в этом примере первая сторона многоугольника Ньютона будет одинаковой для всех продолжений, и, следовательно, все продолжения будут иметь решения вида:

$$\exp\left\{-\frac{3}{x^{1/3}}\right\} y_1(x),\ \exp\left\{\frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}}\right\} y_2(x),\ \exp\left\{-\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}}\right\} y_3(x).$$

Итак, в некоторых случаях возможно, зная только усеченное уравнение (2), построить ведущие слагаемые показателей экспоненциальной части некоторых формальных решений, инвариантные относительно всех продолжений уравнения (2). Пусть в уравнении (2) для некоторых t_i точка (i, t_i+1) лежит вне $\mathcal{N}(L)$, где L определяется (1). Тогда существуют продолжения уравнения (2), такие что их многоугольники Ньютона будут отличаться от $\mathcal{N}(L)$, но $\mathcal{N}(L)$ будет подмножеством для каждого из них. В то же время, все они будут подмножеством $\mathcal{N}(\tilde{L})$, где

$$\tilde{L} = L + \sum_{\substack{i=0\\(i,t_i)\notin\mathcal{N}(L)}}^{r} x^{t_i+1}\,\theta^i. \tag{7}$$

Построим $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(\tilde{L})$ и определим, какие из их сторон совпадают. Эти и только эти стороны будут инвариантны относительно всех продолжений уравнения (2), а если связанные с ними характеристические уравнения одинаковы, то и соответствующие коэффициенты ведущих слагаемых будут инвариантны относительно всех продолжений уравнения (2).

Пример 4. Рассмотрим усеченное уравнение

$$(-x^3 + O(x^4))\,\theta^5 y(x) + (x^3 + O(x^4))\,\theta^4 y(x) + (x + O(x^3))\,\theta^3 y(x) +$$

$$+ O(x^3)\,\theta^2 y(x) + O(1)\,\theta\, y(x) + (-1 + O(x))\,y(x) = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$L = -x^3\,\theta^5 + x^3\,\theta^4 + x\,\theta^3 - 1,$$

$$\tilde{L} = -x^3\,\theta^5 + x^3\,\theta^4 + x\,\theta^3 + x^3\,\theta^2 + \theta - 1.$$

В $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(\tilde{L})$ общая сторона имеет вершины $(3,1)$, $(5,3)$. Ей соответствуют ведущие слагаемые

$$-\frac{1}{x},\ \ \frac{1}{x}.$$

Эти ведущие слагаемые и только они инвариантны относительно всех продолжений уравнения (8).

Предложение 1. *Пусть для всех продолжений уравнения (2) соответствующие им многоугольники Ньютона имеют общую сторону S с концами-вершинами $(i', n_{i'})$, $(i'', n_{i''})$, $n_{i''} \neq n_{i'}$, и эта сторона имеет наклон k. Пусть найдется такое i, $i' \le i \le i''$, что $(i, t_i+1) \in S$. Тогда существует продолжение уравнения (2), для которого ведущие слагаемые показателей экспоненциальных частей всех его решений отличны от $-\varepsilon/(kx^k)$, где ε — корень связанного со стороной S характеристического уравнения для (1).*

Доказательство. Для уравнения (2) рассмотрим два его продолжения $L(y) = 0$ и $L_1(y) = 0$, где L имеет вид (1) и

$$L_1 = L + x^{t_i+1}\,\theta^i.$$

Характеристические уравнения $P(\varepsilon) = 0$ для $L(y) = 0$, и $P_1(\varepsilon) = 0$ для $L_1(y) = 0$, связанные со стороной S, отличаются друг от друга:

$$P(\varepsilon) = \sum_{\substack{j=i'\\(j,n_j)\in S}}^{i''} a_{j,n_j}\varepsilon^{j-i'},\ \ P_1(\varepsilon) = P(\varepsilon) + \varepsilon^{i-i'}.$$

Мы видим, что $P(0) \neq 0$, $P_1(0) \neq 0$ и $P(\varepsilon) - P_1(\varepsilon) = \varepsilon^{i-i'}$. Таким образом, $P(\varepsilon)$, $P_1(\varepsilon)$ не имеют общих корней. Отсюда следует утверждение.

4. Регулярная часть решения

Вычисление регулярной части решения производится с помощью предложенного в [2] алгоритма построения усеченных регулярных решений дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде усеченных рядов. Регулярное решение может быть записано как

$$x^{\lambda}\sum_{s=0}^{k} g_{k-s}(x)\frac{\ln^{s}x}{s!},$$

где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $g_j(x) \in K((x))$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Для уравнения (2) алгоритм из [2] строит регулярные решения с максимально большими усечениями, входящих в них рядов $g_{k-s}(x)$, такими, что решения являются инвариантными относительно различных возможных продолжений уравнения (максимальность усечения означает, что добавление членов большей степени к любому из этих отрезков влечет потерю инвариантности относительно возможных продолжений уравнения). Множество возможных значений λ определяется исходя из корней характеристического уравнения, связанного со стороной многоугольника Ньютона с наклоном 0, после чего поиск усеченных регулярных решений сводится к поиску усеченных решений в $K((x))$ (лорановых решений), который, в свою очередь, выполняется с помощью алгоритма из работы [1]. Найденные усеченные регулярные решения содержат произвольные постоянные.

Алгоритмы из [1], [2] предполагают, что свободный член по крайней мере одного из $a_0(x), \ldots, a_r(x)$ в отличен от нуля. Это гарантирует, что характеристическое уравнение будет инвариантным относительно продолжений исходного уравнения. Если же это предположение не выполняется, то не существует инвариантных усечений регулярных решений. Это следует из следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть имеющему вид (2) уравнению сопоставлены оператор L вида (1) и набор чисел $t_0, \ldots, t_r$, как описано в разд. 2.1. Пусть $\mathcal{N}(L)$ имеет вершину $(0, \eta_1)$. Пусть $t_i < \eta_1$ для некоторого t_i, $0 \leq i \leq r$. Тогда для любого $\lambda \in K$ найдется такое продолжение уравнения (2), которое не имеет регулярного решения вида*

$$x^{\lambda}\ln^{k}x\,(1 + O(x)) + x^{\lambda}\,u(x) \tag{9}$$

где $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u(x) \in K((x))[\ln(x)]$ и степень $u(x)$ как полинома от $\ln x$ меньше, чем k.

Доказательство. Если уравнение обладает решением вида (9), то связанное со стороной с наклоном 0 многоугольника Ньютона характеристическое уравнение имеет корень λ. Рассмотрим три случая.

1) $t_0 + 1 < \eta_1$. Тогда $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ имеет сторону с вершинами $(0, \eta_1)$, (i_1, η_1), $i_1 > 0$, следовательно $L(y) = 0$ имеет регулярные решения. Для $L_2(y) = 0$, где

$$L_2 = L + x^{t_0+1},$$

первая сторона $\mathcal{N}(L_2)$ имеет вершины $(0, t_0 + 1)$, (i_1, η_1), т.е. ее наклон не равен 0 и, следовательно $L_2(y) = 0$ не имеет регулярных решений.

2) $t_0+1 = \eta_1$. Тогда $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(L_2)$ имеют одинаковую сторону с наклоном 0, с вершинами $(0, \eta_1)$ и (i_1, η_1). Но характеристические уравнения $P(\varepsilon) = 0$ (для $L(y) = 0$) и $P_2(\varepsilon) = 0$ (для $L_2(y) = 0$), связанные с этой стороной, различаются:

$$P(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{i_1} a_{j,\eta_1}\varepsilon^{j}, \quad P_2(\varepsilon) = 1 + P(\varepsilon).$$

Поскольку $P_2(\varepsilon) - P(\varepsilon) = 1$, то $P(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$ не имеют одинаковых корней. Это значит, что выполняется $\lambda_1 \neq \lambda_2$ для всех решений $x^{\lambda_1} \ln^{k_1}(x)\,(1 + O(x)) + \ldots$ первого уравнения и решений $x^{\lambda_2} \ln^{k_2}(x)\,(1 + O(x)) + \ldots$ второго уравнения.

3) $t_0 + 1 > \eta_1$ (следовательно $t_i \neq t_0$). Для $L(y) = 0$ и $L_3(y) = 0$, где

$$L_3 = L + x^{\eta_1}\theta^i,$$

$\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(L_3)$ имеют сторону с наклоном 0, с одинаковой вершиной $(0, \eta_1)$. Для $L_3(y) = 0$ с этой стороной связано характеристическое уравнение

$$P_3(\varepsilon) = \varepsilon^i + P(\varepsilon).$$

Поскольку $P_3(\varepsilon) - P(\varepsilon) = \varepsilon^i$, то $P(\varepsilon)$, $P_3(\varepsilon)$ могут иметь лишь один общий корень: $\varepsilon = 0$. Это значит, что, если $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то выполняется $\lambda_1 \neq \lambda_2$ для всех решений $x^{\lambda_1} \ln^{k_1}(x)(1+O(x)) + \ldots$ первого уравнения и решений $x^{\lambda_2} \ln^{k_2}(x)(1+O(x)) + \ldots$ второго уравнения.

Если $n_0 \neq 0$, то $P(\varepsilon)$ не имеет корня 0. Следовательно выполняется $\lambda_1 \neq \lambda_2$ для всех решений $x^{\lambda_1} \ln^{k_1}(x)(1+O(x)) + \ldots$ первого уравнения и решений $x^{\lambda_2} \ln^{k_2}(x)(1+O(x)) + \ldots$ второго уравнения.

Если $n_0 = 0$, то $P(0) = 0$. В этом случае $L(y) = 0$ имеет регулярные решения (9), где $\lambda = 0$, если и только если 0 является максимальным целым корнем $P(\varepsilon)$. Рассмотрим продолжение уравнения (2) $L_4(y) = 0$, где

$$L_4 = L + \alpha\, x^{\eta_1}\theta^i$$

и $\alpha \in K$ таково, что его характеристическое уравнение, связанное со стороной с наклоном 0,

$$P_4(\varepsilon) = \alpha\,\varepsilon^i + P(\varepsilon).$$

имеет корень 1, т.е. $P_4(1) = 0$. Ясно, что

$$\alpha = -\sum_{j=0}^{i_1} a_{j,\eta_1}\,.$$

Уравнение $L_4(y) = 0$ имеет регулярные решения (9), где $\lambda = 1$ и не имеет таких решений с $\lambda = 0$.

Пример 5. Рассмотрим усеченное уравнение

$$O(x^2)\,\theta^2 y(x) + (x^2 + O(x^3))\,\theta y(x) + O(x^3)\,y(x) = 0.$$

Здесь, $\eta_1 = 2$ и $t_2 = 1$. Для этого уравнения не существует λ и k такого, что все продолжения имеют решения вида (9). Продолжение

$$x^2\,\theta y(x) + x^3\,y(x) = 0$$

имеет решение $1 + O(x)$ ($\lambda = 0$, $k = 0$). Продолжение

$$-x^2\,\theta^2 y(x) + x^2\,\theta y(x) + x^3\,y(x) = 0,$$

не имеет решений такого вида. Его решениями будут

$$x\ln(x)\,(1 + O(x)) + (1 + O(x)) \quad (\lambda = 1, k = 1)$$

и

$$x\,(1 + O(x)) \quad (\lambda = 1, k = 0).$$

5. Алгоритм

Опишем рекурсивный алгоритм $\mathcal{A}$ построения показателей экспоненциальных частей и начал регулярных частей формальных решений, инвариантных относительно всех продолжений данного усеченного уравнения.

Шаг 1. Входные данные: дифференциальный оператор (1) с полиномиальными коэффициентами, целые числа $t_0, t_1, \dots, t_r$, число P (на первой итерации $P = \infty$).

Шаг 2. Строим $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(\tilde{L})$ для (1) и (7), а также множество $\mathcal{S}$ всех одинаковых их сторон с наклоном, меньшим P, таких, что не выполняются условия предложений 1 и 2, т.е. для каждой стороны $S \in \mathcal{S}$ имеет место $(i, t_i + 1) \notin S$, $i = 0, \dots, r$.

Шаг 3. Если $\mathcal{S} = \varnothing$, то

– если совпадают первые вершины $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{N}(\tilde{L})$ то все продолжения не имеют регулярных решений, результат: NULL;

– иначе никакой инвариантной информации о экспоненциально-логарифмических решениях продолжений не существует, результат: FAIL.

Шаг 4. Положим $\mathcal{Y} = \varnothing$.

Шаг 5. Если $\mathcal{S}$ содержит сторону с наклоном 0, то алгоритмом из [2] строим для усеченного уравнения (2) регулярные решения с максимально большими инвариантными усечениями входящих в них рядов, добавляем результат к $\mathcal{Y}$.

Шаг 6. Для каждой стороны $S \in \mathcal{S}$ ненулевого наклона $k = p/q$ (н.о.д. $(p, q) = 1$) строим связанное с S характеристическое уравнение, находим множество $\mathcal{E}$ всех его корней. Для каждого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполняем подстановку

$$y(x) = \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{k\, t^p}\right\} z(t),\ \ x = t^q,$$

в уравнение (2), получается новое уравнение с усеченными коэффициентами. К новому уравнению применяем алгоритм $\mathcal{A}$ при $P = p$. Если в результате получено FAIL или NULL, добавляем $\exp\{-\varepsilon/(k\, x^k)\}\, Y$ к $\mathcal{Y}$. Иначе для каждого элемента $r(t)$, из полученного множества, добавляем $\exp\{-\varepsilon/(k\, x^k)\}\, r(x^{1/q})$ к $\mathcal{Y}$.

Шаг 7. Результат: множество $\mathcal{Y}$.

Пример 6. Применим алгоритм $\mathcal{A}$ к усеченному уравнению из примера 1. Получим следующее множество из пяти элементов:

$$\exp\left\{-\frac{3}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_1 x^{2/3} - \frac{16\_c_1}{9}\, x + O\left(x^{4/3}\right)\right),$$

$$\exp\left\{\frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_1 x^{2/3} - \frac{16\_c_1(-1)^{2/3}}{9}\, x + O\left(x^{4/3}\right)\right),$$

$$\exp\left\{-\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_1 x^{2/3} + \frac{16\_c_1(-1)^{1/3}}{9}\, x + O\left(x^{4/3}\right)\right),$$

$$\exp\left\{-\frac{2}{x^{1/2}}\right\}\left(\_c_1 x^{5/4} + \frac{15\_c_1}{16}\, x^{7/4} + O\left(x^{9/4}\right)\right),$$

$$\exp\left\{\frac{2}{x^{1/2}}\right\}\left(\_c_1 x^{5/4} - \frac{15\_c_1}{16}\, x^{7/4} + O\left(x^{9/4}\right)\right),$$

где $\_c_1$ — произвольная постоянная, сгенерированная алгоритмом построения усеченных регулярных решений из [2].

В завершение этого примера мы переименуем произвольные постоянные и составим общее усеченное формальное экспоненциально-логарифмическое решение:

$$\exp\left\{-\frac{3}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_1x^{2/3}-\frac{16\_c_1}{9}\,x+O\left(x^{4/3}\right)\right)+$$
$$+\exp\left\{\frac{3\,(-1)^{1/3}}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_2x^{2/3}-\frac{16\_c_2(-1)^{2/3}}{9}\,x+O\left(x^{4/3}\right)\right)+$$
$$+\exp\left\{-\frac{3\,(-1)^{2/3}}{x^{1/3}}\right\}\left(\_c_3x^{2/3}+\frac{16\_c_3(-1)^{1/3}}{9}\,x+O\left(x^{4/3}\right)\right)+$$
$$+\exp\left\{-\frac{2}{x^{1/2}}\right\}\left(\_c_4x^{5/4}+\frac{15\_c_4}{16}\,x^{7/4}+O\left(x^{9/4}\right)\right)+$$
$$\exp\left\{\frac{2}{x^{1/2}}\right\}\left(\_c_5x^{5/4}-\frac{15\_c_5}{16}\,x^{7/4}+O\left(x^{9/4}\right)\right).$$

На каждой итерации рекурсивного алгоритма $\mathcal{A}$ при построении ведущего слагаемого экспоненциальной части формального решения используются стороны $\mathcal{N}(L)$ для (1), которые инвариантны относительно всех продолжений вместе со связанными с ними характеристическими уравнениями. При построении регулярной части используется алгоритм из [2], который получает максимально возможное число членов рядов. Все это позволяет сделать заключение о справедливости следующего предложения:

Предложение 3. *Пусть оператор L имеет вид (1), $t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$ и применение алгоритма $\mathcal{A}$ к усеченному уравнению (2) позволило определить, что при любом продолжении этого уравнения имеется формальное экспоненциально-логарифмическое решение с показателем $Q(x) \in K[x^{-1/q}]$ экспоненциальной части. Пусть выполнена подстановка $y(x) = \exp\{Q(x)\}\, z(t)$, $x = t^q$ и это дало новое уравнение с усеченными коэффициентами, для которого алгоритмом из [2] найдены регулярные решения. Тогда каждое из полученных в итоге формальных экспоненциально-логарифмических решений уравнения (2) содержит усеченные ряды с максимально возможным числом членов, инвариантных относительно продолжений уравнения (2).*

6. Реализация и примеры использования

Предложенный выше алгоритм построения инвариантной части формальных решений для усеченного дифференциального уравнения реализован нами в среде Maple 2019 в виде процедуры `FormalSolution` как расширение возможностей пакета `TruncatedSeries`, представленного в [2], [13]. Пакет и сессия `Maple` с примерами использования его процедур доступны по адресу http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries.

Первый аргумент процедуры — дифференциальное уравнение вида (2). Применение θ^i к неизвестной функции $y(x)$ записывается как `theta(y(x),x,i)`. Усеченные коэффициенты уравнения задаются в виде выражений $a_i(x) + O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ — полином степени не выше t_i над полем $\overline{\mathbb{Q}}$, т.е. над полем алгебраических чисел.

Второй аргумент процедуры — неизвестная функция, например, `y(x)`.

Результат работы процедуры:

- Maple-константа `FAIL`, если не существует никаких инвариантных начал решений заданного уравнения;
- Maple-константа `NULL`, если не существует никаких инвариантных начал решений заданного уравнения и при этом никакое продолжение данного уравнения не имеет никаких регулярных решений;

- список усеченных формальных решений, инвариантных относительно продолжений заданного уравнения.

Усеченное формальное решение является конечной суммой выражений вида $\_c_j\, e^Q y_i(x)$ и/или $e^Q R$, где

- $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[x^{-1/q}]$, где $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, — инвариантная часть показателя экспоненциальной части формального решения;
- $\_c_j$, где $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, обозначает произвольную постоянную;
- $y_i(x)$, где $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, обозначает часть формального решения, неинвариантную относительно всех продолжений заданного уравнения;
- R — конечная сумма выражений вида

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} \left(g_{k-s} + O(x^{m_s/q})\right) \frac{\ln^s x^{1/q}}{s!},$$

  где $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $g_{k-s} \in \overline{\mathbb{Q}}[\_c_1, \_c_2, \ldots][x^{1/q}]$, $m_s \in \mathbb{Z}_{>0}$, для $s = 0, 1, \ldots, k$.

Алгебраические числа представляются с помощью стандартной Maple-конструкции `RootOf`. Так, в следующем примере $RootOf(\_Z^2 + 2, index = 1) = \sqrt{-2}$ и $RootOf(\_Z^2 + 2, index = 2) = -\sqrt{-2}$. (Возможно присутствие подобных конструкций и в исходных дифференциальных уравнениях.)

```
> (x + O(x^3))*theta(y(x), x, 2) + (x^2 + O(x^3))*theta(y(x), x, 1) +
  (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{-\frac{2RootOf(\_Z^2+2,index=1)}{\sqrt{x}}} x^{1/4}\left(\_c_1 + \frac{\sqrt{x}\_c_1 RootOf(\_Z^2+2, index=1)}{32} - \frac{521x\_c_1}{1024} + O(x^{3/2})\right) + e^{-\frac{2RootOf(\_Z^2+2,index=2)}{\sqrt{x}}} x^{1/4}\left(\_c_2 + \frac{\sqrt{x}\_c_1 RootOf(\_Z^2+2, index=2)}{32} - \frac{521x\_c_1}{1024} + O(x^{3/2})\right)\right]$$

Следующее уравнение имеет решения, содержащие как экспоненту, так и логарифмы:

```
> (x^2+x^5+O(x^6))*theta(y(x),x,2) + (2*x+x^4+O(x^5))*theta(y(x),x,1) +
  (1-x+x^3+O(x^4))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$e^{\frac{1}{x}}\left(\_c_2 + x(-\_c_2 + 2\_c_1) + O(x^2) + \ln(x)\left(-x\_c_1 + \_c_1 + O(x^2)\right)\right)$$

Проиллюстрируем работу процедуры `FormalSolution` еще несколькими примерами.

1. Уравнение, для решений которого не существует инвариантных начал:

```
> O(x^4)*theta(y(x), x, 2) + O(x)*theta(y(x), x, 1) + O(1)*y(x):
> y(x) = FormalSolution(%, y(x));
```

FAIL

2. Добавим несколько слагаемых к последнему коэффициенту предыдущего уравнения. Процедура возвращает Maple-константу `NULL` — все продолжения не имеют регулярных решений. В сессии Maple 2019 результат выглядит следующим образом:

```
> O(x^4)*theta(y(x), x, 2) + O(x)*theta(y(x), x, 1) + (2 + O(x^2))*y(x):
> y(x) = FormalSolution(%, y(x));
```

$$y(x) = ()$$

Ниже в примерах 3 – 8 мы продолжаем добавлять новые члены в коэффициенты (“уточнять коэффициенты”) исходного уравнения:

3. В качестве коэффициента при θy берем $3x + O(x^2)$:

```
> O(x^4)*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^2))*theta(y(x), x, 1) +
   (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[\_c_1 e^{\frac{2}{3x}} y_1(x)\right]$$

4. Теперь в качестве коэффициента при θy берем $3x + O(x^3)$:

```
> O(x^4)*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^3))*theta(y(x), x, 1) +
   (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{\frac{2}{3x}} \left(\_c_1 + O(x)\right)\right]$$

5. В предыдущем варианте дополнительно уточняем старший коэффициент,— берем его равным $4x^4 + O(x^5)$:

```
> (4*x^4 + O(x^5))*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^3))*theta(y(x), x, 1) +
  (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{\frac{2}{3x}} \left(\_c_1 + O(x)\right) + \_c_2\, e^{\frac{1}{4x^3}} y_1(x)\right]$$

6. Еще раз уточняем старший коэффициент,— берем его равным $4x^4 + O(x^8)$:

```
> (4*x^4 + O(x^8))*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^4))*theta(y(x), x, 1) +
  (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{\frac{2}{3x}} \left(\_c_1 + O(x)\right) + \_c_2\, e^{\frac{1}{4x^3} - \frac{2}{3x}} y_1(x)\right]$$

7. Дополнительно уточняем коэффициент при θy,— берем его равным $3x + O(x^5)$:

```
> (4*x^4 + O(x^8))*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^5))*theta(y(x), x, 1) +
  (2 + O(x^2))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{\frac{2}{3x}}\,(\_c_1+O(x))+e^{\frac{1}{4x^3}-\frac{2}{3x}}\,(\_c_2\,x^3+O(x^4))\right]$$

8. Уточняем коэффициенты во всех слагаемых уравнения:

```
> (4*x^4 + O(x^9))*theta(y(x), x, 2) + (3*x + O(x^6))*theta(y(x), x, 1) +
  (2 + O(x^4))*y(x):
> FormalSolution(%, y(x));
```

$$\left[e^{\frac{2}{3x}}\left(\_c_1-\frac{16\_c_1\,x}{27}-\frac{196\_c_1\,x^2}{729}+O(x^3)\right)+e^{\frac{1}{4x^3}-\frac{2}{3x}}\left(\_c_2\,x^3+\frac{16\_c_2\,x^4}{27}+O(x^5)\right)\right]$$

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды,* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.

[2] *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды,* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 4–17.

[3] *Malgrange B.* Sur la réduction formelle des équations différentielles a singularités irrégulières. Université Scientifique et Médicale de Grenoble. 1979.

[4] *Tournier E.* Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR Étude théorique et réalisation // Thèse d'État. Université de Grenoble. 1987.

[5] *Barkatou M. Rational Newton algorithm for computing formal solutions of linear differential equations* // Lecture Notes in Computer Science. 1989. Vol. 358. P. 183–195.

[6] *Баркату М., Ришар-Жюнг Ф. Формальные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений,* // Программирование. 1997. № 2. С. 24–42.

[7] *Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения,* // Успехи матем. наук. 2004. Том 59. Вып. 3(357). С. 31–80.

[8] *Брюно А.Д. Разложение решений обыкновенного дифференциального уравнения в трансряды,* // Доклады Академии наук. 2019. Том 484. No 3. С. 260–264.

[9] Maple online help, http://www.maplesoft.com/support/help/

[10] *Frobenius G. Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen,* // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1873. V. 76. P. 214–235.

[11] *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.

[12] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит. 1958.

[13] *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов,* // Труды ИСП РАН. 2019. Т. 31. № 5. С. 233–248.