ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2014, № 2, с. 75–85

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ *

© 2014 г. С. А. Абрамов, Д. Е. Хмельнов
Вычислительный центр РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, dennis_khmelnov@mail.ru
Поступила в редакцию 17.10.2013

Предлагается алгоритм решения следующей задачи: дана система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, коэффициенты которой являются степенными рядами; выяснить, имеет ли эта система регулярные решения в точке 0 и если да, то найти их. Каждый степенной ряд, являющийся коэффициентом исходной системы, задается с помощью процедуры, вычисляющей коэффициент ряда по индексу этого коэффициента, при этом предполагается известным заранее, что исходная система имеет полный ранг, т.е. уравнения системы независимы. Алгоритм реализован в Maple.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [9] был предложен алгоритм нахождения всех регулярных решений имеющей произвольный порядок линейной дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами (см. также [1, разд. 7.4]). В настоящей статье мы будем основываться на более общих предположениях об исходной дифференциальной системе, считая, что ее коэффициенты являются степенными рядами.

Пусть K — числовое поле: $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Для кольца полиномов и поля рациональных функций от x над K мы в дальнейшем используем обычные обозначения $K[x]$ и $K(x)$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов — через $K((x))$. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ из $K((x))$ его *валюация* $\mathrm{val}_x\, a(x)$ определена равенством

$$\mathrm{val}_x\, a(x) = \min\{i : a_i \neq 0\}, \qquad (1)$$

при этом $\mathrm{val}_x\, 0 = \infty$. Валюация вектора или матрицы с компонентами-рядами, считается равной минимуму валюаций компонент.

Если R — некоторое кольцо (в частности, поле), то $\mathrm{Mat}_m(R)$ обозначает кольцо квадратных матриц порядка m с элементами из R. Через I_m обозначается единичная матрица порядка m. Обозначение M^T используется для матрицы, транспонированной к M.

Нам будет удобно записывать дифференциальные системы с помощью операции $\theta = x\frac{d}{dx}$ вместо обычной операции дифференцирования $\frac{d}{dx}$ (переход от одной формы записи к другой выполняется легко). Будут рассматриваться системы вида

$$A_r(x)\theta^r y + A_{r-1}(x)\theta^{r-1} y + \cdots + A_0(x) y = 0, \qquad (2)$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных функций от x. Относительно

$$A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x) \qquad (3)$$

предполагается, что $A_i(x) \in \mathrm{Mat}_m(K[[x]])$, $i = 0, 1, \ldots, r$, при этом $A_r(x)$ (*ведущая* матрица системы) являются ненулевой. Мы будем иметь дело с системами, уравнения которых независимы над $K((x))[\theta]$, такие системы называются также системами *полного ранга*. Для систем полного ранга будет предложен алгоритм построения их

*Частичная поддержка РФФИ, грант 13-01-00182-а.

регулярных решений, т.е. решений вида

$$y(x) = x^{\lambda} w(x), \tag{4}$$

где $\lambda \in \bar{K}$, $w(x) \in \bar{K}((x))^m[\ln x]$, $\bar{K}$ – алгебраическое замыкание поля K. Каждое такое решение записывается более подробно как

$$x^{\lambda} \sum_{s=0}^{k} g_s(x) \ln^s x, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{N}$ (т.е. k является неотрицательным целым) и $g_s(x) \in \bar{K}((x))^m$, $s = 0, 1, \dots, k$. Если $\min_{s=0}^{k} \operatorname{val}_x g_s(x) = 0$, то λ называется *показателем* решения (4), в противном случае – его *показателем по модулю* 1. Если λ является для регулярного решения $y(x)$ показателем по модулю 1, то мы будем говорить также, что $y(x)$ *допускает множитель* x^{λ} или что x^{λ} – *допустимый множитель* решения $y(x)$. Очевидно, что если x^{λ} – допустимый множитель некоторого ненулевого регулярного решения, то $x^{\lambda'}$ будет допустимым множителем этого же решения если и только если $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$. При переходе в (5) от x^{λ} к $x^{\lambda'}$ поменяются валюации рядов $g_s(x)$.

Набор

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_s} \tag{6}$$

назовем *полным* набором допустимых множителей регулярных решений системы S, если

– среди показателей степени элементов набора (6) нет различающихся на целое число,

– каждый элемент x^{λ_i} набора (6) является допустимым множителем для некоторого ненулевого регулярного решения системы S,

– для каждого ненулевого регулярного решения системы S среди (6) найдется допустимый для этого решения множитель.

Все регулярные решения заданной системы, допускающие один и тот же множитель, образуют линейное пространство над $\mathbb{C}$. Наш алгоритм позволяет находить для данной системы допустимые множители (с точностью до целых слагаемых в показателях степени) и строить базисы соответствующих пространств решений. Чтобы уточнить задачу надо условиться, как задаются бесконечные ряды в исходной системе и в каком виде регулярные решения представлены в выдаваемых алгоритмом результатах. Относительно исходных данных мы будем основываться на достаточно универсальном подходе, считая, что каждый из степенных рядов, являющихся коэффициентами системы, задан алгоритмически: для любого элемента $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ какой-либо матрицы из (3) известен некоторый алгоритм Ξ_a, вычисляющий для $i \in \mathbb{N}$ значение

$$\Xi_a(i) = a_i. \tag{7}$$

Из [5, предл. 2] следует, что при указанном представлении коэффициентов систем алгоритмически неразрешимы как задача проверки независимости уравнений над $K[[x]][\theta]$, так и задача проверки существования решения в $K((x))^m \setminus \{0\}$ (т.е. существования ненулевого *лоранова* решения). При этом легко видеть, что лорановы решения — это простейший вид регулярных решений. Но мы предполагаем известным заранее, что исходная система имеет полный ранг (т.е. что уравнения системы независимы над $K[[x]][\theta]$). Для этого случая в [4] приведен алгоритм построения лорановых решений. Этот алгоритм будет играть существенную роль в дальнейшем, о нем будет сказано в разделе 2.

Здесь добавим, что для дальнейшего несущественно, является ли Ξ_a в (7) настоящим алгоритмом с доступным для нас описанием, или же это некоторая процедура (“черный ящик”), принцип работы которой неясен и скрыт от нас. Алгоритмически представляются не все мыслимые ряды, наш алгоритм работает и с другими рядами. Ниже мы не станем отвлекаться на это обстоятельство и будем говорить об алгоритмическом представлении рядов, но фактическая сторона дела такова, как она только что была обрисована.

Уточним представление регулярных решений, которые выдает алгоритм как результат своей работы. Начнем с введения понятия, важного для дальнейшего. Пусть $l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ и $a(x) \in \bar{K}((x))$. Определим *l-усечение* $a^{\langle l \rangle}(x)$ как результат замены всех коэффициентов ряда $a(x)$ при степенях x, больших или равных l, нулями; если $l = -\infty$, то $a^{\langle l \rangle}(x) = 0$. Таким образом, $a^{\langle l \rangle}(x)$ – это всегда лоранов полином, т.е. элемент кольца $\bar{K}[x, x^{-1}]$. Аналогично, мы будем говорить и о *l-усечении системы*, получающемся из исходной системы путем замены всех входящих в ее коэффициенты рядов на их l-усечения. Обозначим через $W_S(\lambda)$ пространство регулярных решений системы S, допускающих множитель x^λ, и через $W_S^{\langle l\rangle}(\lambda)$ – пространство, получающееся из $W_S(\lambda)$ заменой каждого элемента вида (5) на

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} g_s^{\langle l\rangle}(x) \ln^s x$$

(таким образом, $W_S(\lambda)$ совпадает с $W_S(\lambda+n)$ при любом $n \in \mathbb{Z}$, но это, однако, нельзя гарантировать для $W_S^{\langle l\rangle}(\lambda)$ и $W_S^{\langle l\rangle}(\lambda+n)$). Ввиду конечномерности пространства $W_S(\lambda)$ очевидно, что валюации рядов $g_s(x)$ и $g_s^{\langle l\rangle}(x)$ ограничены снизу. При этом для всех достаточно больших l выполнено $\dim W_S(\lambda) = \dim W_S^{\langle l\rangle}(\lambda)$.

Сформулируем теперь задачу построения регулярных решений, которая решается предлагаемым в статье алгоритмом. Мы назовем ее задачей $\mathbf{P}_R$. Предполагается, что заданы система S вида (2) полного ранга и $d \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{P}_R$: Найти полный набор допустимых множителей ненулевых решений системы S. Определить такое $l_0 \in \mathbb{Z}$, что для каждого x^λ из этого набора $W_S(\lambda) = \dim W_S^{\langle l\rangle}(\lambda)$ при всех $l \geqslant l_0$, и найти базис пространства $W_S^{\langle l_0+d\rangle}(\lambda)$.

Имеет смысл напомнить, что в скалярном случае задача поиска регулярных решений может быть решена с помощью алгоритмов, известных из классической теории дифференциальных уравнений. Алгоритм Г. Фробениуса основан на исследовании корней определяющего уравнения ([2, гл. IV], [16], [19, гл. V]). При этом при построении решения учитываются не только значения корней определяющего уравнения, но и кратность корней, а также наличие корней, отличающихся на целое число. Алгоритм Л. Хеффтера ([17, гл. II, VIII], [19, гл. V]) строит базис (возможно пустой) регулярных решений, допускающих множитель x^λ, не входя при этом в рассмотрение кратности корня λ и вопроса о существовании других корней, отличающихся от λ на целое число. Именно благодаря этому алгоритм Хеффтера оказывается более удобным для обобщения на системы произвольного порядка: алгебраическое уравнение, которое удается построить для дифференциальной системы как некоторый аналог уравнения, называемого в скалярном случае определяющим, может, например, содержать лишние корни, не несущие информации о пространстве решений системы.

В [14] алгоритм Хеффтера был обобщен на случай систем первого порядка $y'(x) = A(x)y(x)$. Обобщение алгоритма Хеффтера для случая систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами было предложено в [9]. Если ведущая матрица исходной дифференциальной системы невырождена, то для систем произвольного порядка может быть использован также алгоритм из [13], основанный на другом подходе. При этом в [14], [13] хотя и предполагается, что коэффициенты являются бесконечными рядами, но способ представления таких рядов не обсуждается (в тех примерах, которые даются в этих публикациях, в качестве коэффициентов выступают, в основном, рациональные функции). В этих работах считается, что для каждого ряда, будь то изначально заданный ряд или ряд, получившийся выполнением каких-то операций над другими рядами, можно проверить, равен ли он нулю.

В нашей статье мы следуем подходу Хеффтера, обобщая его на системы произвольного порядка с коэффициентами-рядами, заданными алгоритмически; в разделе 4 предлагается алгоритм решения задачи $\mathbf{P}_R$, о его реализации в Maple ([20]) рассказывается в разделе 5.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛОРАНОВЫХ РЕШЕНИЙ

2.1. *Усеченные лорановы решения*

Обозначим через V_S пространство лорановых решений системы S и через $V_S^{\langle l\rangle}$, $l \in \mathbb{Z}$, пространство, элементы которого суть l-усечения соответствующих элементов пространства V_S. Алгоритм из [4] позволяет решать задачу, которую мы назовем задачей $\mathbf{P}_L$. Предполагается, что заданы система S вида (2) полного ранга и $d \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{P}_L$: Определить такое $l_0 \in \mathbb{Z}$, что $\dim V_S = \dim V_S^{\langle l\rangle}$ при всех $l \geqslant l_0$, и найти базис пространства $V_S^{\langle l_0+d\rangle}$.

Алгоритм решения задачи $\mathbf{P}_L$ основывается на рассмотрении рекуррентной системы, которой удовлетворяет последовательность коэффициентов любого лоранова решения исходной дифференциальной системы. Об этих рекуррентных системах будет сказано в п. 2.2. Рекуррентные система приводится к “удобному виду” с помощью EG-алгоритма ([3, 6, 7, 1]), точнее – некоторого специального варианта этого алгоритма ([4]). Этот вариант в общих чертах мы обсудим в п. 2.3.

2.2. Последовательность коэффициентов лоранова решения

Будем использовать обозначение E для *оператора сдвига*, применение этого оператора к какой-либо двусторонней последовательности $a(n)$ дает двустороннюю последовательность $b(n) = a(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Преобразование

$$x \to E^{-1},\;\; x^{-1} \to E,\;\; \theta \to n \tag{8}$$

определяет изоморфизм

$$\mathcal{M}:\; \mathcal{D}_m \to \mathcal{E}_m \tag{9}$$

кольца дифференциальных операторов $\mathcal{D}_m = \mathrm{Mat}_m(K((x)))[\theta]$ на кольцо рекуррентных операторов $\mathcal{E}_m = \mathrm{Mat}_m(K[n])((E^{-1}))$ и переводит исходную дифференциальную систему S в индуцированную рекуррентную систему

$$B_0(n)z(n) + B_{-1}(n)E^{-1}z(n) + \cdots = 0, \tag{10}$$

которую также можно записать как

$$B_0(n)z(n) + B_{-1}(n)z(n-1) + \cdots = 0,$$

где

- $z(n) = (z_1(n), \ldots, z_m(n))^T$ – столбец таких неизвестных последовательностей, что $z_i(n) = 0$ при всех отрицательных целых n, для которых значение $|n|$ достаточно велико, $i = 1, 2, \ldots, m$,
- $B_0(n), B_{-1}(n), \dots \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$, каждый элемент любой из этих матриц есть полином степени не выше r,
- $B_0(n)$ — ненулевая матрица (ведущая матрица системы (10)).

Для скалярного случая такое преобразование, дающее рекуррентное соотношение, рассматривалось ранее в [8], [12], [11], для случая систем – в [4].

Получаемая применением $\mathcal{M}$ индуцированная система R имеет полный ранг (т.е. уравнения системы (10) независимы над $K(n)[[E^{-1}]]$), если и только если исходная дифференциальная система S имеет полный ранг ([4]). Система S имеет лораново решение $y(x) = z(\nu)x^{\nu} + z(\nu+1)x^{\nu+1} + \ldots$, если и только если двусторонняя последовательность

$$\ldots, 0, 0, z(\nu), z(\nu+1), \ldots$$

векторных коэффициентов удовлетворяет индуцированной рекуррентной системе R вида (10), т.е. выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&B_0(\nu)z(\nu) = 0,\\
&B_0(\nu+1)z(\nu+1) + B_{-1}(\nu+1)z(\nu) = 0,\\
&B_0(\nu+2)z(\nu+2) + B_{-1}(\nu+2)z(\nu+1) +\\
&\qquad +B_{-2}(\nu+2)z(\nu) = 0,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Если матрица $B_0(n)$ невырождена, то множество корней ее определителя даст конечное надмножество множества валюаций всех лорановых решений системы S. Но во многих случаях эта матрица вырождена, даже когда невырождена ведущая матрица $A_r(x)$ системы S.

2.3. EG-алгоритм

Изложим основную идею предложенного в [4] специального варианта EG-алгоритма (в дальнейшем он будет именоваться просто EG-алгоритмом). Его назначение – переход от системы (10) к рекуррентной системе с невырожденной ведущей матрицей.

Вместе с преобразованием самой индуцированной системы мы будем попутно изменять вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ с неотрицательными целыми компонентами. Первоначально $\gamma = (r, r, \ldots, r)$.

Шаг “редукция + сдвиг” преобразования рекуррентной системы состоит из трех этапов:

(a) Если строки ведущей матрицы линейно зависимы над $K(n)$ с коэффициентами зависимости

$$v_1(n), v_2(n), \ldots, v_m(n) \in K[n], \tag{11}$$

то положить

$$\mu = \max_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ v_j(n) \neq 0}} (\gamma_j + \deg v_j(n)).$$

Выбрать такое i, что

$$0 \leqslant i \leqslant m, \quad v_i(n) \neq 0, \quad \gamma_i + \deg v_i(n) = \mu, \tag{12}$$

и заменить i-е уравнение индуцированной рекуррентной системы линейной комбинацией всех ее уравнений с коэффициентами $v_1(n), v_2(n), \ldots, v_m(n)$. (В итоге i-я строка ведущей матрицы становится нулевой. Этот этап называется *редукцией*.)

(b) Применить оператор E к i-му уравнению системы, получившейся после редукции. (Этот этап называется *сдвигом*.)

(c) Увеличить значение γ_i на $\deg v_i(n)$, т.е. выполнить $\gamma_i := \mu$.

Процесс повторения шагов "редукция + сдвиг" никогда не приведет к появлению уравнения с нулевой левой частью, т.е. к уравнению $0 = 0$, так как уравнения системы предполагаются независимыми над $K(n)[[E^{-1}]]$. В [4] доказана завершимость этого процесса: в некоторый момент строки ведущей матрицы оказываются независимыми над $K(n)$.

Этап редукции может породить множество *линейных ограничений* из-за умножений преобразуемых уравнений на полиномы, имеющие целые корни. Допустим, мы заменяем i-е уравнение системы линейной комбинацией всех ее уравнений с коэффициентами $v_1(n), v_2(n), \ldots, v_m(n)$, и при этом n_0 является корнем $v_i(n)$. Для любого решения $y(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} z(n)x^n$, $\nu \leqslant n_0$, исходной системы должно удовлетворяться линейное ограничение

$$[B_0(n_0)]_{i,*}\ z(n_0) + [B_{-1}(n_0)]_{i,*}\ z(n_0 - 1) + \ldots \\ \cdots + [B_{-n_0+\nu}(n_0)]_{i,*}\ z(\nu) = 0, \tag{13}$$

где использовано обозначение

$$[M]_{i,*}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

для $(1 \times m)$-матрицы, которая совпадает с i-й строкой $(m \times m)$-матрицы M.

Число n_0, входящее в (13), будем называть *индексом* этого линейного ограничения.

Как и в случае систем с полиномиальными коэффициентами ([1, разд. 8.1]), алгоритм преобразования индуцированной рекуррентной системы может быть адаптирован для работы с неоднородными системами. Пусть исходная система, для решения которой используется построение индуцированной рекуррентной системы, имеет вид

$$A_r(x)\theta^r y + A_{r-1}(x)\theta^{r-1} y + \cdots + A_0(x)y = b(x),$$

при этом ее левая часть совпадает с левой частью системы (2), а правая часть представляет собой вектор с компонентами в виде рядов Лорана:

$$b(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} r(n)x^n,$$

где ν — валюация правой части, $r(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, – векторы коэффициентов рядов Лорана. Тогда правая часть соответствующей индуцированной рекуррентной системы будет равна $r(n)$ (для $n < \nu$ полагаем $r(n) = 0$). Компоненты правой части при выполнении шагов "редукция + сдвиг" не покидают своих мест, но участвуют в этапе редукции и к ним применяется оператор E на этапе сдвига. При построении регулярных решений имеющей произвольный порядок линейной дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами ([9]) возникала необходимость решения индуцированных рекуррентных систем, отличающихся друг от друга лишь правой частью, и для того, чтобы EG-алгоритм применялся только один раз для всех таких систем, при его применении использовалась правая часть общего вида, то есть она представлялась в виде вектора $r(n) = (r_1(n), r_2(n), \ldots, r_m(n))^T$, компоненты которого задавались в виде неопределенных функций $r_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Аналогичный прием может быть использован и в рассматриваемом случае. При использовании правой части общего вида, каждая компонента преобразованной правой части представляет собой линейную комбинацию компонент (возможно сдвинутых) исходной правой части. При этом максимальный сдвиг компонент в правой части равен максимальному числу сдвигов одного и того же уравнения в ходе применения EG-алгоритма. Обозначив это число через ξ, получаем выражения для компонент преобразованной правой части

$$\tilde{r}_i(n) = \sum_{j=i}^{m} \sum_{k=0}^{\xi} \alpha_{ijk}(n) r_j(n+k), \qquad (14)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, где $\alpha_{ijk}(n) \in K[n]$ – коэффициенты, соответствующие проведенным преобразованиям в ходе выполнения шагов "редукция + сдвиг" (эти коэффициенты могут быть выражены через коэффициенты (11), получаемые на всех этапах редукции). Таким образом можно использовать одну и ту же преобразованную рекуррентную систему для решения всех систем с одной и той же левой частью, но с различными правыми частями. Для этого требуется подставить компоненты исходной правой части конкретной системы в преобразованную правую часть в виде конкретных значений $r_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Такая разновидность EG-алгоритма понадобится нам в дальнейшем для решения задачи $\mathbf{P}_R$. Возникающие линейные ограничения также будут неоднородными – в (13) появляется правая часть, индексом этого линейного ограничения по-прежнему называется число n_0. Как и в случае систем с полиномиальными коэффициентами ([1, разд. 7.4]), для поиска регулярных решений необходимо использовать линейные ограничения не только с целыми значениями индекса (в этом случае при исключении i-той строки на шаге редукции для вычисления линейных ограничений (13) берутся все, а не только целые, корни коэффициента $v_i(n)$ линейной зависимости (11)). Множество всех полученных индексов будет обозначаться через N.

2.4. *Алгоритм решения задачи* $\mathbf{P}_L$

В основе алгоритма решения сформулированной в п. 2.1 задачи $\mathbf{P}_L$ лежит выполнение описанных в п. 2.3 шагов "редукция + сдвиг". Но система (10), которая должна быть преобразована, бесконечна. Алгоритм не может работать сразу со всеми матрицами B_{-t}, $t = 0, 1, \ldots$, и здесь выручают ленивые вычисления с хранением информации об уже выполненных редукциях и сдвигах. При возникновении необходимости это позволяет вовлекать в вычислительный процесс матрицы B_{-t} со все большими значениями t, не проделывая заново всю выполненную к этому моменту работу над матрицами с меньшими t.

Анализируя корни определителя построенной невырожденной ведущей матрицы и принимая в расчет найденные линейные ограничения, мы можем решить задачу $\mathbf{P}_L$. Пусть e^* и e_* – максимальный и минимальный целые корни этого определителя соответственно (возможно, что $e^* = e_*$). Пусть N_Z – множество всех целых значений из N. Тогда в качестве значения, которое требуется определить в задаче $\mathbf{P}_L$, может быть взято

$$l_0 = \max\left(N_Z \cup \{e^*\}\right). \qquad (15)$$

Если

$$l_1 = l_0 + d + \xi - e_*, \qquad (16)$$

то решение задачи $\mathbf{P}_L$ для исходной однородной системы S совпадает с решением для усеченной системы $S^{\langle l_1 \rangle}$. Подробности см. в [4].

3. ПОИСК РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОДХОДА ХЕФФТЕРА: ОБЩАЯ СХЕМА

Для дальнейшего систему (2) удобно считать записанной как $L(y) = 0$, где L – дифференциальный оператор

$$L = A_r(x)\theta^r + A_{r-1}(x)\theta^{r-1} + \cdots + A_0(x). \qquad (17)$$

Для любого целого $i \geqslant 0$ результат применения L к $g(x)\ln^i(x)/i!$ имеет вид

$$L_{ii}(g)\frac{\ln^i x}{i!} + \cdots + L_{i1}(g)\frac{\ln x}{1!} + L_{i0}(g),$$

где $L_{i0}, L_{i1}, \ldots, L_{ii} \in \mathrm{Mat}_m(K[[x]])[\theta]$ и $L_{00} = L$, $L_{i+j,j} = L_{i0}$ для всех $i, j \geqslant 0$ ([17], [18, разд. 3.2.1]). Примем обозначение $L_i = L_{i0} (= L_{i+j,j}$ для всех $j \geqslant 0)$.

Предложение 1. *При всех* $i \geqslant 0$ *выполняется равенство*

$$L_i = \sum_{k=i}^{r} A_k(x) \binom{k}{i} \theta^{k-i}, \qquad (18)$$

где $\binom{k}{i}$ *– биномиальные коэффициенты.*

Доказательство. Утверждение следует из формулы Лейбница дифференцирования произведения двух функций и равенства

$$\theta^k \frac{\ln^i x}{i!} = \begin{cases} \frac{\ln^{i-k} x}{(i-k)!}, & \text{если} \quad k \leqslant i, \\ 0, & \text{если} \quad k > i. \end{cases}$$

□

Как следствие формулы (18) получаем, что $L_i = 0$ при всех $i > r$.

Общая схема поиска регулярных решений рассматриваемых систем аналогична предложенной в [9] схеме, используемой в алгоритме нахождения всех регулярных решений для имеющей произвольный порядок линейной дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами (см. также [1, разд. 7.4]). Сама эта схема является обобщением алгоритма Хеффтера ([17]) и основана на рассмотрении последовательности систем

$$S_0, S_1, \ldots, \tag{19}$$

где S_k – это система

$$L_0(g_i) = -\sum_{j=1}^{i} L_j(g_{i-j}), \quad i = 0, 1, \ldots, k \tag{20}$$

(при $i = 0$ в (20) имеем $L_0(g_0) = 0$). Мы также будем ссылаться на

$$L_0(g_i) = -\sum_{j=1}^{i} L_j(g_{i-j})$$

для конкретного i как на подсистему $\hat{S}_i$; таким образом, система S_k, принадлежащая последовательности (19), состоит из подсистем

$$\hat{S}_0, \hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_k,$$

и поиск решения системы S_{k+1} сводится к поиску решению подсистемы $\hat{S}_{k+1}$ с учетом ранее найденного решения $(g_0(x)^T, \ldots, g_k(x)^T)^T$ системы S_k. Справедливо утверждение, аналогичное доказанному Хеффтером для скалярного случая:

Теорема 1. *([10, 9]) Множество целых неотрицательных k, для которых система S_k имеет лораново решение*

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \ldots, g_k(x)^T\right)^T, \quad g_0(x) \neq 0,$$

конечно, и если оно пусто, то $L(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x))^m[\ln x]$. Если это множество не пусто и $\tilde{k}$ — его максимальный элемент, то любое принадлежащее $K((x))^m[\ln x]$ решение системы $L(y) = 0$ имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\tilde{k}} g_{\tilde{k}-s}(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \tag{21}$$

где

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \ldots, g_{\tilde{k}}(x)^T\right)^T, \quad g_0(x) \neq 0, \tag{22}$$

является лорановым решением системы $S_{\tilde{k}}$. В то же время, любое лораново решение вида (22) системы $S_{\tilde{k}}$ порождает решение (21) системы $L(y) = 0$.

В [10, 9] эта теорема доказывалась при рассмотрении случая систем с полиномиальными коэффициентами, но в доказательстве вид коэффициентов не использовался; то же самое доказательство проходит для случая коэффициентов-рядов.

Если значение λ известно, то подстановка (4) сводит поиск регулярного решения к поиску решения $w(x) \in K((x))^m[\ln x]$.

В качестве возможных кандидатов на роль λ используются корни определителя невырожденной ведущей матрицы индуцированной системы (после преобразования, описанного в п. 2.3, если изначально ведущая матрица индуцированной рекуррентной системы была вырожденной).

Получаем следующую схему:

1. Для данной системы S вида (2) с оператором (17) построить индуцированную рекуррентную систему и с помощью описанного в п. 2.3 EG-алгоритма преобразовать ее в эквивалентную систему с невырожденной ведущей матрицей $\tilde{B}_0(n)$. Вычислить все корни уравнения $\det \tilde{B}_0(n) = 0$. Считая два корня λ, λ' эквивалентными при $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$, построить множество Λ, содержащее по одному представителю от каждого класса эквивалентности.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$, найти регулярные решения, допускающие множитель x^λ:

   (a) Построить систему $S(\lambda)$ с помощью подстановки (4) и последующего умножения на $x^{-\lambda}$.

(b) Построить лорановы решения для систем, входящих в (19) (до первой не имеющей лорановых решений системы). Это дает регулярные решения $y(x)$ в виде (21) для системы $S(\lambda)$.

4. УТОЧНЕНИЯ СХЕМЫ ХЕФФТЕРА

При фиксированном λ схема из раздела 3 сводит, фактически, задачу нахождения регулярных решений к задаче поиска лорановых решений, алгоритм решения которой известен. Цель этого раздела – проработка деталей и исследование возможности согласованного рассмотрения всех значений λ, принадлежащих Λ. Эта согласованность повышает эффективность алгоритма.

4.1. *Выполняемые подстановки*

Левые части неоднородных систем, решаемых на шаге 2(b) схемы, совпадают между собой и равны левой части системы $S(\lambda)$, получаемой на шаге 2(a) из исходной системы S с помощью подстановки (4) и последующего умножения на $x^{-\lambda}$. Пусть преобразованная EG-алгоритмом из п. 2.3 индуцированная система R для исходной системы S имеет вид

$$\tilde{B}_0(n)z(n) + \tilde{B}_1(n)z(n-1) + \cdots = \tilde{r}(n). \qquad (23)$$

и N – множество индексов n_0 возникающих линейных ограничений. Нетрудно установить, что индуцированная система $R(\lambda)$ для системы $S(\lambda)$ теми же преобразованиями переводится в рекуррентную систему

$$\tilde{B}_0(n+\lambda)z(n) + \tilde{B}_1(n+\lambda)z(n-1) + \cdots = \tilde{r}(n+\lambda). \qquad (24)$$

Соответствующие линейные ограничения и множество индексов $N(\lambda)$ для (24) могут быть получены рассмотрением линейных ограничений, возникших при преобразовании системы R.

Пусть Λ — множество, определенное на шаге 1 схемы из раздела 3. Для любого $\lambda \in \Lambda$ максимальный и минимальный целые корни уравнения

$$\det \tilde{B}_0(n+\lambda) = 0 \qquad (25)$$

обозначим через $e^*(\lambda)$ и $e_*(\lambda)$ соответственно. Если это уравнение не имеет целых корней, то исходная дифференциальная система не имеет регулярных решений, допускающих множитель x^λ при рассматриваемом значении λ. В этом случае множество Λ корректируется удалением из него этого значения (далее считаем, что при любом $\lambda \in \Lambda$ у уравнения (25) имеются целые корни). Для $\lambda \in \Lambda$ положим

$$l_0(\lambda) = \max\left(N_Z(\lambda) \cup \{e^*(\lambda)\}\right),$$

где $N_Z(\lambda)$ содержит все целые индексы из $N(\lambda)$.

Предложение 2. *Пусть Λ — множество, определенное на шаге 1 схемы Хеффтера. Пусть при этом $\Lambda \neq \varnothing$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ уравнение (25) имеет целые корни. Тогда в качестве значения, которое требуется определить в задаче $\mathbf{P}_R$, может быть взято*

$$l_0 = \max_{\lambda \in \Lambda} l_0(\lambda). \qquad (26)$$

Доказательство. Согласно (15), при фиксированном λ для системы $S(\lambda)$ значение $l_0(\lambda)$ может быть взято в качестве l_0, присутствующего в формулировке задачи $\mathbf{P}_L$. При этом все подсистемы $\hat{S}_i(\lambda)$ имеют левые части, совпадающие с левой частью системы $S(\lambda)$. □

4.2. *Неоднородные системы*

Решение $g_0(x)$ подсистемы $\hat{S}_0$, т.е. подсистемы $L_0(g_0) = 0$, содержит произвольные постоянные. Мы используем $g_0(z)$ для вычисления правой части подсистемы $\hat{S}_1$, т.е. подсистемы $L_0(g_1) = -L_1(g_0)$, упомянутые произвольные постоянные входят в эту правую часть линейно. Применяя ту же технику, что и в случае скалярного уравнения с параметризованной правой частью (см., например, [8]), находим вместе с $g_1(x)$ линейные соотношения для постоянных, входящих в $g_0(x)$ и $g_1(x)$. Продолжая этот процесс, мы на каждом шаге для очередной подсистемы $\hat{S}_i$ получаем $g_0(x), \ldots, g_{i-1}(x)$, в которые входят неизвестные постоянные, и линейную алгебраическую систему для этих постоянных. В соответствии с теоремой 1 условие $g_0(x) \neq 0$ гарантирует завершимость этого процесса.

Все эти подсистемы для данного λ имеют одну и ту же левую часть. Поэтому и их индуцированные рекуррентные системы имеют одну и ту же левую часть, но их правые части различны. Для того, чтобы выполнять преобразования индуцированной системы только один раз, эти преобразования применяются к индуцированной системе с правой частью общего вида, как описано в п. 2.3.

Теорема 2. *Пусть ξ — максимальное число сдвигов одного и того же уравнения в ходе применения EG-алгоритма к индуцированной рекуррентной системе, $d \in \mathbb{N}$, и пусть l_0, $e_*(\lambda)$ определены так же, как в предложении 2. Тогда для нахождения (l_0+d)-усечения лоранова решения подсистемы $\hat{S}_k$ все решения $g_j(x)$ предыдущих подсистем $\hat{S}_j$, $j = 0, \ldots, k-1$, достаточно вычислить в виде t_{kj}-усечений с*

$$t_{kj} = l_0 + d + (k-j)\xi. \tag{27}$$

При этом левая часть подсистемы $\hat{S}_k(\lambda)$ может быть взята в виде l_1-усечения с

$$l_1 = \max_{\lambda\in\Lambda}(l_0 + d + \xi - e_*(\lambda)), \tag{28}$$

а левая часть предыдущих подсистем $\hat{S}_j$, $j = 0, \ldots, k-1$, — в виде l_{1kj}-усечения с

$$l_{1kj} = l_1 + (k-j)\xi. \tag{29}$$

Доказательство. Согласно (16), если $l_1(\lambda) = l_0(\lambda)+d+\xi-e_*(\lambda)$, то решение задачи $\mathbf{P}_L$ для исходной однородной системы $S(\lambda)$ совпадает с решением для усеченной системы $S(\lambda)^{\langle l_1(\lambda)\rangle}$. Требуемое (l_0+d)-усечение соответствующего лоранова решения строится с помощью преобразованной индуцированной рекуррентной системы, и для этого используются ее уравнения для значений n от $e_*(\lambda)$ до l_0+d. Соответственно, в случае подсистемы $\hat{S}_k(\lambda)$ для построения (l_0+d)-усечения соответствующего лоранова решения необходимы коэффициенты правой части преобразованной индуцированной рекуррентной системы до степени l_0+d. Компоненты правой части могут содержать до ξ результатов сдвигов компонент правой части исходной системы. Соответственно, усеченную правую часть исходной подсистемы достаточно рассмотреть до степени $l_0+d+\xi$. Отсюда следует, что решение $g_{k-1}(x)$ предыдущей подсистемы $\hat{S}_{k-1}(\lambda)$ достаточно вычислить до степени $l_0+d+\xi$. Увеличив d на ξ и повторив наши рассуждения, получаем, что решение $g_{k-2}(x)$ подсистемы $\hat{S}_{k-2}(\lambda)$ достаточно вычислить до степени $l_0+d+2\xi$. Продолжая, получаем, что решение $g_j(x)$ подсистемы $\hat{S}_j(\lambda)$ достаточно найти в виде t_{kj}-усечения, где $t_{kj} = l_0 + d + (k-j)\xi$. При этом для любого значения $\lambda \in \Lambda$ при поиске (l_0+d)-усечения решения $\hat{S}_k(\lambda)$ можно использовать l_1-усечение $\hat{S}_k(\lambda)$ с $l_1 = \max_{\lambda\in\Lambda} l_1(\lambda)$, и соответственно при поиске необходимых для этого t_{kj}-усечений решений предыдущих подсистем $\hat{S}_j$, $j = 0, \ldots, k-1$, можно использовать l_{1kj}-усечение $\hat{S}_j(\lambda)$ с $l_{1kj} = l_1 + (k-j)\xi$. □

4.3. Алгоритм

Нахождение с помощью EG-алгоритма множества Λ и вычисление для каждого $\lambda \in \Lambda$ значений $e_*(\lambda), e^*(\lambda), l_0(\lambda)$ позволяют определить l_0 по формуле (26). При этом элементы множества Λ являются корнями алгебраических уравнений, и предполагается точное представление этих корней (в Maple — с помощью `RootOf`). В процессе применения EG-алгоритма вычисляется также значение ξ: для каждого из уравнений подсчитывается число его сдвигов, затем берется максимум из этих чисел. Эти вычисления соответствует шагу 1 схемы Хеффтера. Особо отметим, что на этом шаге EG-алгоритм применяется к индуцированной рекуррентной системе с правой частью общего вида, о чем говорилось в п. 2.3.

Дальнейшее применение этой схемы (шаги 2(a), 2(b)) основывается на поиске усеченных лорановых решений для усеченных систем с помощью преобразованных неоднородных индуцированных рекуррентных систем (аналог алгоритма из [4]). Формула (24) позволяет не выполнять все шаги EG-алгоритма повторно для каждой системы. На шаге 2(b) решение очередной системы S_k сводится к поиску (l_0+d)-усечения лоранова решения дополнительной подсистемы $\hat{S}_k$, что в свою очередь требует вычисления t_{kj}-усечений лорановых решений предыдущих подсистем $\hat{S}_j$, $j = 1, \ldots, k-1$. Ранее найденные $t_{k-1,j}$-усечения должны быть “удлинены”, поскольку $t_{k-1,j} < t_{kj}$. Это в свою очередь требует удлинения и усечений соответствующих подсистем. Для того, чтобы коэффициенты усеченных систем содержали нужное число членов, достаточно следовать формулам (27), (28), (29).

5. РЕАЛИЗАЦИЯ

Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры `Maple` в рамках пакета `EG` ([1]). Реализация частично основана на реализации алгоритма поиска регулярных решений линейной дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами ([9]) и на реализации алгоритмов решения задачи $\mathbf{P}_L$ ([4]).

Для заданной дифференциальной системы полного ранга, имеющей коэффициенты в виде рядов Лорана, процедура `RegularSolution` находит решения задачи $\mathbf{P}_R$.

Система $L(y) = 0$ задается оператором L, представленным матрицей

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

операторы L_{ij} при этом рассматриваются как степенные ряды по x с коэффициентами в $K[\theta]$. Порядок каждого такого коэффициента не превосходит порядка системы $L(y) = 0$. При фиксированных индексах i, j оператор L_{ij} задается функцией целого аргумента, например, k, которая вычисляет коэффициент (как полином от θ) при x^k в этом операторе. Эти функции для всех пар индексов i, j могут быть определены процедурами. В простых случаях используются функции `if` или `piecewise` (см. ниже пример 1). Помимо системы, заданной описанным образом, процедура имеет три дополнительных параметра: θ – имя оператора $x\frac{d}{dx}$, x – имя переменной и d — значение, указанное в задаче $\mathbf{P}_R$. Результатом являются (l_0+d)-усечения регулярных решений системы.

Пример 1. *Пусть $m = 3$ и матрица (30) задана суммой двух матриц:*

$$\begin{pmatrix} -x+(1+\theta-\theta^2)x^3 & \theta^3-2\theta-\theta^2x^3 & -1-x-x^2-x^3 \\ -x^3 & \theta^3-2\theta & -1-x^3 \\ -2x^3 & \theta^3-2\theta+\theta^2x & \theta-2-x^3 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=2}^{\infty}(\theta^2-1)x^k & \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\theta^2-1)x^k & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\theta^2-1)x^k & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=2}^{\infty}(\theta^2-1)x^k & \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\theta^2-1)x^k \end{pmatrix}.$$

В Maple эта сумма может быть записана с помощью `piecewise`*:*

```
> L:=Matrix([  [k->piecewise(k=0,0,k=1,-1,k=3,
                              theta, theta^2-1),
   k->piecewise(k=0,theta^3-2*theta,k=3,-1,
                                   theta^2-1),
   k->piecewise(k=0,-1,k=1,-1,k=2,-1,k=3,-1,0)],
  [k->piecewise(k=3,-1,0),   k->piecewise(k=0,
                   theta^3-2*theta, theta^2-1),
   k->piecewise(k=0,-1,k=3,-1,0)],
  [k->piecewise(k=3,-2,0),   k->piecewise(k=0,
      theta^3-2*theta,k=1,theta^2, theta^2-1),
   k->piecewise(k=0,theta-2,k=3,theta^2-2,
                                 theta^2-1)]]):
```

Найдем регулярное решение соответствующей системы для $d = 0$ (для наглядности преобразуем алгебраические числа к радикалам):

```
> convert(RegularSolution(L,theta,x,0),radical);
```

$$[x^{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}x\sqrt{2}c_3 + O(x^2)) + \ln(x)(xc_1 + 2x^2c_1 + O(x^3))$$
$$+xc_2 + O(x^2),$$
$$x^{\sqrt{2}}((\frac{1}{14}\sqrt{2}c_3 - \frac{2}{7}c_3)x + c_3 + O(x^2))$$
$$+\ln(x)(xc_1 - \frac{1}{4}x^2c_1 + O(x^3)) + c_1 + xc_2 + O(x^2),$$
$$x^{\sqrt{2}}(-\frac{1}{2}x\sqrt{2}c_3 + O(x^2)) + \ln(x)(-xc_1 - x^2c_1 + O(x^3))$$
$$-xc_2 + O(x^2)]$$

В данном случае $l_0 = 1$, $\Lambda = \{0, \sqrt{2}\}$.

Эта же система может быть решена, например, для $d = 2$:

```
> convert(RegularSolution(L,theta,x,2),radical);
```

$$x^{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}x\sqrt{2}c_3 + (\frac{1}{7}\sqrt{2}c_3 + \frac{3}{7}c_3)x^2$$
$$+(\frac{97}{112}\sqrt{2}c_3 + \frac{625}{56}c_3)x^3 + O(x^4))$$
$$+\ln(x)(xc_1 + 2x^2c_1 + \frac{51}{8}x^3c_1 + \frac{3743}{63}x^4c_1 + O(x^5))$$
$$+xc_2 + x^2(-c_1 + 2c_2) + x^3(\frac{31}{8}c_1 + \frac{51}{8}c_2) + O(x^4),$$
$$x^{\sqrt{2}}(c_3 + (\frac{1}{14}\sqrt{2}c_3 - \frac{2}{7}c_3)x + (-\frac{37}{28}\sqrt{2}c_3 + \frac{107}{56}c_3)x^2$$
$$+(\frac{143}{48}\sqrt{2}c_3 - \frac{239}{56}c_3)x^3 + O(x^4))$$
$$+\ln(x)(xc_1 - \frac{1}{4}x^2c_1 + \frac{19}{168}x^3c_1 - \frac{1609}{28224}x^4c_1 + O(x^5))$$
$$+c_1+xc_2+x^2(\frac{9}{8}c_1-\frac{1}{4}c_2)+x^3(-\frac{1525}{3528}c_1+\frac{19}{168}c_2)+O(x^4),$$

$$x^{\sqrt{2}}(-\frac{1}{2}x\sqrt{2}c_3 + x^2(\frac{19}{14}\sqrt{2}c_3 - \frac{3}{7}c_3)$$
$$+x^3(\frac{25}{16}\sqrt{2}c_3 - \frac{47}{8}c_3) + O(x^4))$$
$$+\ln(x)(-xc_1 - x^2c_1 + \frac{13}{8}x^3c_1 - \frac{1531}{504}x^4c_1 + O(x^5))$$
$$-xc_2 + x^2(3c_1 - c_2) + x^3(-\frac{23}{8}c_1 + \frac{13}{8}c_2) + O(x^4)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные дифференциальные и разностные системы: EG_δ- и EG_σ- исключения // Программирование. 2013. № 2. С. 51–74.
2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1958.
3. *Abramov S.* EG-eliminations // J. of Difference Equations and Applications.1999. № 5. P. 393–433.
4. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Khmelnov D.E.* On full rank differential systems with power series coefficients // J. of Symbolic Computation. Submitted.
5. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Pflegel E.* Higher-Order Linear Differential Systems with Truncated Coefficients // CASC'2011 Proceedings, 10–24 (2011).
6. *Abramov S., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems // Proc. of ISSAC'01, 2001. P. 1–6.
7. *Abramov S.A., Bronstein M.* Linear algebra for skew-polynomial matrices // Rapport de Recherche INRIA, RR-4420, March 2002, http://www.inria.fr/RRRT/RR-4420.html
8. *Abramov S., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // Proc. of ISSAC'95, 1995. P. 290–295.
9. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems // Proc. of CASC'05, 2005. P. 1–12.
10. *Abramov S.A., Khmelnov D.E.* A note on computing the regular solutions of linear differential systems // Proc. of RWCA'04, 2004, 13–27.
11. *Abramov S., Petkovšek M.* Special power series solutions of linear differential equations // Proc. of FPSAC'96, 1996. P. 1–7.
12. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Mathematics, 1997. P. 1–8.
13. *Barkatou M.A., El Bacha C., Cluzeau T.* Simple forms of higher-order linear differential systems and their applications in computing regular solutions // J. of Symbolic Computation, 46, 2011. P. 633–658.
14. *Barkatou M., Pflügel E.* An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations // J. of Symbolic Computation, 28, 1999. P. 569–587.
15. *Cope F.T.* Formal solutions of irregular differential equations // Am. J. Math., 58, 1936. P. 130–149.
16. *Frobenius G.* Über die Integration der linearen Differentialgleichungen mit veränder Koefficienten // J. für die reine und angewandte Mathematik, 76, 1873. P. 214–235.
17. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Teubner, Leipzig, 1894.
18. *van der Hoeven J.* Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities // J. of Symbolic Computation, 31, 2001. P. 717–743.
19. *Poole E.* Introduction to the Theory of Linear Differential Equations // Dover Publications Inc., New York, 1960.
20. Maple online help // http://www.maplesoft.com/support/help/