ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2014, № 2, с. 3–11

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

СЕМИНАР ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ В 2012–2013 г.г.

© 2014 г. С. А. Абрамов*, А. А. Боголюбская, В. А. Ростовцев****

**Вычислительный центр РАН*
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
***Объединенный институт ядерных исследований*
141980 Дубна Московской области
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, abogol@jinr.ru, rost@jinr.ru

Поступила в редакцию 30.06.2013

Годовой отчет о работе научно-исследовательского семинара по компьютерной алгебре.

1. О СЕМИНАРЕ

В семинаре рассматриваются новые результаты в области компьютерной алгебры — символьные алгоритмы и их реализация, соответствующие вопросы системного программирования.

В 2012–2013 учебном году семинар собирался раз в месяц по третьим средам на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, а в мае 2013 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) состоялось традиционное заседание, организованное совместно с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ.

Web–страница семинара `http://www.ccas.ru/sabramov/seminar/doku.php` содержит информацию о планируемых и состоявшихся ранее докладах.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ СОБРАНИЯ СЕМИНАРА

С сентября по апрель были прочитаны следующие доклады[1].

О.Н. Переславцева (ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов; oxana.pereslavtseva@gmail.com) *Вычисление характеристических полиномов плотных матриц: последовательные и параллельные алгоритмы.*

Рассматриваются алгоритмы вычисления характеристических полиномов матриц в коммутативных кольцах. Исследуются два класса алгоритмов – прямые алгоритмы и алгоритмы, основанные на методе гомоморфных образов. Для прямых алгоритмов получены выражения для сложности по числу мультипликативных операций над машинными словами. Эти выражения дают возможность сравнивать исследуемые алгоритмы. Приводится экспериментальное сравнение программ, которые были разработаны по этим алгоритмам. Сопоставляются теоретические и экспериментальные результаты.

Описываются также параллельный алгоритм и программа вычисления характеристических полиномов для целочисленных и полиномиальных матриц. Приводятся результаты экспериментов, проведенных на вычислительном кластере MVS100k Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

С.Ф. Адлай (ВЦ РАН, Москва; semjonadlaj@ gmail.com) *Приложение алгебраического подхода Софуса Ли к исследованию эллиптических функций.*

Шагом на пути к исследованию решений дифференциального уравнения является определение структуры его фиксирующей группы, то есть структуры группы преобразований, переводящих одно решение данного дифференциального уравнения в другое. Такой подход позволяет объединить два традиционных подхода к ис-

[1]Перечень докладов, прочитанных в 1995–2012 г.г., опубликован в [1]–[18].

следованию эллиптических функций, а именно подход Якоби и подход Вейерштрасса. Группы дифференциального уравнения, которому удовлетворяет эллиптический синус Якоби, и, соответственно, дифференциального уравнения, которому удовлетворяет эллиптическая функция Вейерштрасса, оказываются изоморфными четырехэлементной группе Клейна. Это позволяет получить новые результаты, касающиеся эллиптических интегралов и функций.

А.Б. Батхин (ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва; batkhin@gmail.com) *Двоякосимметричные периодические решения системы Гамильтона.*

Рассматривается автономная система Гамильтона с двумя степенями свободы, система канонических уравнений которой t-инвариантна относительно конечной группы преобразований с двумя образующими. Методами компьютерной алгебры исследуется структура матрицы монодромии двоякосимметричного периодического решения системы Гамильтона. Показано, что наименьшее значение индекса устойчивости такого периодического решения равно -1; при этом значении всегда имеется пара периодических решений второго рода по Пуанкаре с удвоенным периодом и с одной симметрией. Полученные результаты применяются к исследованию новых семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла.

А.А. Рябенко (ВЦ РАН, Москва; anna.ryabenko@gmail.com) *Символьное решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.*

Предлагаются компьютерно-алгебраические алгоритмы решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Для неоднородных уравнений даются алгоритмы построения решений в виде рядов с полиномиальными, рациональными, гипергеометрическими коэффициентами и алгоритмы поиска точек, в которых такие решения существуют. Для однородных уравнений описывается модулярно-вероятностный алгоритм поиска m-точек (m — целое, $m \geqslant 2$), то есть точек, в которых существуют решения в виде ряда, только каждый m-й коэффициент которого не равен нулю. Представляются алгоритмы построения в особых точках однородных уравнений формальных экспоненциально-логарифмических решений, содержащих ряды с гипергеометрическими и даламберовыми коэффициентами.

Реализация алгоритмов встроена в систему Maple как пакет Slode.

Е.С. Шемякова (ВЦ РАН, Москва; shemyakova.katya@gmail.com) *Обратимые преобразования Дарбу.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

М.Н. Геворкян (ФМиЕН РУДН, Москва; mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru) *Анализ составных симплектических методов и симплектических методов семейства Рунге-Кутта для протяженных во времени задач.*

При разработке классических численных методов основное внимание уделено уменьшению локальной ошибки вычислений. Однако по мере усложнения решаемых задач возникает необходимость производить вычисления для протяженных во времени процессов. В связи с этим получили развитие геометрические интеграторы, которые учитывают геометрическую структуру решаемой задачи. В случае гамильтоновой механики здесь надо упомянуть симплектические численные методы, каждая итерация которых в точности сохраняет симплектическую структуру уравнений Гамильтона (симплектическую 2-форму). Достоинство таких методов в том, что погрешность вычисления инвариантов системы не растет со временем, а изменяется в очень ограниченных пределах. Благодаря этому свойству симплектические численные методы нашли применение в небесной механике, молекулярной динамике и компьютерной анимации.

Дается краткий обзор симплектических методов. Представлены некоторые теоретические результаты, касающиеся условий симплектичности при композиции раздельного метода Рунге–Кутта с присоединенным. Также описывается составной симплектический метод для ограниченной задачи трех тел, который не сводится к методу типа Рунге–Кутта. Приведены результаты сравнения различных симплектических методов (раздельных методов Рунге–Кутта, методов Рунге–Кутта–Нюстрема, различных составных методов), и дается оценка точности сохранения инвариантов (полной энергии, момента импульса, вектора Лапласа–Рунге–Ленца).

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ, Москва; sergeyabramov@mail.ru), М.А. Баркату (Лиможский университет, Лимож; moulay. barkatou@unilim.fr), Д.Е.Хмельнов (ВЦ РАН, Москва; dennis_khmelnov@mail.ru) *О дифференциальных системах полного ранга с коэффициентами в виде степенных рядов.*

Рассматривается следующая задача: дана система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с коэффициентами в виде формальных степенных рядов, требуется установить, имеет ли система ненулевые решения в виде лорановых рядов, и найти все такие решения, если они существуют (в усеченном виде с сохранением размерности пространства таких решений). Предполагается, что ряды, представляющие собой коэффициенты исходной системы, заданы алгоритмами вычисления коэффициентов; таким образом, мы в общем случае не можем сказать, является ли данный ряд нулевым. Рассматриваемая задача оказывается алгоритмически неразрешимой. Но она разрешима в случае, когда заранее известно, что система имеет полный ранг.

Предлагаемый алгоритм реализован в Maple.

В.В. Галкин (МГУ; galkin-vv@yandex.ru) *Сигнатурные алгоритмы вычисления базисов Гребнера для решения полиномиальных систем.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.А. Гутник (МФТИ, Москва; s.gutnik@inno.mgimo.ru), В.А. Сарычев (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва; vas31@rambler.ru) *Символьно-численные методы исследования динамики спутника-гиростата.*

Статья по теме доклада будет опубликована в следующем номере журнала.

А.А. Михалев (Мех-мат МГУ, Москва; aamikhalev@mail.ru) *ПБВ-пары многообразий линейных алгебр и символьные вычисления в свободных алгебрах.*

Рассматривается понятие ПБВ-пары многообразий линейных алгебр над полем. Если (V, W) — ПБВ-пара многообразий и многообразие V шрайерово, то W — также шрайерово многообразие. Аналогичные результаты справедливы для теоремы о свободе и для проблемы равенства. Если $V(X)$ и $W(X)$ — свободные алгебры с множеством X свободных образующих многообразий V и W соответственно, то алгебра $V(X)$ является универсальной обертывающей алгеброй для алгебры $W(X)$. В случае, когда $V(X)$ — свободная неассоциативная алгебра, это открывает возможность использования алгоритмов символьных вычислений в алгебре $W(X)$ (распознавание автоморфизмов, примитивных элементов, построение нормальных форм элементов и стандартных базисов идеалов). Доклад основан на совместной с И.П.Шестаковым статье.

3. ДВУХДНЕВНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ В ОБЪЕДИНЕННОМ ИНСТИТУТЕ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (ДУБНА)

По установившейся традиции в мае 2013 г. в Дубне прошло совместное заседание семинаров “Компьютерная алгебра” факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН и семинара Лаборатории информационных технологий ОИЯИ. По существу, это была двухдневная конференция по компьютерной алгебре и ее приложениям.

Вниманию участников были предложены следующие выступления.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН, МГУ, Москва; sergeyabramov@mail.ru), М.А.Баркату (Лиможский университет, Лимож; moulay. barkatou@unilim.fr) *О размерности пространств решений линейных дифференциальных систем полного ранга.*

Исследуется изменение размерности пространства решений имеющей полный ранг системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка под действием дифференцирования какого-то одного уравнения системы. На основе этого показывается, как может быть найдена размерность пространства решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющей полный ранг.

М.Д. Малых (РУДН, Москва; malykhmd@ yandex.ru) *Об интегрировании* *дифференциальных уравнений в абелевых функциях.*

Рассматривается поле всех алгебраических интегралов системы, коэффициенты которых являются трансцендентными функциями независимой переменной (“времени”). Показывается, что эти трансцендентные функции могут быть абелевыми функциями или решениями уравнения Риккати. Для первого случая предлагается алгоритм построения алгебраического интеграла системы.

Д.С. Кулябов, А.В. Королькова, Л.А. Севастьянов (ФМиЕН РУДН, Москва; dskulyabov@sci.pfu.edu.ru, akorolkova@sci.pfu.edu.ru, sevast@sci.pfu.edu.ru) *Символьные вычисления с использованием p-адических чисел.*

Обсуждаются перспективы использования арифметических идей в физике. Описывается пакет символьных манипуляций с p-адическими и адельными числами. На данный момент реализованы основные арифметические действия, а также такие функции, как sin, cos, sqrt, log.

С.А. Гутник (МФТИ, Москва; s.gutnik@inno.mgimo.ru) *Символьно-численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата.*

Исследуется динамика вращательного движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и гиростатического моментов. С использованием систем компьютерной алгебры Mathematica 8.0 и Maple получены нелинейные алгебраические уравнения стационарных движений спутника и исследованы их свойства. Найдены бифуркационные значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия. Проведен детальный численный анализ эволюции областей существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров. Рассмотрена взаимосвязь данных областей существования различного числа равновесий с областями существования равновесий в предельных случаях осесимметричного спутника. Численно определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Проведено исследование устойчивости полученных положений равновесия.

А.В. Горбачев, Л.А. Севастьянов, А.В. Зорин (РУДН, Москва; alexarus1986@gmail.com, sevast@sci.pfu.edu.ru, zorin@mx.rudn.ru) *Моделирование спектральных характеристик водородоподобных атомов в операциональной моделе квантовых измерений.*

Предложена реализация в системе Maple явного вида операторов наблюдаемых водородоподобного атома в рамках модели квантовых измерений. Анализ этих операторов позволяет с помощью матрицы Ритца реализовать процедуру для расчета спектра наблюдаемых.

Встроенные в систему Maple функции использовались для построения комплексно-сопряженных функций, решения обобщенной задачи на собственные значения и конечномерной аппроксимации матрицы Ритца с целью оптимизации затрат машинного времени на вычисления. Математический аппарат модели квантовых измерений был вынесен в отдельный программный пакет QDF для Maple. Он включает в себя математическую форму записи правила квантования измеренных наблюдаемых, состояния измерительного прибора и штурмовских функций, произведения сферических гармоник и других необходимых компонент. Проведенные символьные вычисления демонстрируют возможность более детального компьютерного анализа спектра наблюдаемых в рамках модели квантовых измерений.

О.В. Тарасов (ОИЯИ, Дубна; otarasov@jinr.ru) *Maple-пакет для построения обобщенных рекуррентных соотношений для фейнмановских интегралов.*

Предлагается регулярный метод вывода рекуррентных соотношений для фейнмановских интегралов. Обсуждается реализация этого метода в Maple.

А.И. Зобнин (МГУ; Alexey.Zobnin@gmail.com) *О сигнатурных алгоритмах вычисления базисов Гребнера.*

В последнее десятилетие активно развиваются сигнатурные алгоритмы вычисления базисов Гребнера (F5, F5C, G2V, GVW, SGB и другие модификации). В докладе обсуждается матричная версия алгоритма F5 (указывается косвенная связь этого алгоритма с инволютивными идеями). Рассматривается классический алгоритм Бухбергера с точки зрения этой версии. Затем обсуждается предложенный в 2012 г. алгоритм SGB (авторы — Sun, Wang, Ma и Zhang). Этому алгоритму придается “симметричный” вид, для этого стираются границы между старшими мономами и сигнатурами.

В.П. Гердт (ОИЯИ, Дубна; gerdt@jinr.ru), А. Хашеми, Б.М. Ализадех (ИТУ, Исфахан, Иран; amir.hashemi@cc.iut.ac.ir) *О сигнатурной версии инволютивного алгоритма.*

Предлагается сигнатурная версия инволютивного алгоритма, использующая критерий F_5 Фожера для определения бесполезных нулевых редукций. На ряде тестовых примеров сравнивается работа этой версии алгоритма с алгоритмом Гердта-Блинкова.

В.В. Галкин (МГУ; galkin-vv@yandex.ru) *Остановка алгоритма F5.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

Е.С. Шемякова (ВЦ РАН, Москва; shemyakova.katya@gmail.com) *Факторизация преобразований Дарбу произвольного порядка для двумерного оператора Шредингера.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.И. Сердюкова, Ю.М. Шукринов (ОИЯИ, Дубна; sis@jinr.ru, shukrinv@theor.jinr.ru) *Определение критической точки ВАХ системы джозефсоновских переходов. Непериодические граничные условия с $\gamma = 1$.*

Детальное исследование критических значений тока I_b и оценка области их влияния представляет большой интерес для изучения особенностей систем с конечным числом внутренних джозефсоновских переходов. Доказывается, что в случае непериодических граничных условий вычисление вольтамперной характеристики (ВАХ) для системы n внутренних джозефсоновских переходов сводится к решению $[(n + 1)/2]$ нелинейных дифференциальных уравнений вместо n оригинальных. Предлагается улучшенная версия символьно-численного алгоритма нахождения ВАХ для систем джозефсоновских переходов. Преимущества новой версии алгоритма демонстрируются на примере вычисления ВАХ для системы 19 внутренних джозефсоновских переходов. Расчеты были проведены с использованием Reduce 3.8.

С.И. Хашин (Ивановский ГУ, Иваново; khash2@mail.ru) *Методы Рунге-Кутта порядка семь.*

Для нахождения методов Рунге-Кутта (РК) требуется решить систему полиномиальных уравнений Бутчера. Для методов четвертого порядка (восемь уравнений с десятью неизвестными) это решение было получено в XIX веке, для методов пятого порядка (семнадцать уравнений с двадцатью одной неизвестной) – в 70-х годах. Для методов шестого порядка (тридцать семь уравнений с двадцатью восьмью неизвестными) это “почти” сделал Й. Вернер, но результат до сих пор не опубликован. Несколько лет назад автором доклада были численно найдены некоторые методы РК порядка семь и определена локальная размерность соответствующего многообразия, она оказалась равной шести. К настоящему времени удалось найти явные формулы для этих методов.

И.Б. Щенков (ИПМ им. М. В.Келдыша РАН, Москва; IgorShchenkov@rambler.ru) *Наличие средств символьных преобразований в языке компьютерной алгебры помогает расширить сферу решаемых задач.*

Широко распространенные языки компьютерной алгебры напрямую не обеспечивают возможность задания сложной вложенной структуры параметров операторов. Описывается язык Сантра 3, позволяющий использовать такие структуры.

А.А. Рябенко (ВЦ РАН, Москва; anna.ryabenko@gmail.com) *Символьное решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.*

Повторение доклада, сделанного на московском семинаре (см. раздел 2).

М.И. Баранов (МГУ, Москва; mix-baranov@yandex.ru) *Метод локальных уточнений границ валюаций решений линейных разностных систем с полиномиальными коэффициентами.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

А.Б. Арансон (НИИДАР, Москва; aboar@yandex.ru) *Решение нелинейных ОДУ с помощью алгоритмов степенной геометрии.*

Обсуждаются созданные автором программы, реализующие алгоритмы степенной геометрии. Эти алгоритмы и программы позволяют вычислять разложения решений нелинейных ОДУ в степенные ряды и с целыми, и с дробными показателями степени. С помощью рассматриваемых программ вычисляются члены разложений решений системы ОДУ Эйлера-Пуассона, описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой, в ряды Лорана и Лорана-Пюизо с рациональными показателями степени. В результате этих вычислений возникают ограничения на параметры рассматриваемой системы ОДУ. Среди вычисленных ограничений имеются все случаи, при которых найдены общие и частные решения уравнений Эйлера-Пуассона. Также вычислены новые разложения. Предлагаемые программы написаны на языке C++ и на языке системы Maxima.

В.П. Гердт (ОИЯИ, Дубна; gerdt@jinr.ru), А.М. Хведелидзе (МИ, Тбилиси и ОИЯИ, Дубна; akhved@jinr.ru), Ю.Г. Палий (ОИЯИ, Дубна; palii@jinr.ru) *К описанию пространства орбит пары кубитов.*

Рассматривается проблема описания пространства орбит $\mathfrak{P}_+/\mathrm{G}$, где $\mathfrak{P}_+$ — пространство смешанных состояний пары кубитов, а $\mathrm{G} = \mathrm{U}(2)\otimes\mathrm{U}(2)$ — группа локальных унитарных преобразований, в терминах G-инвариантных многочленов. Обсуждаются вычислительные сложности, связанные с выводом системы полиномиальных неравенств, которым должны удовлетворять элементы базиса соответствующего кольца инвариантов.

А.М. Хведелидзе (МИ, Тбилиси и ОИЯИ, Дубна; akhved@jinr.ru) *О пространстве перепутанности 2-х кубитов.*

Пространство перепутанности $\mathcal{E}_{2\times2}$ представляет собой объект, характеризующий всевозможные типы корреляций между двумя кубитами. Математически пространство $\mathcal{E}_{2\times2}$ определяется как пространство орбит группы так называемых локальных преобразований $\mathrm{G} = \mathrm{U}(2)\otimes\mathrm{U}(2)$, действующей сопряжениями на пространстве $\mathfrak{P}_+^{2\times2}$ смешанных состояний 2-х кубитов; $\mathcal{E}_{2\times2} \simeq \mathfrak{P}_+^{2\times2}/\mathrm{G}$. На основе методов классической теории инвариантов дается описание пространства перепутанности $\mathcal{E}_{2\times2}$ в виде уравнений и неравенств для базисных элементов кольца G-инвариантных многочленов, заданных на $\mathfrak{P}_+^{2\times2}$.

Н.Н. Васильев (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург; vasiliev@pdmi.ras.ru) *О базисе идеала нуль-полиномов над кольцом вычетов.*

Хорошо известно, что над кольцом вычетов по простому модулю любой полином, тождественно обращающийся в ноль, делится на полином Фробениуса $x^p - p$. Это означает, что идеал нуль-полиномов по модулю p главный и порожден полиномом Фробениуса. Это не так над кольцом вычетов Z/mZ по составному модулю m. Многие вопросы о строении этого идеала до сих пор остаются открытыми. Рассказывается о его базисе Гребнера и о связи задачи описания этого идеала с задачей полиномиальной аппроксимации функций над кольцом вычетов.

В.В. Корняк (ОИЯИ, Дубна; kornyak@jinr.ru) *Вычисление инвариантных скалярных произведений, ассоциированных с группами перестановок.*

Квантово-механические проблемы можно переформулировать в конструктивной форме в терминах инвариантных подпространств перестановочных представлений конечных групп. При таком подходе квантовые интерференции представляют собой явления, наблюдаемые в этих подпространствах. Эти явления описываются количественно с помощью правила Борна — основного постулата квантовой механики, связывающего математическое описание с экспериментом. Мы предлагаем алгоритм, позволяющий определять структуру разложения перестановочного представления на неприводимые компоненты и вычислять инвариантные скалярные произведения в этих компонентах.

С.В. Мицын, Г.А. Ососков (ОИЯИ, Дубна; svm@jinr.ru, ososkov@jinr.ru) *Метод итеративного определения координат местоположения космического аппарата.*

Предлагается итеративный метод решения обратной задачи по определению неизвестных координат космического аппарата по данным измерений TDOA — разницы по времени прохождения сигналов от нескольких наземных передающих станций, при их ретрансляции известным и неизвестным спутниками и регистрации приемной наземной станцией. Задача решена методом наименьших квадратов (МНК). Минимизация нелинейного функционала МНК выполнялась методом Ньютона — благодаря тому, что удалось получить аналитические выражения для матрицы его вторых производных. Плохая обусловленность этой матрицы потребовала использования вычислений с увеличенной точностью. Результаты вычислительных экспериментов позволили дать оценки точности метода в зависимости от качества измерений временных смещений TDOA и показали его высокую эффективность.

С.В. Мицын, Г.А. Ососков (ОИЯИ, Дубна; svm@jinr.ru, ososkov@jinr.ru) *Двухэтапная кластеризация данных большого объема с применением программы Mathematica.*

Предлагается метод кластеризации данных большого объема в виде последовательной композиции двух алгоритмов: первый строит разбиение входного пространства на области Вороного, а второй кластеризует их. Описывается модель кластеризации данных как областей большой плотности во входном пространстве, при этом показано, что разбиение Вороного и его топология могут быть (а) построены и (б) использованы как упрощенное приближение входного пространства. Система Mathematica используется как удобный и эффективный инструмент для осуществления триангуляции Делоне и соответствующего разбиения Вороного. На этапе (б) применяются известные алгоритмы кластеризации $K-$средних и ближайшего соседа. Приводятся результаты применения двухэтапного алгоритма для кластеризации модельных и реальных данных.

Д. Штефанеску (Бухарестский университет, Румыния; stef@rms.unibuc.ro, doru.stefanescu@fizica.unibuc.ro) *Построение неприводимых многочленов над нормированными полями.*

Предлагается основанный на свойствах многоугольника Ньютона метод построения неприводимых многочленов над полем рациональных функций одной переменной. Метод применяется к многочленам двух переменных, которые не являются обобщенными разностными многочленами. Это позволяет получать информацию о возможной полиномиальной факторизации и строить семейства неприводимых многочленов.

С.И. Виницкий, А.А. Гусев, О. Чулуунбаатар (ОИЯИ, Дубна; vinitsky@thsun1.jinr.ru, gooseff@jinr.ru, chuka@jinr.ru) *Алгоритм для анализа модели квантового туннелирования кластеров через отталкивающие барьеры.*

Рассматривается модель квантового туннелирования кластера, состоящего из тождественных частиц с парными взаимодействиями осцилляторного типа через отталкивающие барьеры в представлении симметризованных координат. Предлагаются реализованные в системе Maple символьно-численные алгоритмы для нахождения эффективных потенциалов в терминах кластерных функций системы связанных дифференциальных уравнений второго порядка и собственных значений энергии барьерных квазистационарных состояний. Обсуждается выявленная немонотонная резонансная зависимость коэффициента прохождения от энергии, от числа частиц и типа симметрии кластерных функций, обусловленная существованием барьерных квазистационарных состояний, погруженных в непрерывный спектр. Наблюдаемые значения коэффициента прохождения близки к единице (т.е. коэффициента отражения – близки к нулю); что при резонансных значениях энергии соответствует эффекту квантовой прозрачности, аналогичному явлению просветления оптики.

А.А. Гусев, С.И. Виницкий, В.А. Ростовцев (ОИЯИ, Дубна; gooseff@jinr.ru, vinitsky@thsun1.jinr.ru, rost@jinr.ru) *Алгоритм построения осцилляторных базисных функций системы тождественных частиц.*

Рассматривается квантовая модель кластера, состоящего из A тождественных частиц с внутренними парными взаимодействиями во внешнем поле мишени. Предлагается реализованный в системе Maple символьный алгоритм построения в симметризованных координатах собственных функций $(A-1)$-мерного осциллятора, симметричных или антисимметричных относительно перестановок A частиц. Даются примеры построения симметричных и антисимметричных функций составной системы из нескольких тождественных частиц в одномерном евклидовом пространстве. Выполнен анализ свойств симметрии решений. Подход ориентирован на решение задачи туннелирования кластеров, состоящих из нескольких тождественных частиц, через отталкивающие барьеры мишени.

В.С. Рихвицкий (ОИЯИ, Дубна; rqvtsk@mail.ru) *Тензорные вычисления с некоммутативными коэффициентами средствами коммутативной компьютерной алгебры.*

Формулы тензорных вычислений в ОТО со спинорными полями отличаются использованием в коэффициентах некоммутативной алгебры. Пакет DifferentialGeomery в системе Maple вместе с общими средствами преобразований формул, в частности — упрощения (simplify), использует коммутативную алгебру.

Обсуждаются два решения проблемы. Первое — перейти к символическим матричным представлениям некоммутирующих членов в исходных формулах, затем преобразовать формулы подстановками, заданными пользователем, и общими, необходимыми при упрощении формул, и осуществить обратный переход в результирующих формулах. Второе — придать символическим матричным представлениям реальные значения, выполнить все обычные вычисления, разложить в соответствующем матричном базисе полученный результат и заменить в нем базисные матрицы на их символьное представление.

Б. Саха (ОИЯИ, Дубна; bijan64@mail.ru) *Анизотропная модель темной энергии с переменным параметром уравнения состояния.*

Исследуются уравнения, возникающие в анизотропной модели Вселенной, заполненной идеальной жидкостью и темной энергией. Описываются качественные картины различных этапов эволюции Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Семинар по компьютерной алгебре на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1995–1996 г. // Программирование, 1997, № 1. С. 75–77.
2. *Абрамов С.А., Зима Е.В.* Научно-исследовательский семинар “Компьютерная алгебра” в 1996–1997 г. // Программирование, 1998, № 1. С. 69–72.
3. *Абрамов С.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1997–1998 г. // Программирование, 1998, № 6. С. 3–7.
4. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1998–1999 г. // Программирование, 2000, № 1. С. 8–12.
5. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1999–2000 г. // Программирование, 2001, № 1. С. 3–7.
6. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2000–2001 г. // Программирование, 2002, № 2. С. 6–9.
7. *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2001–2002 г. // Программирование, 2003, № 2. С. 3–7.
8. *Абрамов С.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2002–2003 г. // Программирование, 2004, № 2. С. 3–7.
9. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2003–2004 г. // Программирование, 2005, № 2. С. 3–9.
10. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2004–2005 г. // Программирование, 2006, № 2. С. 3–7.
11. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2005–2006 г. // Программирование, 2007, № 2. С. 3–8.
12. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2006–2007 г. // Программирование, 2008, № 2. С. 3–8.
13. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2007–2008 г. // Программирование, 2009, № 2. С. 3–9.

14. “Mathematical Modeling and Computational Physics (CAAP’2009)”. Book of abstracts of the internationl conference. Dubna, July 7–11, 2009. Dubna, 2009.

15. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2008–2009 г. // Программирование, 2010, № 2. С. 3–8.

16. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2009–2010 г. // Программирование, 2011, № 1. С. 3–8.

17. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2010–2011 г. // Программирование, 2012, № 2. С. 3–8.

18. *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2011–2012 г. // Программирование, 2013, № 2. С. 3–10.