

Пространство решений H -систем и теорема Оре-Сато* (расширенная аннотация)

С. А. Абрамов[†]

Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
sabramov@ccas.ru

М. Петковшек[‡]

Отделение математики
ф-та математики и физики
университета г. Любляна,
Ядранска 19, SI-1000 Любляна, Словения
marko.petkovsek@fmf.uni-lj.si

Линейные однородные рекуррентные уравнения с полиномиальными коэффициентами и системы таких уравнений играют значительную роль в комбинаторике и в теории гипергеометрических функций; вопрос о размерности пространств решений таких систем является важным и интересным.

Пусть E_{n_i} — оператор сдвига, действующий на функции (последовательности) переменных $n_1, \dots, n_d$ как $E_{n_i}f(n_1, \dots, n_i) = f(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_d)$, $i = 1, \dots, d$.

Определение 1 H -системой называется система

$$f_i(n_1, \dots, n_d)T(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_d) = g_i(n_1, \dots, n_d)T(n_1, \dots, n_i, \dots, n_d), \quad i = 1, 2, \dots, d, \quad (1)$$

где $f_i, g_i \in \mathbb{C}[n_1, \dots, n_d] \setminus \{0\}$ и f_i, g_i взаимно-просты. Будем говорить, что последовательность $T(n_1, \dots, n_d)$, т.е. комплекснозначная функция, определенная на подмножестве множества $\mathbb{Z}^d$, является решением (1), если (1) выполняется для всех таких $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_d)$ из области определения T , для которых $(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_d)$ также принадлежит области определения T . Будем называть гипергеометрическим термом любое решение $T(n_1, \dots, n_d)$ некоторой H -системы.

Префикс “ H ” в названии “ H -система” указывает на связь этого понятия с понятием гипергеометрической функции и с именем Я.Горна, который, по сути, определял гипергеометрический ряд d переменных как такой ряд Лорана d переменных, коэффициенты которого удовлетворяют некоторой H -системе, т.е. образуют гипергеометрический терм.

Понятие особой точки (особенности) такой системы может быть определено обычным образом. Особенности доставляют препятствия (иногда непреодолимые) для продолжения частичных решений системы на все множество $\mathbb{Z}^d$.

Определение 2 Пусть H является H -системой вида (1); $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ называется особенностью системы H , если существует i , $1 \leq i \leq d$ такое, что $f_i(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_d)g_i(n_1, \dots, n_d) = 0$.

Пусть $S(H)$ — множество всех особенностей H . Обозначим $V_1(H)$ $\mathbb{C}$ -линейное пространство всех решений H , которые определены на всех элементах множества $\mathbb{Z}^d$, и обозначим $V_2(H)$ $\mathbb{C}$ -линейное пространство всех решений H , которые определены на всех элементах множества $\mathbb{Z}^d \setminus S(H)$.

В дальнейшем мы будем часто опускать обозначение H -системы и писать V_1, V_2 вместо $V_1(H), V_2(H)$.

Мы исследуем размерности пространств V_1, V_2 . Хорошо известно [5], что если в случае $d = 1$ рассматриваются ростки последовательностей на бесконечности (т.е. классы последовательностей, сопадающих с некоторого места), то размерность пространства решений равна 1. Однако, с $\dim V_1$ и $\dim V_2$ дело обстоит не так. В случае $d = 1$ система (1) имеет вид

$$f(n)T(n+1) = g(n)T(n), \quad (2)$$

где $f(n), g(n) \in \mathbb{C}[n] \setminus \{0\}$ и $f(n), g(n)$ взаимно-просты. Может быть доказана

*Частичная поддержка в рамках программы ECO-NET министерства иностранных дел Франции.

[†]Частичная поддержка РФФИ, грант 04-01-00757.

[‡]Частичная поддержка MSZS RS, грант P1-0294.

Теорема 1 Пусть S множество особенностей уравнения (2).

a) Если $S = \emptyset$, то $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$.

b) Если $S \neq \emptyset$, то $1 \leq \dim V_1 < \dim V_2 < \infty$, и для любых целых s, t таких, что $1 \leq s < t$, существует уравнение вида (2), для которого $\dim V_1 = s$ и $\dim V_2 = t$.

Например, для уравнения $T(n+1) = \prod_{i=0}^{k-2} (n-2i+1) T(n)$, $k \geq 1$, мы имеем $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = k$ (используем соглашение, что произведение равно 1, если его нижняя граница превосходит верхнюю). Для $q_k(n+1) T(n+1) = q_k(n) T(n)$, где $k \geq 1$ и $q_k(n) = \prod_{i=1}^k (n+2i+1)$, мы имеем $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = k+1$.

Можно показать, что при $d > 1$ возникает еще больше возможностей.

Теорема 2 Для любого $d > 1$ и $1 \leq s, t \leq \infty$ существует H -система такая, что $\dim V_1 = s$ и $\dim V_2 = t$.

Например, $\dim V_1 = \infty$, $\dim V_2 = 1$ для системы

$$\begin{aligned} (n_1 - 4n_2 + 1)T(n_1 + 1, n_2) &= (n_1 - 4n_2)T(n_1, n_2), \\ (n_1 - 4n_2 - 4)T(n_1, n_2 + 1) &= (n_1 - 4n_2)T(n_1, n_2); \end{aligned}$$

$\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = \infty$ для

$$\begin{aligned} (n_1 - 4n_2)T(n_1 + 1, n_2) &= (n_1 - 4n_2 + 1)T(n_1, n_2), \\ (n_1 - 4n_2)T(n_1, n_2 + 1) &= (n_1 - 4n_2 - 4)T(n_1, n_2), \end{aligned}$$

и $\dim V_1 = \dim V_2 = \infty$ для

$$\begin{aligned} (n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 1)T(n_1 + 1, n_2) &= (n_1 - n_2)(n_1 - n_2 + 2)T(n_1, n_2), \\ (n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 1)T(n_1, n_2 + 1) &= (n_1 - n_2)(n_1 - n_2 - 2)T(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Определение 3 Рациональные функции $F_1, \dots, F_d \in \mathbb{C}(n_1, \dots, n_d)$ являются совместными, если

$$(E_{n_j} F_i) F_j = F_i (E_{n_i} F_j)$$

для всех $1 \leq i \leq j \leq d$.

Теорема Оре-Сато [3, 4, 6] описывает структуру совместных рациональных функций. Мы показываем, что вопреки некоторым содержащимся в литературе интерпретациям этой теоремы (например, в [1, 2]), из нее не следует что каждый гипергеометрический терм $T(n_1, \dots, n_d)$, пусть даже определенный всюду на $\mathbb{Z}^d$, имеет вид

$$R(n_1, \dots, n_d) \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_{i1}n_1 + \dots + a_{id}n_d + \alpha_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_{j1}n_1 + \dots + b_{jd}n_d + \beta_j)} u_1^{n_1} \dots u_d^{n_d}, \quad (3)$$

где $R \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$, $a_{ik}, b_{jk} \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$.

Пусть $A(n_1, n_2) = |n_1 - n_2|$. Тогда

$$\begin{aligned} (n_1 - n_2)A(n_1 + 1, n_2) &= (n_1 - n_2 + 1)A(n_1, n_2), \\ (n_1 - n_2)A(n_1, n_2 + 1) &= (n_1 - n_2 - 1)A(n_1, n_2) \end{aligned}$$

для всех $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, $A(n_1, n_2)$ — гипергеометрический терм. Однако, как мы показываем, $A(n_1, n_2)$ нельзя представить в виде (3). Отметим, что производящей для $A(n_1, n_2)$ будет рациональная функция

$$\sum_{n_1, n_2 \geq 0} |n_1 - n_2| z_1^{n_1} z_2^{n_2} = \left(\frac{z_1}{(1-z_1)^2} + \frac{z_2}{(1-z_2)^2} \right) \frac{1}{1-z_1 z_2}.$$

Не исключено, что в упомянутых литературных источниках гипергеометрический терм $T(n_1, n_2)$ неявно предполагается неравным нулю для всех $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Это в какой-то мере согласуется с тем, что, например, в [1] H -система при $d = 2$ задается в терминах двух частных (рациональных функций) $T(n_1 + 1, n_2)/T(n_1, n_2)$ и $T(n_1, n_2 + 1)/T(n_1, n_2)$ (Горн использовал этот же подход). Но столь

строгое ограничение исключило бы из рассмотрения много важных последовательностей, таких как последовательность биномиальных коэффициентов $T(n_1, n_2) = \binom{n_1}{n_2}$ и все такие полиномиальные последовательности, для которых соответствующий полином имеет целые нули. Однако, отказываясь от этого предположения, мы получаем гипергеометрические термы, которые не могут быть представлены в виде (3), что было показано на примере $A(n_1, n_2)$.

В заключение приведем доказанное нами более осторожное следствие теоремы Оре-Сато о форме гипергеометрических термов.

Определение 4 Назовем $(n_1, \dots, n_d), (n'_1, \dots, n'_d) \in \mathbb{Z}^d$ смежными, если $\sum_{i=1}^d |n_i - n'_i| = 1$. Назовем конечную последовательность $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{Z}^d$ путем из t_1 в t_k , если t_i и t_{i+1} являются смежными для всех $i = 1, \dots, k-1$.

Для данной H -системы H мы определяем компоненты, индуцированные системой H в $\mathbb{Z}^d$, как классы эквивалентности отношения $\sim$ в $\mathbb{Z}^d$: $t' \sim t''$ если и только если существует путь из t' в t'' , не содержащий особенностей H . Если T является решением H -системы H , то его составляющая — это последовательность, являющаяся сужением T на некоторую индуцированную H компоненту.

Назовем множество $M \subset \mathbb{Z}^d$ алгебраическим, если существует ненулевой полином $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ такой, что $p(n_1, n_2, \dots, n_d) = 0$ для всех $(n_1, n_2, \dots, n_d) \in M$.

Следствие 1 Любая составляющая гипергеометрического терма $T(n_1, \dots, n_d)$, область определения которой является индуцированной исходной системой неалгебраической компонентой множества $\mathbb{Z}^d$, имеет вид (3).

Список литературы

- [1] Г. Бейтмен, А.Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. -М. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
- [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа, *Успехи математич. наук* **47**, вып. 4 (1992) 3–82.
- [3] О. Ore, Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, *Comptes Rendus* **189** (1929) 1238.
- [4] О. Ore, Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, *J. Math. Pures Appl.* **9** (1930) 311–326.
- [5] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, $A = B$, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.
- [6] M. Sato, T. Shintani and M. Muro, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part), *Nagoya Math. J.* **120** (1990) 1–34.