ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2025, № 2, с. 83–90

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6; 517.926.4

КОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ КАК ЭЛЕМЕНТЫ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ

© 2025 г.

С. А. Абрамов[a],*, А. А. Рябенко[a],**

[a]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, Россия
**E-mail: sergeyabramov@mail.ru*
***E-mail: anna.ryabenko@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.07.2024 г.
После доработки 28.08.2024 г.
Принята к публикации 12.09.2024 г.

Как для заданной невырожденной числовой вещественной матрицы, в элементах которой после десятичной точки присутствует лишь конечное число цифр, проверить, останется ли эта матрица невырожденной после произвольного дописывания цифр к некоторым (явно заранее указанным) из ее элементов? Выясняется, что эта задача алгоритмически разрешима. Обсуждается компьютерная реализация предлагаемого алгоритмического решения.

Ключевые слова: усеченные числовые матрицы, невырожденность числовых матриц, алгоритм Тарского, алгоритм цилиндрической декомпозиции, компьютерная алгебра

DOI: 10.31857/S0132347425020104, **EDN**: DIOZTB

1. ВВЕДЕНИЕ

В обсуждаемой задаче предполагается, что некоторая вещественная матрица M, представляющая интерес с какой-то точки зрения, полностью не известна. Известна лишь матрица P, элементы которой суть "усеченные" элементы M — начальные цифры элементов M. Элементы матрицы P — это рациональные числа, в записи которых после десятичной точки присутствует лишь конечное количество цифр (если число целое, то после десятичной точки можно при желании записать какое-то конечное количество нулей). Пусть известная нам матрица P невырождена. Можно ли, исходя из этого, сказать, будет ли и матрица M, которую мы не знаем полностью, тоже невырожденной? Ответ не всегда однозначен, и в статье обсуждается алгоритм, который, исходя из P, отвечает на вопрос о невырожденности матрицы при любом дописывании цифр к элементам P. Если никакое добавление (дописывание) цифр не может "повредить" невырожденность матрицы P, эта матрица объявляется строго невырожденной. В этом случае про матрицу M можно определенно утверждать, что она невырождена.

Подобная задача рассматривалась ранее в [1] в предположении, что элементы P суть полиномы от x, которые, в свою очередь, являются усеченными формальными степенными рядами. Усечение выполнено отбрасыванием в элементах M всех членов, степень которых превосходит заданное неотрицательное целое d. Числовой вариант приводит к несколько более сложной задаче, в силу того, например, что арифметические операции над числами в десятичной системе предписывают, например, "переносы в старшие разряды", чего нет при операциях с полиномами и рядами. Последнее обстоятельство (отсутствие переносов) дополнительно сделало возможным в [1] алгоритмическое решение задачи вычисления нескольких первых членов элементов матрицы M^{-1} по первым членам элементов P^{-1} (сами эти элементы матриц суть формальные лорановы ряды и, вообще говоря, содержат члены с отрицательными степенями x). В разделе 7.2 мы показываем, что для строго невырожденных числовых матриц такие вычисления не всегда возможны.

В основу предлагаемых алгоритмов проверки строгой невырожденности числовых матриц положена теорема Тарского [2] о проверке истинности в классе логических формул, содержащих кванторы по всем переменным, принимающим значения в множестве вещественных чисел. В статье [3] обсуждаемый результат Тарского ("теорема") представлен как в названии, так и по существу, именно как алгоритм. В названии статьи самого Тарского [2] первые слова — “A decision method”, т. е. “метод разрешения”. В теореме Тарского именно и утверждается существование метода (алгоритма) вычисления значения данной формулы.

Более поздний алгоритм [4], называемый алгоритмом цилиндрической декомпозиции, обеспечивает переход к бескванторной формуле, принадлежащей некоторому более широкому классу, чем бескванторные формулы Тарского. Тем не менее этот переход упрощает задачу проверки истинности и нередко позволяет в приемлемое время проверять истинность охватываемых теоремой Тарского формул с кванторами. (При этом сложность алгоритма цилиндрической декомпозиции дважды экспоненциальна по длине исходной формулы [5], [6, разд. 3.2.3].) Алгоритм цилиндрической декомпозиции реализован, в частности, в системе Maple. Мы пользуемся этой реализацией в нашей программе (раздел 6).

Предварительный вариант настоящей статьи был представлен как доклад на конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики” (Коломна, 2024), расширенную аннотацию доклада см. в [7]. Невозможность получения усеченного представления числовой матрицы M^{-1} (раздел 7.2) в [7] не обсуждалась.

2. ДОБАВЛЕНИЕ ЦИФР К ЭЛЕМЕНТАМ ЧИСЛОВОЙ МАТРИЦЫ

Пусть известно конечное количество цифр после десятичной точки в каждом элементе вещественной числовой $n \times n$-матрицы P. Количество известных цифр может не совпадать для разных элементов. Не исключается, что для некоторых из элементов матрицы такое конечное представление оказывается полным, — присутствуют все значащие цифры после десятичной точки.

Но относительно некоторых элементов изначально нет информации, все ли цифры после десятичной точки выписаны. Может быть так, например, что полная десятичная запись какого-то из элементов требует бесконечного количества цифр. Или, может быть, в заданной записи элемента не хватает лишь конечного количества цифр. Мы считаем, что в обоих случаях такого рода элементы как-то заранее отмечены в матрице (далее говорим об *отмеченных элементах*).

Допустим, что вычисление определителя матрицы P, выполненное исходя из заданного конечного представления элементов, дало ненулевое значение. Верно ли, что определитель остается ненулевым, соответственно матрица остается невырожденной при любом добавлении (дописывании) цифр в младшие разряды отмеченных элементов матрицы P?

Рассмотрим два примера, в каждом из них фигурирует некоторая невырожденная 2×2-матрица $P = (p_{ij})$.

Пусть
$$P = \begin{pmatrix} 1.0 & -3.333 \\ -0.3 & 0.99 \end{pmatrix} \qquad (1)$$
и для единственного отмеченного элемента $p_{11} = 1.0$ известна только одна цифра после точки и нет гарантии, что нам известны все цифры. Можно убедиться, что если здесь добавить в конец p_{11} цифру 1, получив $p_{11} = 1.01$, то матрица станет вырожденной. Если же считать известными в p_{11} две нулевые цифры после точки: $p_{11} = 1.00$, то матрица станет вырожденной при добавлении (дописывании) бесконечного количества девяток к p_{11}, дающем $p_{11} = 1.00999... = 1.01$.

Пример матрицы, которая остается невырожденной при любом добавлении цифр к каждому из элементов:
$$\begin{pmatrix} 1.40 & -7.8 \\ 9.954 & 0.46 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

К этим двум примерам матриц мы вернемся в разделе 6.

Пусть элемент p_{ij} исходной матрицы имеет d цифр после десятичной точки (несколько последних из этих цифр могут быть нулями). Добавление новых цифр к этому элементу может быть осуществлено так: берется какая-то десятичная дробь β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, которую мы представим условно в виде
$$0.\beta_1\beta_2...,$$
и к p_{ij} прибавляется $10^{-d}\beta$ (со знаком “минус”, если $p_{ij} < 0$). В результате цифры $\beta_1, \beta_2, \ldots$ дроби β будут добавлены в конец числа p_{ij}. Фактически, значение β — произвольное вещественное число из отрезка [0, 1], при этом значению $\beta = 1$ соответствует дробь $0.999\ldots$. Последнее использовано нами выше при рассмотрении матрицы (1) после замены 1.0 на 1.00.

3. СЛУЧАЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Задача подобного рода рассматривалась в [1] для матриц, элементами которых служат полиномы от x над полем K характеристики 0. Возможно ли, превращая элементы исходной невырожденной полиномиальной матрицы P путем добавления новых членов, степени которых больше максимальной степени d элементов матрицы, в формальные степенные ряды, получить вырожденную матрицу? Если это невозможно, то матрица P называлась в [1] строго невырожденной (полиномиальной) матрицей. В значительной мере благодаря тому, что фиксирована единая для всех элементов матрицы P нижняя граница $d + 1$ для степеней добавляемых членов, а также тому, что при оперировании с рядами, в отличие от чисел, не возникают "переносы в старшие разряды", критерий строгой невырожденности полиномиальной матрицы оказался достаточно простым. Перед его формулировкой введем некоторые обозначения и понятия. Кольцо *формальных степенных рядов* над полем K обозначается через $K[[x]]$, а поле *формальных лорановых рядов*, являющееся полем частных кольца $K[[x]]$, — через $K((x))$. Для ненулевого элемента $s = \sum s_i x^i \in K((x))$ обозначение $\operatorname{val} s$ используется для его *валюации*, определенной как $\min\{i \mid s_i \neq 0\}$. Принимается, что $\operatorname{val} 0 = \infty$. Валюацией $\operatorname{val} M$ матрицы M над полем $K((x))$ считается наименьшая из валюаций элементов этой матрицы. Для полиномиальной матрицы P ее степенью $\deg P$ считается наибольшая из степеней элементов этой матрицы (для полиномов принимается, что $\deg 0 = -\infty$).

В [1] доказано, что полиномиальная квадратная матрица P строго невырождена, если и только если

$$\deg P + \operatorname{val} P^{-1} \geqslant 0. \tag{3}$$

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ КВАНТОРОВ

Для класса утверждений о вещественных числах теорема Тарского дает алгоритм проверки истинности этих утверждений.

Пусть $x_1, \ldots, x_\nu$ — переменные, принимающие вещественные значения (вещественные переменные). Рассматриваются полиномы от $x_1, \ldots, x_\nu$ с рациональными коэффициентами и соответствующие полиномиальные уравнения и неравенства относительно $x_1, \ldots, x_\nu$. Из этих уравнений и неравенств с помощью логических операций $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ могут быть построены более сложные соотношения. В таких соотношениях расставляются кванторы существования $\exists$ и всеобщности $\forall$ по переменным $x_1, \ldots, x_\nu$, в итоге все эти вещественные переменные должны быть связаны кванторами. Каждый из кванторов соотнесен со всем множеством вещественных чисел. Алгоритм Тарского определяет, является ли заданная логическая формула такого рода истинной или ложной.

Алгоритм цилиндрической декомпозиции позволяет перейти от рассматриваемого вида логической формулы к бескванторной формуле некоторого класса, что облегчает проверку истинности формулы.

5. ПРОВЕРКА СТРОГОЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ЧИСЛОВОЙ МАТРИЦЫ

Определение 1. Пусть в каждом из элементов невырожденной числовой вещественной матрицы P присутствует лишь конечное число цифр после десятичной точки. Назовем эту матрицу *строго невырожденной* относительно указанного набора U ее отмеченных элементов, если эта матрица остается невырожденной после произвольного добавления цифр в младшие разряды элементов, входящих в U. Если U содержит все элементы матрицы P, то матрицу P будем называть строго невырожденной без ссылки на какой-либо набор ее отмеченных элементов.

Задача распознавания (т. е. задача, где предполагаемый ответ — это *да* или *нет*) строгой невырожденности данной матрицы оказывается алгоритмически разрешимой.

Теорема 1. *Существует алгоритм, распознающий строго невырожденные матрицы (строгая невырожденность может рассматриваться как относительно заданного набора отмеченных элементов, так и относительно всех элементов).*

Доказательство. Алгоритм основывается на методе цилиндрической декомпозиции при элиминации кванторов [4, 5, 8, 9], являющимся вариантом теоремы Тарского [2]. На вход алгоритма подается невырожденная числовая вещественная $n \times n$-матрица P, в элементах которой после десятичной точки присутствует лишь конечное число цифр. Также указывается множество отмеченных элементов $U = \{p_{i_1 j_1}, \ldots, p_{i_k j_k}\}$ и множество $D = \{d_{i_1 j_1}, \ldots, d_{i_k j_k}\}$ количеств известных цифр после десятичной точки в отмеченных элементах. В самом алгоритме дополнительно вводится множество вещественных переменных $S = \{T_{i_1 j_1}, \ldots, T_{i_k j_k}\}$.

Алгоритм.

Построить матрицу $P' = (p'_{ij})$, в которой $p'_{ij} = p_{ij}$, если $p_{ij} \notin U$. Если же $p_{ij} \in U$, то

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + T_{ij} \cdot 10^{-d_{ij}}, & \text{если } p_{ij} > 0, \\ p_{ij} - T_{ij} \cdot 10^{-d_{ij}}, & \text{если } p_{ij} < 0, \\ p_{ij} + \sigma T_{ij} \cdot 10^{-d_{ij}}, & \text{если } p_{ij} = 0, \end{cases}$$

где σ — это 1 или -1, в зависимости от того, является ли $p_{ij} = 0$ усечением положительного числа или отрицательного.

Далее следуют шаги:

1. Найти определитель $\Delta = \det P'$, что дает $\Delta \in \mathbb{Q}[S]$, где $\deg_{T_{ij}} \Delta \in \{0, 1\}$ для всех $T_{ij} \in S$.

2. Если Δ не зависит от переменных, то закончить выполнение алгоритма. Ответ: матрица P — строго невырождена.

3. Если Δ зависит от одной переменной $T \in S$, то вычислить корень уравнения $\Delta(T) = 0$. Если корень не принадлежит отрезку $[0, 1]$, то матрица P — строго невырождена. Иначе, P не является строго невырожденной.

4. Используя такие переменные $T_{ij} \in S$, что $\deg_{T_{ij}} \Delta = 1$, записать формулу с квантором $\exists$: существуют такие значения переменных, что выполняется $\Delta = 0$ и значения переменных принадлежат отрезку $[0, 1]$ числовой прямой.

5. С помощью алгоритма цилиндрической декомпозиции определить, истинна ли построенная на предыдущем шаге формула. Если истинна, то матрица P не является строго невырожденной. Иначе, P — строго невырождена. □

6. РЕАЛИЗАЦИЯ В MAPLE

Представленный выше алгоритм реализован нами в среде компьютерной алгебры Maple 2024 [10]. Использован Maple-пакет *QuantifierElimination* [11], дающий возможность применять упомянутый метод цилиндрической декомпозиции.

Пусть для матрицы (1) требуется определить, является ли ее невырожденность строгой относительно элементов p_{12}, p_{21}, p_{22}. Чтобы избежать округления чисел, в Maple элементы матрицы записываем как рациональные числа. Отмечаем элементы, как описано в предыдущем разделе: к отмеченному элементу p_{ij} прибавляем или вычитаем $T_{ij} \cdot 10^{-d_{ij}}$. Таким образом, в сессии Maple выполняем присваивание

$> P :=$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3333 \cdot 10^{-3} - T_{1,2} \cdot 10^{-3} \\ -3 \cdot 10^{-1} - T_{2,1} \cdot 10^{-1} & 99 \cdot 10^{-2} + T_{2,2} \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}:$$

(В системе Maple первый и второй индекс разделяются запятой.) Затем находим определитель. Этому полиному от всех T_{ij} с рациональными коэффициентами дается имя *Dt*:

$> Dt := LinearAlgebra{:-}Determinant(P);$

$$Dt := -\frac{99}{10000} + \frac{1}{100}T_{2,2} - \frac{3333}{100000}T_{2,1} - \frac{3}{10000}T_{1,2} - \frac{1}{100000}T_{1,2}T_{2,1}.$$

Далее получаем список S переменных, от которых зависит определитель *Dt*:

$> S := [indets(Dt)[\,]]:$

$$S := \left[T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}\right]$$

Строим соответствующее выражение (в терминологии математической логики — “формулу”) с квантором: существуют такие значения переменных $T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}$, что выполняется $Dt = 0$ и значения переменных принадлежат отрезку $[0, 1]$ числовой прямой. В Maple это делается так:

$> exists(S, \mathrm{And}(Dt = 0, seq([i \geqslant 0, i \leqslant 1][\,], i = S)));$

$$\exists\Big(\left[T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}\right], -\frac{99}{10000} + \frac{1}{100}T_{2,2} - \frac{3333}{100000}T_{2,1} - \frac{3}{10000}T_{1,2} - \frac{1}{100000}T_{1,2}T_{2,1} = 0 \wedge 0 \leqslant T_{1,2} \wedge T_{1,2} \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant T_{2,1} \wedge T_{2,1} \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant T_{2,2} \wedge T_{2,2} \leqslant 1 \Big)$$

Процедура *QuantifierEliminate* из пакета *QuantifierElimination* определяет, истинна ли эта формула:

$> QuantifierElimination{:-}QuantifierEliminate(\%);$

$$true$$

Ответ *true* означает, что возможно добавление цифр к отмеченным элементам, обращающее определитель в 0, т. е. невырожденность (1) относительно p_{12}, p_{21}, p_{22} не является строгой.

Последовательность команд оформлена в виде процедуры *StronglyNonSingular*. Аргумент процедуры — квадратная числовая матрица с отмеченными указанным выше способом элементами (т. е. каждый (i, j)-й элемент матрицы — полином от переменной T_{ij}, степени не выше 1, с коэффициентами — рациональными числами). При этом, в отличие от рассмотренной выше последовательности команд, процедура возвращает *true*, если матрица является строго невырожденной, и *false* иначе.

Запишем в Maple матрицу (1), в этот раз отметив только один элемент $p_{11} = 1.0$ (известна только одна цифра после точки):

$$> P := \begin{bmatrix} 1 + T_{1,1} \cdot 10^{-1} & -3333 \cdot 10^{-3} \\ -3 \cdot 10^{-1} & 99 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}:$$

Применим нашу процедуру:

$> StronglyNonSingular(P);$

$$false$$

Ответ *false* означает, что матрица не является строго невырожденной по элементу p_{11}. Тот же ответ получаем, если $p_{11} = 1.00$ (известны две цифры после точки):

$$> P := \begin{bmatrix} 1 + T_{1,1} \cdot 10^{-2} & -3333 \cdot 10^{-3} \\ -3 \cdot 10^{-1} & 99 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}:$$

$> StronglyNonSingular(P);$

$$false$$

Запишем в Maple матрицу (2), отметим в ней все элементы:

$> P :=$

$$\begin{bmatrix} 14 \cdot 10^{-2} + T_{1,1} \cdot 10^{-2} & -78 \cdot 10^{-1} - T_{1,2} \cdot 10^{-1} \\ 9954 \cdot 10^{-3} + T_{2,1} \cdot 10^{-3} & 46 \cdot 10^{-2} + T_{2,2} \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}:$$

Получаем, что эта матрица строго невырождена:

$> StronglyNonSingular(P);$

$$true$$

Мы провели эксперименты с 5×5-матрицей со случайно выбранными элементами, для которых известны значения одной или двух цифр после десятичной точки. В этой матрице были отмечены два элемента, затем три и четыре элемента. Относительно этих элементов матрица оказалась строго невырожденной. Время работы[1] процедуры *QuantifierElimination:-QuantifierEliminate* — 0.182 для двух отмеченных элементов, 7.091 — для трех и 640.624 — для четырех.

Были проведены эксперименты и с нестрого невырожденной 5×5-матрицей с элементами, для которых известны значения одной или двух цифр после десятичной точки. Так же были отмечены два элемента, затем три и четыре элемента, относительно которых матрица не является строго невырожденной. Время работы процедуры *QuantifierElimination:-QuantifierEliminate* — 0.451 для двух отмеченных элементов, 0.362 — для трех и 0.457 — для четырех.

Сессия Maple с процедурой *StronglyNonSingular* и примерами доступна по ссылке [12], а pdf-вариант этой сессии — по ссылке [13].

[1]В секундах. Вычисления проводились в Maple 2024, Ubuntu 8.04.4 LTS, AMD Athlon(tm) 64 Processor 3700+, 3GB RAM

7. ОБ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЕ

7.1. Полиномиальная исходная матрица

Продолжим тему раздела 3. Пусть M представляет собой $n \times n$-матрицу над $K[[x]]$, где поле K имеет характеристику 0, и матрица P получена из M отбрасыванием в ее элементах (рядах) всех членов степени выше, чем d, при $d = \deg P$. Пусть матрица P строго невырождена. Тогда, как показано в [1, Sect. 4], для M, благодаря строгой невырожденности матрицы P, будем иметь $\operatorname{val} M^{-1} = \operatorname{val} P^{-1}$. Помимо этого, совпадут матрицы, составленные из коэффициентов при x^ν, $\nu = \operatorname{val} P^{-1}$, в элементах матриц P^{-1}, M^{-1}. Добавим, что возможно совпадение и большего числа начальных членов рядов, являющихся элементами P^{-1} и M^{-1}. Верхняя оценка степени x, до которой имеет место совпадение, дана в [1, Prop. 3].

7.2. Числовая исходная матрица

Следующее предложение показывает, что для числовых матриц аналоги свойств, перечисленных в разделе 7.1 места не имеют.

Предложение 1. Для любых целых положительных n, N можно указать такие невырожденные числовые $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, что элементы a_{ij} и b_{ij}, для любых i, j совпадают вплоть до N-й цифры после десятичной точки, но при этом в матрицах $A^{-1} = (\bar{a}_{ij})$ и $B^{-1} = (\bar{b}_{ij})$ для некоторых i, j первые значащие цифры элементов $\bar{a}_{ij}$ и $\bar{b}_{ij}$, как и десятичные порядки этих цифр, не совпадают. Сказанное сохраняет силу для строго невырожденных A и B.

Доказательство. Рассмотрим предварительно случай одного числа (или, то же самое, случай 1×1-матрицы). Для $u = 10^{-N}$ добавление справа цифры 9 дает $v = 19 \cdot 10^{-N-1}$. Имеем $u^{-1} = 10^N$ — первая цифра $(N+1)$-значного числа равна 1, и $v^{-1} = 0.0526... \cdot 10^{N+1}$ — первая цифра N-значной части перед десятичной точкой равна 5. (Добавление к u справа цифры 2 дало бы $v^{-1} = 0.0833... \cdot 10^{N+1}$ — первая цифра N-значного числа равна 8, если же добавить бесконечную последовательность девяток, то будем иметь $v = 2 \cdot 10^{-N}$ и $v^{-1} = 0.05... \cdot 10^{N+1}$ — тот же эффект, что при добавлении одной девятки и т. д.).

Теперь возьмем диагональные $n \times n$-матрицы A и B, для которых $a_{ii} = b_{ii} = 1$ при $i = 2, \dots, n$ и $a_{11} = u$, $b_{11} = v$. Элементы матриц A^{-1} и B^{-1}, имеющие индексы $i = j = 1$, равны соответственно u^{-1} и v^{-1}.

Матрицы A и B строго невырождены. □

8. ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Если матрица P имеет большое количество точных нулей (т. е. нулевых элементов, не принадлежащих к множеству отмеченных), то не лишено смысла проверить, нельзя ли представить исследуемый определитель как произведение определителей матриц меньших размеров: равенство нулю исходного определителя эквивалентно равенству нулю хотя бы одного из сомножителей. Подобная факторизация могла бы снизить затраты по проверке строгой невырожденности. Проверка же возможности указанной факторизации опирается на теорему об определителе 2×2 — блочной матрицы, один из блоков которой нулевой [14, гл. 3, § 2, п. 4]. Наибольший эффект получается в случае, если исходная матрица может быть приведена к блочно-диагональной или блочно-треугольной матрице, на диагонали которой располагаются блоки небольших размеров.

Предполагается, что это приведение выполняется с помощью перестановок строк и столбцов.

Например, если в матрице

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix} \tag{4}$$

разместить строки в порядке 2, 5, 1, 3, 4, а столбцы — в порядке 5, 2, 3, 4, 1, то получится блочно-треугольная матрица

$$P' = \begin{pmatrix} p_{25} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{21} \\ p_{55} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{51} \\ 0 & 0 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & p_{31} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41} \end{pmatrix}.$$

Исходная матрица P будет строго невырожденной, если строго невырождена каждая матрица-блок на диагонали матрицы P'. Блоки, состоящие из одного элемента (как второй блок на диагонали P' — элемент p_{13}), строго невырождены, что следует из постановки задачи — исходная числовая матрица невырождена (следовательно $p_{13} \neq 0$). Даже если элемент p_{13} отнесен к отмеченным, никакое дописывание цифр к ненулевому числу не обратит его в ноль.

Итак, вместо того, чтобы применять алгоритм к матрице P или P', применим его к диагональным блокам, размера большего 1. Применяем алгоритм к матрице

$$A = \begin{pmatrix} p_{25} & p_{22} \\ p_{55} & p_{52} \end{pmatrix}.$$

Если окажется, что A не является строго невырожденной, то матрица P также не является строго невырожденной. Иначе, применим алгоритм к

$$B = \begin{pmatrix} p_{34} & p_{31} \\ p_{44} & p_{41} \end{pmatrix}.$$

Матрица P будет строго невырожденной, если и только если строго невырождена B.

В разделе 6 упоминались эксперименты с 5×5-матрицей со случайными элементами. Приведено время работы процедуры *QuantifierEliminate* для нескольких отмеченных элементов, относительно которых матрица оказалась строго невырожденной. В этих экспериментах матрица не имела нулевых элементов. Далее часть элементов матрицы мы положили равными 0 так, как показано в (4), и отметили все ее ненулевые элементы. Время работы *QuantifierEliminate* составило 2250.033. Матрица оказалась строго невырожденной относительно всех ненулевых элементов. При этом время работы для A и B составило 17.946 и 27.517 соответственно.

Преобразование *уплотнения*. Это преобразование применяется к некоторой матрице P и положительным целым m, l, не превосходящим числа ее строк и соответственно столбцов. Пусть P имеет размер $s \times t$ и $m \leqslant s, l \leqslant t$. Из всех строк матрицы P, имеющих номера $1, \ldots, m$, в которых число нулевых элементов на пересечении со столбцами, имеющими номера $1, \ldots, l$, принимает наибольшее значение (пусть это значение равно k), берется какая-то одна, например, имеющая наибольший номер и переставляется с m-й строкой. Затем нулевые элементы m-й строки, расположенные в столбцах с номерами, не превосходящими l, перестановками столбцов с номерами $1, \ldots, l$ перемещаются в начало строки, становясь элементами $p_{m1}, \ldots, p_{mk}$ преобразованной матрицы P. Значения m, l преобразуются в $m-1, k$ (эти числа выделяют неуплотненную часть матрицы).

Это преобразование может быть применено к матрице P несколько раз, с пошаговым обновлением m и l. Если в результате w последовательных уплотнений $n \times n$-матрицы P с начальными $m = l = n$ имеет место $l \geqslant n - w$, то нижние w строк преобразованной матрицы P допускают блочную запись UV, с нулевой $w \times l$-матрицей U и квадратной V (блока) размера $w \times w$. Дальнейшие уплотнения применяются к P с $m = n - w$ и значением l после первой серии (пусть это значение есть l_0). Эти уплотнения продолжается до момента, когда после общего числа w_1 преобразований уплотнения будет выполнено $l \geqslant n - w_1$. Это даст новый блок размера $(w_1 - w) \times (w_1 - w)$ и т. д.

Для матрицы (4) преобразование уплотнения, реализованное нами в системе Maple, выполняется за 0.033 с.

Замечание 1. Выбор строки с наибольшим количеством нулей определен неоднозначно. Выше для простоты предлагалось брать строку с наибольшим номером. Но возможны иные (скажем, эвристические) стратегии выбора. Например: из строк с наибольшим количеством нулей выбирать такую, чтобы после перестановки ее со строкой с номером m над ее нулями в строках с меньшими номерами общее количество нулей было наибольшим из возможных.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны М. Кауэрсу, Г. Погудину и Д. Хмельнову за советы по теме этой публикации. Авторы также благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S., Barkatou M.* On Strongly Non-Singular Polynomial Matrices// In: Schneider C., Zima E. (eds.). Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2018. Vol. 226. P. 1–17.
2. *Tarski A.* A decision method for elementary algebra and geometry // Santa Monica CA: RAND Corp., 1948.
3. *Матиясевич Ю.В.* Алгоритм Тарского // Компьютерные инструменты в образовании. 2008. № 6. С. 4–14.
4. *Collins G.E.* Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition // In Proc. 2nd GI Conf. Automata Theory and Formal Languages. New York: Springer-Verlag, 1975. P. 134–183.
5. *Davenport J., Heintz J.* Real quantifier elimination is doubly exponential // J. Symb. Comput. 1988. № 5. P. 29–35.
6. *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. Системы и алгоритмы алгебраических вычислений. М.: Мир, 1991.
7. *Абрамов С.А., Рябенко А.А.* О строго невырожденных числовых матрицах // Труды XV научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики”. Коломна: ГСГУ, 2025. С. 19–24.
8. *Basu S., Pollack R., Coste-Roy M.-F.* Algorithms in real algebraic geometry // Algorithms and Computation in Mathematics. Vol. 10. Springer, 2006.
9. *Caviness B.F., Johnson J.R.* (eds.). Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition // Texts & Monographs in Symbolic Computation, Springer, 1998.
10. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/
11. *Tonks Z.* A Poly-algorithmic quantifier elimination package in Maple // In Jurgen Gerhard and Ilias Kotsireas, editors, Maple in Mathematics Education and Research. Springer International Publishing. 2020. P. 176–186.
12. http://www.ccas.ru/ca/_media/str_nonsing.mw
13. http://www.ccas.ru/ca/_media/str_nonsing.pdf
14. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М.: Физматлит, 1977.

FINITE DECIMAL FRACTIONS AS ENTRIES OF NONSINGULAR MATRICES

S. A. Abramov[a], A. A. Ryabenko[a]

[a] *Federal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*

How can one check, for a given nonsingular real number matrix the entries of which have only a finite number of decimal digits, whether this matrix will remain nonsingular after some decimal digits are arbitrarily added to some (explicitly specified in advance) of its entries? It turns out that this problem is algorithmically solvable. A computer implementation of the proposed algorithmic solution is discussed.

Keywords: truncated number matrices, nonsingularity of number matrices, Tarski’s algorithm, cylindrical decomposition algorithm, computer algebra

REFERENCES

1. *Abramov S., Barkatou M.* On Strongly Non-Singular Polynomial Matrices// In: Schneider C., Zima E. (eds.). Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 226, 2018, pp. 1–17.
2. *Tarski A.* A decision method for elementary algebra and geometry // Santa Monica CA: RAND Corp., 1948.
3. *Matiyasevich Yu.V.* Tarski's algorithm // Komput. Instrum. v Obrazovanii., 2008, no. 6, pp. 4–14.
4. *Collins G.E.* Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition // In Proc. 2nd GI Conf. Automata Theory and Formal Languages. New York: Springer-Verlag, 1975, pp. 134–183.
5. *Davenport J., Heintz J.* Real quantifier elimination is doubly exponential // J. Symb. Comput. 5, pp. 29–35, 1988.
6. *Davenport J., Siret Y., Tournier E.* Calcul formel, Paris: Masson, 1987.
7. *Abramov S.A., Ryabenko A.A.* On strongly nonsingular number matrices // Trudy XV Nauchn. Konf. on Differential Equations and Related Problems of Mathematics, Kolomna: Gos. Sotsial'no-Gumanitarnyi Univ. 2025. P. 19–24.
8. *Basu S., Pollack R., Coste-Roy M.-F.* Algorithms in real algebraic geometry // Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 10, Springer, 2006.
9. *Caviness B.F., Johnson J.R.* (eds.). Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition // Texts & Monographs in Symbolic Computation, Springer, 1998.
10. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/
11. *Tonks Z.* A Poly-algorithmic quantifier elimination package in Maple // In Jurgen Gerhard and Ilias Kotsireas, editors, Maple in Mathematics Education and Research, pp. 176–186, 2020. Springer International Publishing.
12. http://www.ccas.ru/ca/_media/str_nonsing.mw
13. http://www.ccas.ru/ca/_media/str_nonsing.pdf
14. *Kostrikin A.I.* Introduction to Algebra, Berlin: Springer, 1982.