

© 1994 г. С.А.Абрамов

ЗНАМЕНАТЕЛИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается новый алгоритм построения рациональных решений линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

В настоящей работе существенно обновляется предложенный в [1] подход к построению всех рациональных решений линейных разностных уравнений вида

$$(1) \quad a_n(x)y(x+n) + \dots + a_0(x)y(x) = t(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), t(x)$ — полиномы над некоторым подходящим (в смысле [1]) полем K — например, над полем рациональных или рационально-комплексных (гауссовых) чисел. Эта задача является достаточно важной для компьютерной алгебры, так как к ней сводится ряд других интересных задач. Это стало понятно, в частности, после работ М.Петковшека [2], [3], в которых рассматривались гипергеометрические решения разностных уравнений ($f(x)$ — гипергеометрическая функция, если существует рациональная функция $R(x)$ такая, что $f(x+1) = R(x)f(x)$; гипергеометрические функции имеют широкое применение в комбинаторике). В [2], [3] показано, в частности, что если коэффициенты линейного разностного уравнения являются полиномами, а его правая часть — ненулевой гипергеометрической функцией $g(x)$, то оно может иметь гипергеометрические решения только вида $F(x)g(x)$, где $F(x)$ — некоторая рациональная функция. Подставив $F(x)g(x)$ вместо $y(x)$ в исходное уравнение, мы сможем получить для $F(x)$ уравнение с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью.

Известный алгоритм Госпера [4] применяется к уравнениям вида

$$(2) \quad y(x+1) - y(x) = g(x)$$

с гипергеометрической $g(x)$ и предназначен для поиска гипергеометрических решений (2). Подстановка $F(x)g(x)$ вместо $y(x)$ в (2) даст

$$R(x+1)F(x+1) - F(x) = 1,$$

где $R(x) = g(x+1)/g(x)$. Мы видим, что возможности алгоритма Госпера перекрываются возможностями общего алгоритма поиска рациональных решений уравнений вида (1).

В [1] был предложен алгоритм построения полинома $u(x)$ такого, что $u(x)$ делится на знаменатель любого рационального решения, взятого в несократимой форме. После того, как полином $u(x)$ построен, можно в (1) вместо $y(x)$ подставить выражение $p(x)/u(x)$ с неизвестным полиномом $p(x)$, это позволит получить уравнение с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью для $p(x)$. Поиск полиномиальных решений подробно разобран в [5].

Однако следует признать, что для построения $u(x)$, т.е. полинома, который может выступать в качестве знаменателя любого рационального решения, в [1] предложен слишком сложный способ. Ниже указывается более прямой путь этого построения.

Пусть $A(x), B(x) \in K[x]$. Назовем полиномом вида $q^\alpha(x)$, где $q(x)$ — неприводимый над K полином, а α — натуральное число, окаймленным парой $A(x), B(x)$, если найдутся неотрицательные целые c_1, c_2 такие, что

- a) $q^\alpha(x + c_1)|A(x), q^\alpha(x - c_2)|B(x)$,
- б) при любом $\beta > \alpha$ по меньшей мере одно из отношений

$$q^\beta(x + c_1)|A(x), q^\beta(x - c_2)|B(x),$$

является неверным.

Так, например, для

$$A(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)(x - 5)^3, B(x) = x(x - 1)^2(x - 2)(x - 4)^3$$

окаймленными будут полиномы

$$x - 1, (x - 2)^2, (x - 3)^2, (x - 4)^2.$$

В общем случае c_1, c_2 определяются неоднозначно. Если вернуться к нашему примеру и рассмотреть в роли окаймленного полинома $x - 1$, то $c_1 = 0$, а в качестве c_2 можно взять 0, 1 или 3. Будем называть $\max(c_1 + c_2)$ весом окаймленного полинома. Тогда в нашем примере весом $x - 1$ будет 3, а для каждого из $(x - 2)^2, (x - 3)^2, (x - 4)^2$ вес будет равен 2.

Отметим, что если $q^\alpha(x)$ и $q^\beta(x + h)$, где $\beta > \alpha$, а h — любое целое, оба являются окаймленными некоторой парой $A(x), B(x)$, то вес первого полинома заведомо превосходит вес второго.

Ключевую роль в наших построениях будут играть

$$(3) \quad A(x) = a_n(x - n), B(x) = a_0(x).$$

Из работ [1], [6] следует, что простейшая дробь вида $s(x)/q^\gamma(x) \in K(x)$ может входить в разложение рационального решения уравнения (1), если только полином $q(x)^\gamma$ является делителем некоторого окаймленного парой (3) полинома. Поэтому в качестве $u(x)$ можно взять полином, разложение на неприводимые множители которого $u(x) = p_1^{\gamma_1}(x) \dots p_v^{\gamma_v}(x)$ таково, что

- а) каждый полином $p_i^{\gamma_i}(x)$ окаймлен парой (3),
- б) если $q^\alpha(x)$ окаймлен парой (3), то для некоторого $j, 1 \leq j \leq v$, выполнено $q(x) = p_j(x)$ и $\alpha < \gamma_j$.

(Здесь и далее равенство неприводимых над K полиномов мы понимаем с точностью до множителей из K .)

Непосредственной проверкой можно установить, что справедливо

Предложение. Пусть найдены все неотрицательные целые значения $h_1, \dots, h_m (h_1 > \dots > h_m)$ параметра h такие, что $\deg \text{НОД}(A(x), B(x + h)) > 0$. Пусть $d_i(x) = \text{НОД}(A(x), B(x + h_i)), i = 1, \dots, m$. Пусть найдено произведение

$$(4) \quad s(x) = d_1(x)d_1(x - 1)\dots d_1(x - h_1).$$

Тогда мы имеем следующую информацию об окаймленных парой $A(x), B(x)$ полиномах.

1) Все окаймленные парой $A(x), B(x)$ полиномы имеют не превосходящий h_1 вес. Если разложение $u(x)$ на неприводимые множители имеет вид

$$(5) \quad s(x) = q_1^{\alpha_1}(x)q_2^{\alpha_2}(x)\dots,$$

то $q_1^{\alpha_1}(x), q_2^{\alpha_2}(x), \dots$ — это все окаймленные парой $A(x), B(x)$ полиномы веса h_1 .
 2) Если положить

$$\tilde{A}(x) = A(x)/НОД(A(x), s(x)), \tilde{B}(x) = B(x)/НОД(B(x), s(x)),$$

то можно будет установить взаимно-однозначное соответствие между окаймленными парой $A(x), B(x)$ полиномами веса, меньшего h_1 , и всеми полиномами, окаймленными парой $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$. А именно, полиномы вида $p^\beta(x)$, где $p(x)$ не совпадает ни с одним из $q_1(x), q_2(x) \dots$ (см. (5)), соответствуют сами себе, а полиному $q_i^\beta(x), \beta > \alpha$, окаймленному парой $A(x), B(x)$, будет соответствовать полином $q_i^{\beta-\alpha}(x)$, окаймленный парой $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$.

3) Неотрицательные целые

$$h_1, h_2, \dots, \tilde{h}_{\tilde{m}}$$

и полиномы

$$\tilde{d}_1(x), \tilde{d}_2(x), \dots, \tilde{d}_{\tilde{m}}(x),$$

связанные с $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$ аналогично тому, как h_1, \dots, h_m и $d_1(x), \dots, d_m(x)$ связаны с $A(x), B(x)$, могут быть вычислены так:

```

 $j := 0;$ 
 $for i = 2, 3, \dots, m \ do$ 
 $d_i(x) := d_i(x)/НОД(d_i(x), s(x));$ 
 $if \deg d_i(x) > 0$ 
 $then j := j + 1; \tilde{d}_j(x) := d_i(x); \tilde{h}_j := h_i$ 
 $fi$ 
 $od;$ 
 $\tilde{m} := j$ 
```

Это предложение позволяет нам описать следующий алгоритм построения $u(x)$ по заданным $n, a_0(x), a_n(x)$. (Этот алгоритм использует поиск НОД полиномов, зависящих от параметра h . Такой поиск может быть осуществлен с помощью результатов, но имеется и более удобный способ [7,8]).

вход: n — порядок уравнения (1), $a_0(x), a_n(x)$ — первый и последний коэффициенты этого уравнения;

выход: — полином, который может выступать как знаменатель произвольного рационального решения уравнения (1);

алгоритм:

```

 $A(x) := a_n(x - n); B(x) := a_0(x); u(x) := 1;$ 
найти все неотрицательные значения  $h_1, \dots, h_m (h_1 > \dots > h_m)$ 
параметра  $h$  такие, что  $\deg НОД(A(x), B(x + h)) > 0$ 
(пусть  $d_i(x) = НОД(A(x), B(x + h_i)), i = 1, \dots, m$ );
 $while m > 0 \ do$ 
 $s(x) := d_1(x)d_1(x - 1)\dots d_1(x - h_1);$ 
 $u(x) := u(x)s(x);$ 
 $j := 0;$ 
 $for i = 2, 3, \dots, m \ do$ 
 $d_i(x) := d_i(x)/НОД(d_i(x), s(x));$ 
 $if \deg d_i(x) > 0$ 
 $then j := j + 1; d_j(x) := d_i(x); h_j := h_i$ 
 $fi$ 
 $od;$ 
```

m := j;
od.

Приведем очень простую иллюстрацию: рассмотрим уравнение первого порядка $a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = t(x)$. Пусть $a_1(x) = -a_0(x) = x^3(x-1)^2(x-2)(x-4)^3$ — это пример 20 из работы [6] (правая часть уравнения здесь для нас интереса не представляет). Тогда как описанный выше алгоритм, так и алгоритм из [6] дают знаменатель

$$(6) \quad ((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))^3.$$

Если же взять $a_1(x) = -a_0(x) = x(x-1)^2(x-2)(x-4)^3$, то алгоритм из [6] вновь даст (6). Алгоритм из [1] даст $(x-1)((x-2)(x-3)(x-4))^3$. В то же время предложенный выше алгоритм даст полином меньшей степени: $(x-1)((x-2)(x-3)(x-4))^2$. Отметим, что алгоритм из [6] ориентирован лишь на уравнения первой степени. В то же время все обсуждаемые алгоритмы не требуют факторизации полиномов, и в приведенных примерах мы берем профакторизованные полиномы только для того, чтобы сделать эти примеры более ясными.

Автор благодарит А.Брейтфус за обсуждение первого варианта статьи.

Список литературы

1. Абрамов С.А. Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1989. Т.29. № 11. с. 1611–1620.
2. Petkovsek M. Finding closed-form solutions of difference equations by symbolic methods. Ph.D.thesis, Pittsburg PA: Carnegie Mellon University, CMU-CS-91-103. 1990.
3. Petkovsek M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients // J.Symb.Comp. 1992. V.11. P. 243–264.
4. Gosper R. W. Jr. Indefinite Hypergeometric Sums in MACSYMA // Proc. of the 1977 MACSYMA, NASA Conference Proceedings. 1977. NASA CP-2012.
5. Абрамов С.А. Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений // Вестн. МГУ. Сер.15. Вычисл.матем. и кибернетика. 1989. № 3. с. 56–60.
6. Paule P. Greatest-Factorial Factorization and Symbolic Summation I // RISC-Linz Report Series. 1993. № 93-02.
7. Абрамов С.А., Квашенко К.Ю. Наибольший общий делитель полиномов, зависящих от параметра // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1993. № 2. с. 65–71.
8. Abramov S.A., Kvashenko K.Yu. On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter // Proc. of ISSAC'93, 1993, Kiev. P. 152–156.

Поступила в редакцию 12.01.94

S.A.Abramov
Denominators of rational solutions of linear difference equations

We describe a new algorithm for building up rational solutions of linear difference equations with polynomial coefficients.

Абрамов Сергей Александрович, окончил Московский государственный университет в 1969 г. Доктор физ.-мат. наук (1983). В настоящее время ведущий научный сотрудник отдела систем математического обеспечения ВЦ РАН, профессор кафедры алгоритмических языков факультета ВМиК МГУ. Научные интересы — алгоритмы компьютерной алгебры.