Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды [1)]

© 2020 г. С.А. Абрамов, А.А. Рябенко, Д.Е. Хмельнов

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН)

e-mail: sergeyabramov@mail.ru

anna.ryabenko@gmail.com,

dennis_khmelnov@mail.ru

Поступила в редакцию 20.08.2019 г.

Переработанный вариант 30.08.2019 г.

Принята к публикации 18.09.2019 г.

Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами в виде усеченных формальных степенных рядов. Ранее обсуждался вопрос о том, что можно узнать из заданного таким образом уравнения о его решениях, принадлежащих полю формальных рядов Лорана. Теперь аналогичный вопрос обсуждается для регулярных решений. Нас по-прежнему интересует такая информация об этих решениях, которая инвариантна относительно возможных продолжений усеченных рядов, представляющих коэффициенты уравнения. Рассматривается также возможность включения в решения уравнения символьных незаданных коэффициентов возможных продолжений. Библ. 18.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, дифференциальные уравнения, степенные ряды, усеченные ряды, регулярные решения.

1. Введение

В настоящей статье, как и в [1], линейное дифференциальное уравнение задается в "приближенном" виде: его коэффициентами являются усеченные ряды, т.е. каждый коэффициент представляет собой выражение

$$p(x) + O(x^{t+1}), \qquad (1)$$

где $p(x)$ — полином, $t \geq \deg p(x)$. Нас интересует информация о регулярных (представимых степенно-логарифмическими разложениями; определение уточняется в разд. 3) решениях, инвариантная относительно всех возможных продолжений усеченных рядов, представляющих коэффициенты уравнения. Предлагаемый алгоритм позволяет построить максимально длинные отрезки рядов, появляющихся в решениях, — члены, входящие в эти отрезки, не зависят от возможных продолжений ("хвостов") усеченных коэффициентов уравнения, т.е. от тех незаданных членов, которые скрыты в выражениях (1) за символами O. В некотором смысле алгоритм также позволяет прояснить влияние этих членов на последующие (не являющиеся уже инвариантными относительно всех возможных продолжений) члены рядов, входящих в регулярные решения. Имеются в виду формулы для выражения этих членов через незаданные коэффициенты. Для незаданных коэффициентов используются символьные обозначения. Эти незаданные коэффициенты мы будем называть *литералами.*

Касаясь предшествующих исследований, надо сказать, что в работах Брюно (см., например, [2]) предложен метод построения регулярных решений, который для всех рядов, входящих в такого рода решения данного уравнения, позволяет, в частности, найти любое наперед заданное число членов. Уравнения, вообще говоря, нелинейные. Они могут иметь весьма общий вид и задаются с помощью явно указанных аналитических функций нескольких переменных. При этом хорошо известно, что линейные (полностью заданные)

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00032).

уравнения решаются с помощью классических подходов — методов Фробениуса [3], [4, гл. 4, §8] и Хеффтера [5], а также их современных вариантов [6]-[8], для большей части которых имеется компьютерная реализация.

Остается лишь повторить, что, в отличие от предшествующих работ, в нашей статье линейные дифференциальные уравнения считаются заданными не целиком, а в "приближенном", т.е. усеченном виде. При этом для рядов Лорана, входящих в запись регулярных решений, предлагаемый алгоритм находит максимально возможное число членов, инвариантных относительно неизвестных нам членов рядов-коэффициентов уравнения.

Реализация предлагаемого алгоритма в среде Maple [9] описана в разд. 6.

Нелишне будет пояснить, что в настоящее время термин "регулярные решения" для решений, которые рассматриваются в этой статье и точное определение которых дается, как мы говорили, в разд. 3, укрепился в компьютерной алгебре [9]-[11]. Его изначальное появление обусловлено тем, что в аналитической теории линейных дифференциальных уравнения принято подразделять (см. [12, гл. 3, §10]) особые точки уравнений на регулярные (или слабо особые) и нерегулярные (или сильно особые). В окрестности регулярной особой точки существует базис пространства решений уравнения, состоящий из регулярных (в обсуждаемом смысле) решений, и именно это послужило поводом для введения понятия регулярного решения. Уточним, что в этой статье мы рассматриваем решения как формальные выражения. Ряды, которые входят в эти выражения, в свою очередь, являются формальными лорановыми рядами по x. В этом смысле, мы рассматриваем решения в точке 0 и разыскиваем максимально возможное число линейно-независимых регулярных решений. Это число не превосходит порядка уравнения и может быть меньше его. Вопросами сходимости мы не занимаемся. В роли констант выступают абстрактные величины — элементы некоторого алгебраически замкнутого поля характеристики 0, о чем и пойдет речь в следующем разделе.

2. Предварительные сведения

2.1. *Начальные понятия*

Сначала напомним несколько понятий и стандартных обозначений. Пусть K — некоторое поле. Следующие обозначения являются стандартными:

$K[x]$ — кольцо полиномов с коэффициентами из K;

$K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из K;

$K((x))$ — поле частных кольца $K[[x]]$.

В $K[x], K[[x]], K((x))$ определено дифференцирование $D = \frac{d}{dx}$. Мы будем рассматривать операторы и дифференциальные уравнения, записанные с использованием обозначения $\theta = x\frac{d}{dx}$.

Определение 1. Элементы поля $K((x))$ — формальные *лорановы ряды*. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i \in K((x))$ его *валюация* $\operatorname{val} a(x)$ определяется как $\min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\operatorname{val} 0 = \infty$. Пусть $t \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, t-*усечение* $a^{\langle t \rangle}(x)$ получается отбрасыванием всех членов $a(x)$ степени большей, чем t; если $t = -\infty$, то $a^{\langle t \rangle}(x) = 0$. Число t называется *степенью усечения*.

Далее поле K без оговорок будет предполагаться алгебраически замкнутым, имеющим характеристику 0.

В исходном операторе

$$L = \sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^i \in K[x][\theta] \tag{2}$$

полиномиальный коэффициент $a_i(x)$ ниже будет предполагаться имеющим вид

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j, \tag{3}$$

где t_i — неотрицательное целое, большее или равное $\deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$ (если $t_i > d_i = \deg a_i(x)$, то $a_{ij} = 0$ для $j = d_i + 1, d_i + 2, \dots, t_i$). Предполагается при этом, что свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ отличен от нуля.

Определение 2. Полином $a_r(x)$ (*старший коэффициент* дифференциального оператора L из (2)) предполагается ненулевым. *Продолжением* оператора L будем называть любой оператор

$$\tilde{L} = \sum_{i=0}^{r} \tilde{a}_i(x) \theta^i \in K[[x]][\theta],$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е. $\operatorname{val}(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)) > t_i$, $i = 0, 1, \dots, r$.

Далее *усеченному дифференциальному уравнению*

$$\big(a_r(x) + O(x^{t_r+1})\big)\, \theta^r y(x) + \dots + \big(a_1(x) + O(x^{t_1+1})\big)\, \theta y(x) + \big(a_0(x) + O(x^{t_0+1})\big)\, y(x) = 0, \tag{4}$$

$t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$, мы сопоставляем оператор (2), а также набор чисел $t_0, t_1, \dots, t_r$. Продолжение оператора (2) будет в этом случае называться также *продолжением уравнения* (4).

Ниже для обозначения оператора с коэффициентами-рядами

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x) \theta^i \in K[[x]][\theta], \tag{5}$$

где

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^j \in K[[x]],$$

мы используем букву $\mathcal{L}$. Для $\mathcal{L}$ также предполагаем, что существует i такое, что $a_{i,0} \neq 0$. Для обозначения оператора с полиномиальными коэффициентами (например, для оператора с усеченными коэффициентами) используем букву L.

Если L (или $\mathcal{L}$) — некоторый дифференциальный оператор, то под *решениями оператора* L (или $\mathcal{L}$) мы понимаем решения уравнения $L(y) = 0$ (соответственно, $\mathcal{L}(y) = 0$).

В случае, когда L — усеченный вариант оператора $\mathcal{L}$, будем называть L и $L(y) = 0$ *усечениями* оператора $\mathcal{L}$ и соответственно уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

2.2. *Лорановы решения*

Решение уравнения, имеющее вид лоранова ряда, будем называть *лорановым решением*.

Прежде всего, для усеченного уравнения $L(y) = 0$ алгоритм из [1] находит конечное множество кандидатов для всех возможных валюаций лорановых решений. Это множество содержит все валюации лорановых решений при всех продолжениях данного уравнения. Для каждого из элементов этого множества затем проверяется: верно ли, что для любого продолжения уравнения найдется лораново решение, имеющее такую валюацию? При ответе ‘нет’ эта валюация далее не рассматривается. При ответе ‘да’ можно вычислить такое целое m, что члены всех лорановых решений, имеющих эту валюацию, совпадают (с точностью до общего ненулевого постоянного множителя, так как уравнения — однородные) вплоть до членов порядка x^m. При этом выбирается наибольшее из возможных значений m. В итоге мы получаем наряду с множеством валюаций $\{v_1, v_2, \dots\}$ еще и множество $\{m_1, m_2, \dots\}$ соответствующих им значений m.

Упомянутые действия — отбрасывание лишних валюаций, нахождение значений m и т.д. выполняются с привлечением *индуцированного рекуррентного уравнения*, сопоставляемого дифференциальному уравнению.

2.3. *Индуцированное рекуррентное уравнение*

Пусть σ обозначает оператор сдвига: $\sigma c_n = c_{n+1}$ для любой последовательности (c_n). Преобразование

$$x \to \sigma^{-1}, \ \ \theta \to n \tag{6}$$

переводит дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^{\,i} y(x) = 0, \tag{7}$$

где $a_i(x) \in K[[x]]$, в индуцированное рекуррентное уравнение (соотношение)

$$u_0(n)c_n + u_{-1}(n)c_{n-1} + \dots = 0. \tag{8}$$

Пусть $\mathcal{L} \in K[[x]][\theta]$, $g(x) \in K((x))$, тогда $\mathcal{L}(g(x)) = b(x) \in K((x))$. В этом случае применение индуцированного рекуррентного оператора $u_0(n) + u_{-1}(n)\sigma^{-1} + \dots$ к последовательности (g_n) коэффициентов ряда $g(x)$ дает последовательность (b_n) коэффициентов ряда $b(x)$: формулы (6) явно указывают, как преобразуется последовательность коэффициентов ряда, когда ряд умножается на x и когда к нему применяется операция θ. Все это делает индуцированные уравнения полезным инструментом при рассмотрении неоднородных уравнений вида $\mathcal{L}(y) = b(x)$ с лорановыми правыми частями.

Пусть уравнение

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^{\,i} y(x) = b(x) \tag{9}$$

имеет правую часть в виде ряда Лорана:

$$b(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} b_n x^n.$$

Тогда правая часть индуцированного рекуррентного уравнения будет равна b_n ($b_n = 0$ для $n < \nu$):

$$u_0(n)c_n + u_{-1}(n)c_{n-1} + \dots = b_n. \tag{10}$$

Однородное уравнение (7) (и неоднородное (9)) имеет лораново решение $y(x) = c_v x^v + c_{v+1}x^{v+1} + \dots$, если и только если двусторонняя последовательность $\dots, 0,\ 0,\ c_v,\ c_{v+1},\ \dots$ удовлетворяет уравнению (8) (соответственно, уравнению (10)) (доказательство см. в [13]).

Напомним, что по нашему предположению свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ не равен нулю. Отсюда

$$u_0(n) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,0}\, n^i \tag{11}$$

есть ненулевой полином. Он может быть рассмотрен как некоторый вариант *определяющего полинома* исходного уравнения. Конечное множество $n_1, \dots, n_\iota$ целых корней этого полинома содержит все возможные валюации v лорановых решений уравнения (7). Валюации лорановых решений (9) определяются как $n_1, \dots, n_\iota$, так и валюацией ν правой части $b(x)$.

Вычисление c_v, $c_{v+1}, \dots$ выполняется, последовательно увеличивая значение n, начиная с $n = v$ — минимального целого корня полинома $u_0(n)$ (начиная с $v = \min\{\nu, n_1, \dots, n_\iota\}$ для (9)). Если для некоторого целого n выполнено $u_0(n) \neq 0$, то (8), (10) позволяет найти c_n по $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots$ (поскольку $c_{v-1}, c_{v-2}, \dots$ равны нулю, для каждого целого n индуцированное рекуррентное уравнение имеет конечное число ненулевых слагаемых в левой части). Если же $u_0(n) = 0$, то мы объявляем c_n *неизвестной постоянной.* При этом ранее вычисленные значения $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_v$ должны в однородном случае удовлетворять соотношению

$$u_{-1}(n)c_{n-1} + u_{-2}(n)c_{n-2} + \cdots + u_{-n+v}(n)c_v = 0. \tag{12}$$

и в неоднородном — соотношению

$$u_{-1}(n)c_{n-1} + u_{-2}(n)c_{n-2} + \cdots + u_{-n+v}(n)c_v = b_n. \tag{13}$$

Такого рода соотношения позволят, возможно, вычислить значение некоторых введенных ранее неизвестных постоянных. Если соотношение (13) при некотором целом n обращается в неверное тождество, то (9) не имеет лорановых решений. После того, как значение n превзойдет наибольший целый корень $u_0(n)$, новые неизвестные постоянные и соотношения вида (12), (13) возникать не будут. Неизвестные постоянные, не получившие значений в ходе вычислений, объявляем *произвольными постоянными*, входящими в лораново решение дифференциального уравнения.

Если задано усеченное уравнение $L(y) = 0$ с условием, что свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ не равен нулю, то (11), очевидно, не зависит от продолжения.

3. Регулярные решения

3.1. *Степенные множители*

Определение 3. Решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, имеющее вид

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} g_{k-s}(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \tag{14}$$

где $\lambda \in K$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $g_s(x) \in K((x))$, $s = 0, 1, \dots, k$, будем называть *регулярным решением.* Мы говорим, что x^λ — *степенной множитель* решения (14). Набор

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_\rho} \tag{15}$$

называется *полным* набором степенных множителей регулярных решений уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, если

– среди $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ нет различающихся на целое число,

– каждый элемент набора (15) является степенным множителем для некоторого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$,

– для каждого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ среди (15) найдется степенной множитель для этого решения.

Пусть $\mathcal{L}$ имеет вид (5). Известно (см. [3], [4]), что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ — множество всех таких корней определяющего полинома (11), что $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ для $i \neq j$, то (15) будет полным набором степенных множителей регулярных решений $\mathcal{L}(y) = 0$. Более того, для каждого степенного множителя x^λ значение k в (14) такого, что $g_0(x) \neq 0$, меньше количества (с учетом кратности) корней определяющего полинома, отличающихся от λ на целое число.

Замечание 1. Для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ существует столько линейно независимых решений вида (14), сколько корней λ (с учетом кратности) имеет его определяющий полином. Эти решения образуют базис линейного пространства регулярных решений, т.е. любая линейная комбинация решений вида (14) называется регулярным решением, но вплоть до разд. 6 мы будем называть регулярными решениями выражения вида (14).

Пример 1. Регулярные решения уравнения

$$\left(-1 + x + \sum_{j=3}^{\infty} x^j\right)\theta^2\, y(x) + \left(-1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2} x^j\right)\theta\, y(x) + \\ + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + \sum_{j=3}^{\infty} j x^j\right) y(x) = 0$$

имеют вид $y(x) = \sqrt{x}\,(g_0(x)\ln x + g_1(x))$, при этом

$$g_0(x) = C_1 + \frac{C_1}{5}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} g_{0,n}\, x^n,$$

$$g_1(x) = -\frac{2C_1}{x^2} + \frac{8C_1}{x} + C_2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_{1,n}\, x^n,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Замечание 2. В [15]-[17] рассматривалось алгоритмическое представление бесконечных рядов: ряд $\sum a_n x^n$ задавался алгоритмом, определяющим a_n по n. Было обнаружено, что в случае дифференциального уравнения с коэффициентами-рядами, заданными алгоритмически, разрешимой оказывается, в частности, задача нахождения регулярных решений, т.е. задача построения алгоритмов для представления $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots,$ $g_k(x)$ (см. также [14], где обсуждались не только отдельные скалярные уравнения, но и системы). Поскольку коэффициенты уравнения из примера 1 заданы алгоритмически, то $g_{0,n}$, $g_{1,n}$ можно вычислить для любого n.

Исходя из усеченного уравнения $L(y) = 0$ мы не можем рассчитывать на получение его регулярных решений в завершенном (полном) виде (14). Предлагаемый в настоящей статье алгоритм позволяет получить для решений выражения с усеченными лорановыми рядами $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)$. В основе построения этих усеченных рядов лежит тот же принцип отбора валюаций и степеней усечения, что и при построении лорановых решений (п. 2.2).

3.2. *Общая схема поиска регулярных решений (подход Хеффтера)*

Пусть $\mathcal{L}$ имеет вид (5). Для $k = 0, 1, \ldots, r$ можно построить операторы

$$\mathcal{L}_k = \sum_{i=k}^{r} a_i(x)\binom{i}{k}\theta^{i-k}, \tag{16}$$

где $\binom{i}{k}$ — биномиальный коэффициент, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Основанная на подходе Хеффтера [5] общая схема поиска регулярных решений с $\lambda = 0$, состоит в рассмотрении для $k = 0, 1, \dots$ систем вида

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_0(g_0) = 0, \\ \mathcal{L}_0(g_1) = -\mathcal{L}_1(g_0), \\ \mathcal{L}_0(g_2) = -\big(\mathcal{L}_1(g_1) + \mathcal{L}_2(g_0)\big), \\ \dots \\ \mathcal{L}_0(g_k) = -\big(\mathcal{L}_1(g_{k-1}) + \dots + \mathcal{L}_k(g_0)\big) \end{gathered} \tag{17}$$

(при $k = 0$ система состоит из одного уравнения $\mathcal{L}(g_0) = 0$). Лорановым решением системы (17) будем называть каждое такое решение $(g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$, компоненты которого принадлежат $K((x))$.

Предложение 1. (см. [5]) Множество целых неотрицательных k, для которых система (17) имеет лораново решение $(g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$, $g_0(x) \neq 0$, конечно (такого рода решение может существовать при некотором $k > 0$, если только решение существует и при $k - 1$). Если это множество пусто, то $\mathcal{L}(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x))[\ln x]$. Если же это множество не пусто и $\tilde{k}$ — его максимальный элемент, то любое принадлежащее $K((x))[\ln x]$ решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\tilde{k}} g_{\tilde{k}-s}(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \tag{18}$$

где

$$(g_0(x), g_1(x), \dots, g_{\tilde{k}}(x)), \quad g_0(x) \neq 0, \tag{19}$$

является лорановым решением системы (17) при $k = \tilde{k}$. В то же время, любое лораново решение вида (19) системы (17) при $k = \tilde{k}$ порождает решение (18) уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

Если значение λ известно, то подстановка

$$y(x) = x^\lambda w(x), \tag{20}$$

сводит поиск регулярных решений к поиску решений, принадлежащих $K((x))[\ln x]$. На роль λ берутся корни определяющего полинома.

Получаем следующую схему (рассмотренную подробно в [14]).

1. Для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ с оператором (5) найти определяющий полином (11). Считая два корня $\lambda, \lambda' \in K$ этого полинома эквивалентными при $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$, построить множество Λ, содержащее по одному представителю от каждого класса эквивалентности.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$, найти регулярные решения, имеющие степенной множитель x^λ:

   (а) Построить уравнение $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$ с помощью подстановки (20) в $\mathcal{L}(y) = 0$ и последующего умножения на $x^{-\lambda}$.

   (б) Построить лорановы решения систем (17) при $k = 0, 1, \dots$, где $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{\lambda,k}$ получены по формуле (16), до $k = \tilde{k} + 1$, когда (17) уже не имеет таких лорановых решений, что $g_0(x) \neq 0$. Это дает $\tilde{k} + 1$ регулярных решений $y(x)$ в виде (18) для уравнения $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$.

   (в) Домножить полученные регулярные решения на x^λ.

Замечание 3. На шаге 2 вместо подстановки в дифференциальное уравнение может быть выполнена эквивалентная ей операция над индуцированным рекуррентным уравнением. Если (8) — индуцированное рекуррентное уравнение для исходного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, то индуцированное рекуррентное уравнение для $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$ имеет вид

$$u_0(n+\lambda)c_n + u_{-1}(n+\lambda)c_{n-1} + \cdots = 0.$$

Подробности см., например, в [14].

3.3. *Работа с неоднородными уравнениями*

Для уравнения

$$L_0(g_k) = -\sum_{j=1}^{k} L_j(g_{k-j}), \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

введем обозначение S_k (уравнение $L_0(g_0) = 0$ обозначается посредством S_0).

Пусть построено лораново решение $g_0(x)$ уравнения S_0, т.е. уравнения $L_0(g_0) = 0$ (см. п. 2.3). Это решение содержит несколько неизвестных постоянных. Мы используем $g_0(x)$ для получения правой части уравнения S_1, т.е. уравнения $L_0(g_1) = -L_1(g_0)$, и упомянутые неизвестные постоянные входят в эту правую часть линейно. Как только при построении $g_1(x)$ возникает соотношение (13) (его правая часть b_n линейно зависит от постоянных, входящих в $g_0(x)$), это соотношение используется, если это возможно, для вычисления значения некоторой неизвестной постоянной. Если оказывается, что $g_0(x) = 0$, то это означает, что $\tilde{k} = 0$, построение регулярных решений завершается.

Продолжаем для очередного уравнения S_k строить $g_k(x)$, вычисляя значения неизвестных постоянных, входящих в $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots, g_{k-1}(x)$, до тех пор, пока $g_0(x) \neq 0$. Согласно предложению 1, этот процесс заканчивается. Неизвестные постоянные из $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots$, $g_{\tilde{k}}(x)$, не получившие значений, объявляем произвольными постоянными.

Замечание 4. Для лоранова решения его m-усечение строится с помощью индуцированного рекуррентного уравнения для значений n, не превосходящих m. При построении m-усечения лоранова решения $g_k(x)$ уравнения S_k необходимо знать элементы последовательности (b_n) — правой части индуцированного рекуррентного уравнения (10) — до $n = m$. Нетрудно показать, что для этого достаточно построить m-усечения $g_0(x)$, $g_1(x), \ldots, g_{k-1}(x)$.

4. Схема Хеффтера для усеченных коэффициентов

4.1. *Построение лорановых решений усеченного уравнения*

Алгоритм из [1] строит для уравнения (4) конечный набор m_i-усечений лорановых решений. Любой элемент $c_{v_i}x^{v_i} + c_{v_i+1}x^{v_i+1} + \cdots + c_{m_i}x^{m_i} + O(x^{m_i+1})$ этого набора не содержит литералов, т.е. незаданных коэффициентов уравнения (4). Каждый коэффициент c_n вычислялся, как описано в п. 2.3, последовательно по n, начиная с n_j, где n_j — целый корень определяющего полинома, до такого значения $n = m_i$, что значение c_{m_i} не зависит от литералов, а c_{m_i+1} — зависит. При поиске регулярных решений, лорановы решения однородного уравнения S_0 (и неоднородного S_k, $k > 0$) предпочтительно построить в виде одного выражения:

$$c_v x^v + c_{v+1}x^{v+1} + \cdots + c_m x^m + O(x^{m+1}), \tag{21}$$

где $v = \min v_i$, $m = \max m_i$. Здесь коэффициенты c_n могут содержать литералы.

Представление в виде одного усечения с привлечением литералов позволяет, если нужно, перейти к представлению решения в виде набора усечений такого, как в [1]. Для того, чтобы получить такое представление решения, необходимо для каждой валюации мv_i вычислить значения произвольных постоянных при которых равны нулю c_v, $c_{v+1}, \dots$, c_{v_i-1}, после подстановки этих значений в (21) отбросить все члены, коэффициенты которых содержат литералы. Это и даст m_i-усечение для валюации v_i, инвариантное относительно продолжения исходного уравнения.

Построение выражения (21) выполняется, как описано в п. 2.3, последовательно по n, начиная с $v = \min n_j$ до $w = \max n_j$, где в роли n_j выступают все целые корни определяющего полинома (для $k > 0$ нетрудно показать, что $\operatorname{val} b(x) \geq v$, где $b(x)$ — правая часть неоднородного уравнения S_k). В ходе вычислений, при $n = n_j$ таком, что $u_0(n_j) = 0$, возникает необходимость рассмотреть соотношение (12) (соответственно, (13) для $k > 0$). Если это соотношение при $n = n_j$ не является тождеством, то в отличие от случая полностью заданного уравнения, если (12), (13) зависит от литералов, мы его не используем для вычисления значений неизвестных постоянных. В конце получаем значения c_v, $c_{v+1}, \dots$, c_w, набор неизвестных постоянных и набор соотношений для неизвестных постоянных, содержащих литералы. Исходя из этого набора соотношений, мы находим значения неизвестных постоянных, инвариантные относительно всех продолжений заданного усеченного уравнения (например, как описано в замечании 5).

Далее вычисляем значения c_n, пока существуют такой нетривиальный набор значений оставшихся неизвестных постоянных (т.е. не все постоянные равны нулю; можно ограничиться рассмотрением таких наборов, в каждом из которых один какой-то элемент равен единице, а остальные — нулю), при которых c_n не зависит от литералов.

Замечание 5. Рассмотрим набор соотношений (12) и (13), возникающих при построении лорановых решений однородного и неоднородных уравнений в схеме Хеффтера для усеченного уравнения. Левая и правая часть такого соотношения являются полиномами от литералов, коэффициенты которых — линейные комбинации над K неизвестных постоянных, введенных при решении уравнений S_0, $S_1, \dots$, S_k. Приравниваем коэффициенты в правой и левой части при одинаковых мономах. Получаем линейную однородную систему относительно неизвестных постоянных. При решении этой системы часть неизвестных постоянных получит значения, часть — останется неизвестными.

Пример 2. Проследим работу предложенного алгоритма на примере оператора

$$L = (-1 + x + x^2)\,\theta^2 - 2\,\theta + (x + 6x^2),\ t_0 = 3,\ t_1 = t_2 = 2. \tag{22}$$

Этот оператор был рассмотрен в [1, пример 2]. Здесь определяющий полином — это $u_0(n) = -n^2 - 2n$, множество $\{-2, 0\}$ его целых корней содержит все возможные валюации лорановых решений уравнения $L(y) = 0$. Вычисления с помощью индуцированного рекуррентного уравнения начинаем с минимального целого корня определяющего полинома, т.е. с $n = -2$. В конце вычислений получаем 4-усечение лоранова решения, записанное с помощью литералов:

$$\begin{gathered}
\frac{C_1}{x^2} - \frac{5C_1}{x} + C_2 + x\left(\frac{4}{3}C_1U_{2,3} + \frac{1}{3}C_2 - \frac{35}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_1U_{1,3}\right) + \\
+x^2\left(\frac{11}{24}C_1U_{1,3} - \frac{7}{24}C_1U_{2,3} + \frac{5}{6}C_2 - \frac{35}{12}C_1 + \frac{1}{8}C_1U_{0,4} - \frac{1}{4}C_1U_{1,4} + \frac{1}{2}C_1U_{2,4}\right) + \\
+x^3\left(-\frac{77}{12}C_1 - \frac{19}{120}C_1U_{1,3} + \frac{21}{40}C_1U_{2,3} + \frac{13}{30}C_2 + \frac{1}{15}C_1U_{0,5} - \frac{7}{24}C_1U_{0,4} + \right. \\
\left. + \frac{1}{4}C_1U_{1,4}\frac{1}{6}C_1U_{2,4} - \frac{2}{15}C_1U_{1,5} + \frac{4}{15}C_1U_{2,5}\right) +
\end{gathered} \tag{23}$$

$$+x^4\left(\frac{1}{18}C_1U_{2,3}^2-\frac{35}{9}C_1-\frac{13}{36}C_1U_{1,3}-\frac{7}{18}C_1U_{2,3}+\frac{19}{36}C_2-\frac{13}{72}C_1U_{0,5}-\frac{5}{72}C_1U_{0,4}+\right.$$
$$+\frac{5}{36}C_1U_{2,4}+\frac{11}{72}C_1U_{1,5}-\frac{7}{72}C_1U_{2,5}+\frac{1}{36}U_{1,3}C_1U_{2,3}+\frac{1}{72}C_2U_{1,3}-\frac{1}{36}C_1U_{1,3}^2-\frac{1}{12}C_1U_{1,6}+$$
$$\left.+\frac{1}{72}C_2U_{2,3}+\frac{1}{24}C_2U_{0,4}+\frac{1}{24}C_1U_{0,6}+\frac{1}{6}C_1U_{2,6}\right)+O(x^5).$$

Здесь и далее обозначенный посредством $U_{i,j}$ литерал соответствует незаданному коэффициенту при x^j в коэффициенте исходного уравнения при θ^i. C_1, C_2 — произвольные постоянные. Вычисления выполнены до степени 4. Интересующее нас множество решений можно описать короче, отбросив в (23) член степени 4 и заменив $O(x^5)$ на $O(x^4)$. Мы выписали этот член, чтобы была видна причина остановки вычислений.

От (23) переходим к представлению в виде набора инвариантных усечений для каждой из валюаций. Для валюации $v_1=-2$ (т.е. при $C_1\neq 0$ и $C_2\neq 0$) отбрасывание членов, начиная с первого, коэффициент которого содержит литералы, дает $m_1=0$:

$$\frac{C_1}{x^2}-\frac{5C_1}{x}+C_2+O(x).$$

Для валюации $v_2=0$ (т.е. при $C_1=0$ и $C_2\neq 0$) такое отбрасывание дает $m_2=3$:

$$C_2+\frac{1}{3}C_2x+\frac{5}{6}C_2x^2+\frac{13}{30}C_2x^3+O(x^4).$$

Эти инвариантные усечения были получены и в [1, пример 2]. Представление (23) позволяет также получить продолжение усечения для каждой отдельной валюации. Для валюации $v_1=-2$ оно совпадает с (23). Для $v_2=0$ оно равно

$$C_2+\frac{1}{3}C_2x+\frac{5}{6}C_2x^2+\frac{13}{30}C_2x^3+x^4\left(\frac{19}{36}C_2+\frac{1}{72}C_2U_{1,3}+\frac{1}{72}C_2U_{2,3}+\frac{1}{24}C_2U_{0,4}\right)+O(x^5).$$

4.2. *Алгоритм*

Для уравнения $L(y)=0$ с коэффициентами (3) строится определяющий полином как коэффициент $u_0(n)$ индуцированного рекуррентного уравнения. Находится множество его корней и формируется множество Λ. Эти вычисления соответствует шагу 1 схемы Хеффтера (п. 3.2).

Для каждого нецелого $\lambda\in\Lambda$, выполняем шаг 2(a), т.е. получаем уравнение L_λ. На шаге 2(б) решение системы (17) при очередном значении k состоит в поиске усечения лоранова решения уравнения S_k (при этом, возможно, также вычисляются значения некоторых неизвестных постоянных, вошедших в $g_0(x)$, $g_1(x),\ldots,$ $g_{k-1}(x)$). Это усечение содержит литералы, степень усечения определяется, как описано в п. 4.1. Усечение лоранового решения S_k выстраивается последовательно с помощью индуцированного рекуррентного уравнения (8) (или (10) для $k>0$). При $k>0$ для получения правой части индуцированного рекуррентного уравнения требуется последовательное вычисление коэффициентов ряда Лорана в правой части уравнения S_k. Поиск лорановых решений завершается либо в том случае, если k равно количеству (с учетом кратности) целых корней определяющего полинома для S_0, либо, когда обнаруживается, что очередная система не имеет лоранова решения с $g_0(x)\neq 0$. На основе полученных усечений лорановых решений с литералами формируется итоговый набор инвариантных усечений регулярных решений исходного уравнения.

Предложение 2. Каждый из тех отрезков рядов, которые находит предложенный алгоритм в качестве усечения того или иного ряда $g_i(x)$ в решении (14) исходного усеченного уравнения $L(y) = 0$, имеет максимально возможную длину: добавление членов большей степени к любому из этих отрезков влечет потерю инвариантности относительно возможных продолжений уравнения $L(y) = 0$.

Доказательство. Каждый из этих отрезков рядов выстраивается так, что остановка происходит в момент, когда следующий член $w_s x^s$ ряда имеет коэффициент w_s, зависящий от каких-то литералов. Такой коэффициент будет полиномом над K от конечного числа литералов. Так как характеристика поля K равна нулю, то само поле K бесконечно (оно содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел), и для упомянутого полинома можно найти два разных набора значений входящих в него литералов, таких, что значения полинома w_s на этих наборах не совпадают. Это означает, что уравнение $L(y) = 0$ имеет два продолжения, которые приводят к разным w_s. В самом деле, в качестве первого продолжения берем такое, где литералы, попавшие в w_s, заменяются значениями из первого набора, а остальные члены продолжения полагаются равными нулю. Аналогичным образом, но с использованием значений из второго набора, строим второе продолжение. Следовательно, отрезок ряда, входящий в решение и содержащий член $w_s x^s$, не является инвариантным относительно всех возможных продолжений уравнения $L(y) = 0$.

5. Примеры

Пример 3. Проследим шаги предложенного алгоритма на примере оператора

$$L = (-1 + x + x^2)\,\theta^2 - 2\,\theta, \quad t_0 = 3,\; t_1 = 1, t_2 = 2. \tag{24}$$

Определяющий полином — $u_0(n) = -n^2 - 2n$. Исходя из множества его корней $\{-2, 0\}$, получаем $\Lambda = \{0\}$. Поиск лоранова решения для S_0, как описано в п. 4.1, дает

$$g_0(x) = C_{0,1} + \frac{1}{24} x^4 C_{0,1} U_{0,4} + O(x^5), \tag{25}$$

где $C_{0,1}$ — неизвестная постоянная. Далее, для S_1 получаем 4-усечение правой части уравнения:

$$2C_{0,1} + \frac{5}{12} x^4 C_{0,1} U_{0,4} + O(x^5).$$

Индуцированное рекуррентное уравнение (10) при $n = 0$ здесь имеет вид

$$-2C_{1,1}U_{1,2} = 2C_{0,1},$$

где $C_{1,1}$ — неизвестная постоянная, возникшая при $n = -2$ и соответствующая коэффициенту c_{-2} решения. Это соотношение — вида (13), которое мы не можем использовать для вычисления значений неизвестных постоянных $C_{1,1}$, $C_{0,1}$, поскольку в это соотношение входит литерал $U_{1,2}$. Для тех продолжений оператора (24), для которых $U_{1,2} = 0$, получим, что $C_{0,1} = 0$, $C_{1,1}$ остается неизвестной постоянной. При этом $g_0(x) = 0$, т.е. $\tilde{k} = 0$. Для продолжений с $U_{1,2} \neq 0$, вычисления будут продолжены и получено $\tilde{k} = 1$. Полагаем $C_{1,1} = 0$, $C_{0,1} = 0$. Таким образом получаем $\tilde{k} = 0$ и усеченное регулярное решение (25). Перейдем от него к набору инвариантных усечений:

$$C + O(x^4),$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 4. Добавим к коэффициентам оператора (24) одно слагаемое (x^2 в коэффициенте при θ^1):

$$\tilde{L} = (-1 + x + x^2)\,\theta^2 + (-2 + x^2)\,\theta, t_0 = 3,\; t_1 = t_2 = 2. \tag{26}$$

Этот оператор был рассмотрен в [1, пример 3], и было определено, что при любом продолжении коэффициентов у этого оператора, как и у оператора (24), имеется лораново решение $C + O(x^4)$, где C – произвольная постоянная.

Определяющий полином, также как и для оператора (24), $u_0(n) = -n^2 - 2n$ имеет корни $\{-2, 0\}$, и, следовательно, $\Lambda = \{0\}$.

Для S_0 получаем такое же усечение решения (25). Поиск лоранова решения для S_1 дает

$$\begin{aligned}
g_1(x) = &-\frac{C_{0,1}}{x^2} + 4\frac{C_{0,1}}{x} + C_{1,1} + x\left(\frac{2}{3}C_{0,1}U_{1,3} - \frac{4}{3}C_{0,1}U_{2,3}\right) + \\
&+x^2\left(-\frac{5}{12}C_{0,1}U_{1,3} + \frac{1}{3}C_{0,1}U_{2,3} - \frac{1}{8}C_{0,1}U_{0,4} + \frac{1}{4}C_{0,1}U_{1,4} - \frac{1}{2}C_{0,1}U_{2,4} + \frac{1}{8}C_{0,1}\right) + \\
&+x^3\left(\frac{2}{45}C_{0,1}U_{1,3} - \frac{4}{45}C_{0,1}U_{2,3} + \frac{7}{30}C_{0,1}U_{0,4} - \frac{1}{5}C_{0,1}U_{1,4} + \frac{2}{15}C_{0,1}U_{2,4} + \frac{1}{30}C_{0,1} - \frac{1}{15}C_{0,1}U_{0,5} + \right.\\
&\left.+\frac{2}{15}C_{0,1}U_{1,5} - \frac{4}{15}C_{0,1}U_{2,5}\right) + \\
&+x^4\left(-\frac{7}{80}C_{0,1}U_{1,3} + \frac{1}{20}C_{0,1}U_{2,3} + \frac{7}{180}C_{0,1}U_{0,4} + \frac{7}{240}C_{0,1}U_{1,4} - \frac{3}{40}C_{0,1}U_{2,4} + \frac{7}{160}C_{0,1} + \right.\\
&+\frac{17}{120}C_{0,1}U_{0,5} - \frac{7}{60}C_{0,1}U_{1,5} + \frac{1}{15}C_{0,1}U_{2,5} + \frac{1}{36}C_{0,1}U_{1,3}^2 - \frac{1}{36}C_{0,1}U_{1,3}U_{2,3} - \frac{1}{18}C_{0,1}U_{2,3}^2 + \\
&\left.+\frac{1}{24}C_{1,1}U_{0,4} - \frac{1}{24}C_{0,1}U_{0,6} + \frac{1}{12}C_{0,1}U_{1,6} - \frac{1}{6}C_{0,1}U_{2,6}\right) + O(x^5).
\end{aligned} \tag{27}$$

Усечение $g_1(x)$, как и усечение $g_0(x)$, вычислялось до степени x^4, так как для $C_{0,1} = 0$ и $C_{1,1} \neq 0$ только при x^4 вычисленный коэффициент содержит литералы. Для вычисления $g_1(x)$ было построено 4-усечение правой части уравнения S_1:

$$2C_{0,1} - x^2C_{0,1} - x^3C_{0,1}U_{1,3} + x^4\left(\frac{5}{12}C_{0,1}U_{0,4} - C_{0,1}U_{1,4}\right) + O(x^5).$$

Далее поиск лоранова решения уравнения для S_2 не выполняется. Получаем $\tilde{k} = 1$ и регулярное решение $g_1(x) + g_0(x)\ln x$, где $g_0(x)$, $g_1(x)$ определены (25) и (27).

Перейдем к решению в виде набора инвариантных усеченных регулярных решений. Для валюации $v_1 = -2$ в $g_1(x)$ получаем выражение, содержащее два усеченных ряда:

$$-\frac{C_1}{x^2} + 4\frac{C_1}{x} + C_2 + O(x) + (C_1 + O(x^4))\ln x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Положив $C_{0,1} = 0$ и $C_{1,1} \neq 0$ в (25) и (27), получаем усечение

$$C_2 + O(x^4).$$

Это усечение соответствует усечению лоранова решения уравнения S_1 с валюацией $v_2 = 0$.

Замечание 6. Решения $g_k(x), \ldots, g_0(x)$ уравнений $S_k, \ldots, S_0$ могут содержать одни и те же произвольные постоянные, поэтому переход от представления с использованием литералов к инвариантным усечениям производится не отдельно для каждого лоранова решения $g_k(x), \ldots, g_0(x)$, а для всего регулярного решения (18) с множителем x^λ, включающего эти лорановы решения. В данном примере, лораново решение $g_0(x) = C_{0,1} + O(x^4)$ отбрасывается при построении инвариантного усечения $g_1(x)$ с $C_{0,1} = 0$.

6. Программная реализация и примеры использования

Алгоритм реализован в среде Maple [9] в виде процедуры `RegularSolution`. Основные аргументы процедуры аналогичным аргументом представленной в работе [1] процедуры `LaurentSolution`, реализующей алгоритм поиска лорановых решений. Первым аргументом процедуры является дифференциальное уравнение вида (4). Применение θ^k к неизвестной функции $y(x)$ записывается как `theta(y(x),x,k)`. Как и в случае `LaurentSolution` также возможно использование обычного дифференцирования (оператора $D = \frac{d}{dx}$); в этом случае применение оператора D^k к неизвестной функции $y(x)$ задается в стандартном для Maple виде `diff(y(x),x$k)`. Усеченные коэффициенты уравнения имеют вид $a_i(x)+O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ — полином степени не выше t_i над полем алгебраических чисел. Нерациональные алгебраические числа в Maple представляются в виде конструкции `RootOf(p(_Z), index = k)`, где `p(_Z)` — неприводимый полином, k-м корнем которого и является данное алгебраическое число. Например, $\mathrm{RootOf}(\_Z^2-2, index=2) = -\sqrt{2}$.

В качестве второго аргумента процедуры задается неизвестная функция.

Результат работы процедуры — список усеченных регулярных решений, инвариантных относительно продолжений коэффициентов заданного уравнения. В усечениях могут встречаться произвольные постоянные вида $\_c_j$.

Дополнительно может быть указан опциональный параметр `‘output‘=‘literal‘` для получения ответа не в виде списка инвариантных усечений, а в виде одного усечения с литералами. Также возможно указать опциональный параметр `‘degree‘=n`, где `n` — целое число для получения усечения заданной степени (в этом случае к усечениям будут добавлены коэффициенты, выраженные через литералы; степень построенного усечения может быть больше заданного n, будет вычислено по крайней мере столько коэффициентов, сколько требуется для определения всех возможных валюаций лорановых решений, возникающих в ходе вычислений). Отметим, что процедура `LaurentSolution` также дополнена аналогичными опциями.

Далее следуют шесть примеров, которые мы объединяем в один, содержащий пп. 1–6.

Пример 5.

1. Уравнение, заданное оператором (24):

```
> eq1 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+(-2+O(x^2))*theta(y(x),x,1)+
         (O(x^4))*y(x);
```

$$eq1 := \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-2+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq1, y(x));
```

$$\left[\_c_1+O(x^4)\right]$$

Ответ совпадает с полученным в примере 3.

2. Уравнение, заданное оператором (26):

```
> eq2 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+(-2+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
         O(x^4)*y(x);
```

$$eq2 := \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq2, y(x));
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x^2}+\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^4)\right), \_c_2+O(x^4)\right]$$

Ответ совпадает с ответом в примере 4.

Применим процедуру повторно к этому же уравнению с опцией представления результата в литералах, результат — регулярное решение, содержащее усечения вида, построенные, как описано в п. 4.1, т.е. до такой степени, что видна причина остановки вычислений:

```
> RegularSolution(eq2, y(x), 'output'='literal');
```

$$\Big[\ln(x)\left(\_c_1 + \frac{1}{24}x^4\_c_1U_{[0,4]} + O(x^5)\right) - \frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + x\left(\frac{2}{3}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3}\_c_1U_{[2,3]}\right) +$$

$$x^2\left(\frac{1}{4}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{2}\_c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{8}\_c_1U_{[0,4]} + \frac{1}{8}\_c_1\right) +$$

$$x^3\left(\frac{2}{15}\_c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{5}\_c_1U_{[1,4]} + \frac{2}{45}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{45}\_c_1U_{[2,3]} + \frac{2}{15}\_c_1U_{[1,5]} + \frac{7}{30}\_c_1U_{[0,4]} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{30}\_c_1 - \frac{4}{15}\_c_1U_{[2,5]} - \frac{1}{15}\_c_1U_{[0,5]}\right) +$$

$$x^4\left(\frac{1}{24}U_{[0,4]}\_c_2 - \frac{3}{40}\_c_1U_{[2,4]} + \frac{7}{240}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{7}{80}\_c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{20}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{7}{60}\_c_1U_{[1,5]} + \right.$$

$$\frac{7}{180}\_c_1U_{[0,4]} + \frac{7}{160}\_c_1 + \frac{1}{15}\_c_1U_{[2,5]} + \frac{17}{120}\_c_1U_{[0,5]} + \frac{1}{36}\_c_1U_{[1,3]}^2 - \frac{1}{36}U_{[1,3]}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{18}\_c_1U_{[2,3]}^2 -$$

$$\left.\frac{1}{24}\_c_1U_{[0,6]} + \frac{1}{12}\_c_1U_{[1,6]} - \frac{1}{6}\_c_1U_{[2,6]}\right) + O(x^5)\Big]$$

Ответ совпадает с ответом в литералах в примере 4.

Применим процедуру еще раз к этому же уравнению с опцией задания степени усечения:

```
> RegularSolution(eq2, y(x), 'degree'=2);
```

$$\Big[-\frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + x\left(\frac{2}{3}\_c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3}\_c_1U_{[2,3]}\right) + x^2\left(\frac{1}{4}\_c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12}\_c_1U_{[1,3]}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\_c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{8}\_c_1U_{[0,4]} - \frac{1}{2}\_c_1U_{[2,4]} + \frac{1}{8}\_c_1\right) + O(x^3) + \ln(x)\left(\_c_1 + O(x^3)\right),$$

$$\_c_2 + O(x^3)\Big]$$

Ответ показывает, что для получения 2-усечения как продолжения инвариантного усечения необходимо задать $U_{[0,4]}, U_{[1,3]}, U_{[1,4]}, U_{[2,3]}, U_{[2,4]}$, т.е. коэффициенты уравнения при $x^4, x^3\theta, x^4\theta, x^3\theta^2, x^4\theta^2$, соответственно.

3. Уравнение

```
> eq3 := (1+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,3)+(4-x+(1/2)*x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
        (4-2*x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+O(x^3)*y(x);
```

$$eq3 := \left(1 + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 3) + \left(4 - x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) +$$

$$\left(4 - 2x + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + O(x^3)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq3, y(x));
```

$$\left[\frac{\frac{21\_c_1}{16}+\frac{\_c_2}{2}}{x^2}+\frac{\_c_1}{x}+\_c_3+O(x)+\ln(x)\left(\frac{1}{2}\frac{\_c_1}{x^2}+\_c_2+O(x)\right)+\ln(x)^2\left(\frac{1}{2}\_c_1+O(x^3)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\_c_2}{x^2}+\_c_3+O(x)+\ln(x)\left(\_c_2+O(x^3)\right),\_c_3+O(x^3)\right]$$

В данном случае имеем три различных усечения регулярного решения, соответствующие лорановы ряды усечены до разных степеней, логарифм входит до степени 2, т.е. были найдены лорановы решения трех уравнений S_0, S_1, S_2.

4. Усечение уравнения из примера 1:

```
> eq4 := (-1+x+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+(-1-x-(3/2)*x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
        (3/4+(1/4)*x+(3/4)*x^2+O(x^3))*y(x);
```

$$eq4 := \left(-1+x+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)+\left(-1-x-\frac{3}{2}x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x^2+O(x^3)\right)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq4, y(x));
```

$$\left[\sqrt{x}\left(-\frac{2\_c_1}{x^2}+\frac{8\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^3)\right)\right),\sqrt{x}\left(\_c_2+O(x^3)\right)\right]$$

В данном случае получено регулярное решение с нецелым λ в множителе x^λ.

5. Уравнение

```
> eq5 := (1+O(x^2))*theta(y(x),x,3)+(1+2*x+O(x^2))*theta(y(x),x,2)+
        (2+x+O(x^2))*theta(y(x),x,1)+(2-x+O(x^2))*y(x);
```

$$eq5 := \left(1+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,3)+\left(1+2x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,2)+$$

$$\left(2+x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+\left(2-x+O(x^2)\right)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq5, y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x}+O(x)+x^{\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ index=1)}\left(\_c_2-\frac{1}{54}x(20+23\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ index=1))\_c_2\right.\right.$$

$$\left.+O(x^2)\right)+x^{\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ index=2)}\left(\_c_3-\frac{1}{54}x(20+23\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ index=2))\_c_3\right.$$

$$\left.\left.+O(x^2)\right)\right]$$

В данном случае определяющий полином — $u_0(n)=(n+1)(n^2+2)$ — имеет три неэквивалентных корня: $\Lambda=\{-1,\sqrt{-2},-\sqrt{-2}\}$, где $\sqrt{-2}$, $-\sqrt{-2}$ представлены конструкциями $\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ \mathrm{index}=1)$ и $\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2,\ \mathrm{index}=2)$.

6. Уравнение, заданное через оператор дифференцирования D, а не через оператор θ:

```
> eq6 := (-x+x^2+x^3+O(x^4))*(diff(y(x), x, x))+
>        (-3+x+2*x^2+O(x^3))*(diff(y(x), x)) + O(x^3)*y(x)
```

$$eq6 := \left(-x + x^2 + x^3 + O(x^4)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(-3 + x + 2x^2 + O(x^3)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + O(x^3)\,y(x)$$

```
> RegularSolution(eq6, y(x));
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x^2} + \frac{4\_c_1}{x} + \_c_2 + O(x) + \ln(x)\left(\_c_1 + O(x^4)\right), \_c_2 + O(x^4)\right]$$

В результате перехода в уравнении к θ получается уравнение с усечениями коэффициентов, аналогичными уравнению из п.2. Поэтому совпадают и результаты вычислений.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.

2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3(357). С. 31–80.

3. *Frobenius G.* Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1873. V. 76. P. 214–235.

4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: 1958.

5. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.

6. *Tournier E.* Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR Étude théorique et réalisation. Thèse d'État. Université de Grenoble. 1987.

7. *Lutz D.A., Schäfke R.* On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations // Linear Algebra and Its Applications. 1985. V. 72. P. 1–46.

8. *Pflügel E.* DESIR-II. RT 154. IMAG Grenoble. 1996.

9. Maple online help, http://www.maplesoft.com/support/help/

10. *Barkatou M., Pflügel E.* An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations // J. Symbolic Computation. 1999. V. 28. P. 569–587.

11. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems. In: Proc. CASC 2005. Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3718. P. 1–12.

12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. С.В.Фомина. М.: Наука, 1965.

13. *Abramov S., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations. Proc. of ISSAC'95. 1995. P. 290–296.

14. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных дифференциальных систем с коэффициентами в виде степенных рядов // Программирование. 2014. № 2. С. 75–85.

15. *Abramov S., Barkatou M.* Computable infinite power series in the role of coeffcients of linear differential systems. Proc. of CASC'2014. Lecture Notes in Computer Science. 2014. V. 8660. P. 1–12.

16. *Abramov S., Barkatou M., Khmelnov D.* On full rank differential systems with power series coefficients // J. of Symbolic Computation. 2015. V. 68. P. 120–137.

17. *Abramov S., Barkatou M., Pflügel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients. Proc. of CASC'2011. Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6885. P. 10–24.