Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных*

С. А. Абрамов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына

Российской академии наук

sabramov@ccas.ru

М. Бронштейн

ИНРИА, София-Антиполис

Франция

Аннотация

Рассматривается вопрос существования решений y линейной дифференциальной или разностной системы, указанные компоненты $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$ которых принадлежат данному классу функций, а также задача построения этих компонент. Библ. 20.

Ключевые слова : компьютерная алгебра, линейные системы дифференциальных и разностных уравнений, решение системы по отношению к части неизвестных.

1 Введение

Пусть K — дифференциальное поле, например, поле рациональных функций с вещественными или комплексными коэффициентами и S —

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Eco-Net министерства иностранных дел Франции (код проекта 08119TG) и РФФИ (код проекта 04-01-00757).

система дифференциальных уравнений

$$y' = Ay, \tag{1}$$

$y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. В компьютерной алгебре имеются многочисленные алгоритмы для построения решений систем вида (1), принадлежащих K и его расширениям. Если K — это поле рациональных функций, то можно находить решения в этом же поле, решения в виде гиперэкспоненциальных функций (функций с рациональной логарифмической производной), алгебраических и лиувиллевых функций и т.д. (см. [1], [2]). Но эти алгоритмы находят лишь решения в виде таких векторов y, *все* компоненты которых принадлежат заданному классу. В настоящей статье мы занимаемся следующей задачей построения решений по отношению к части неизвестных: выделено подмножество $\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}\}$ компонент вектора y, и задан подходящий класс функций F (замкнутое относительно дифференцирования линейное пространство над полем K); для таких решений y системы (1), все выделенные компоненты которых принадлежат F, найти эти компоненты. Например, задача может состоять в том, что для данной системы (1), где K — поле рациональных функций, $n \geq 2$, надо найти все пары таких рациональных функций, которые являются первой и второй компонентами некоторого решения $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, при этом вид остальных компонент решения не обсуждается и не принимается в расчет.

В компьютерной алгебре рассматриваются и такие решения систем, которые содержат некоторые ряды (алгоритм построения такого решения должен быть способным вычислить любое число членов ряда); примером являются регулярные формальные решения дифференциальной системы (см. [3], [4], [5]), когда, например, K — поле рациональных функций с комплексными коэффициентами. В окрестности фиксированной точки x_0 эти решения имеют вид $(x-x_0)^\lambda \sum_{\nu=0}^{k} \varphi_\nu(x-x_0)\log^\nu(x-x_0)$, где все $\varphi_\nu(x-x_0)$ суть ряды Лорана, $\lambda \in \mathbb{C}$. В окрестности нерегулярной особой точки система не обязана иметь решение, все компоненты которого являются регулярными, и обсуждаемая задача имеет смысл в этом контексте.

Мы можем рассматривать также классы таких функций, которые не являются функциями, представленными в “замкнутом виде” даже в самом широком смысле этого слова, например, мероморфные функции.

В разд. 3 предлагается алгоритм, который приводит к получению одного из двух возможных результатов:

1) к заключению о том, что если выделенные компоненты решения принадлежат заданному классу F, то все остальные компоненты также принадлежат этому классу;

2) к новой системе меньшего порядка, неизвестные которой суть выделенные компоненты решения исходной системы и некоторые их производные; если выделенные компоненты исходной системы принадлежат заданному классу F, то все компоненты соответствующего решения новой системы принадлежат этому классу.

Задача частичного построения решений созвучна задаче исследования наблюдаемости и устойчивости решений систем по части неизвестных (см. [6], [7], [8]). В разд. 4 мы останавливаемся на этом вопросе и сопоставляем наш подход с известным в механике подходом, основанном на μ-преобразованиях, предложенных в [7]. Надо отметить, что новый базис, выбираемый нами для преобразования системы, содержит векторы, принадлежащие множеству, которое рассматривалось в [8] в связи с задачами устойчивости и наблюдаемости. Однако, подчеркнем, частичное построение решений в названных работах не рассматривалось.

В разд. 2 вводятся понятия m-ранга системы и допустимого разбиения m-ранга, с помощью которых обосновывается наш подход. В разд. 4 особо рассматривается случай $m = 1$, т.е. случай, когда нас интересует лишь одна компонента решения. Мы показываем, что являющееся следствием системы (1) линейное однородное уравнение минимального порядка для y_1 (для его получения строим линейные формы, выражающие $y_1, y_1', y_1'', \ldots$ через $y_1, \ldots, y_n$, до возникновения линейной зависимости) не имеет посторонних решений. Утверждение, которое содержится в §1.2 книги [9] о том, что уравнение порядка, не превышающего n, для y_j, $1 \leq j \leq n$, может иметь “и другие решения, которые не являются j-й компонентой системы” справедливо лишь когда порядок этого уравнения не является минимальным.

В разд. 6 на основе понятия допустимого разбиения m-ранга формулируется и доказывается некоторая локальная теорема существования для нелинейных автономных систем. В разд. 7 обсуждается случай разностных систем. В разд. 8 кратко говорится о том, что алгоритм допускает описание и реализацию на уровне некоммутативных полиномов Оре, что позволяет написать единую компьютерную программу, настраиваемую на дифференциальный, разностный и некоторые другие случаи.

Далее мы для простоты полагаем, что $(i_1, \ldots, i_m) = (1, 2, \ldots, m)$. Таким образом, мы будем интересоваться компонентами $y_1, \ldots, y_m$, $m \le n$, решения системы S. Дополнительно мы будем предполагать, что помимо класса F еще имеется класс G, $F \subseteq G$, также являющийся линейным пространством над K, такой, что любая система вида $y' = Ay + b$, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, $b \in F^n$, имеет по крайней мере одно решение в G^n, т.е. решение, все компоненты которого принадлежат G. (Мы не специфицируем этот класс и не обсуждаем его строение, просто предполагая, что он существует.) Это предположение вполне естественно, и оно освобождает нас от рассмотрения вопросов дифференциальной алгебры, связанных с расширениями Пикара-Вессио (см. [2]) и т.д. В тех случаях, когда говорится о решениях системы без указания класса, к которому они принадлежат, подразумеваются решения с компонентами из G. Элементы пространств F и G мы называем функциями, хотя возможен и более формальный дифференциально-алгебраический взгляд на эти пространства.

2 Допустимые разбиения m-ранга системы

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства линейных форм от $y_1, \ldots, y_n$ над K:

$$e_1 = y_1, \ldots, e_n = y_n.$$

Каждую линейную форму f мы можем дифференцировать в силу системы S, получая вновь линейную форму от $y_1, \ldots, y_n$. Отождествляя линейную форму с вектором-столбцом ее коэффициентов, получаем для производных в силу системы:

$$f^{(0)} = f, \;\; f^{(i)} = A^T f^{(i-1)} + \frac{d}{dx} f^{(i-1)}, \;\; i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\frac{d}{dx} f^{(i-1)}$ есть результат покомпонентного дифференцирования вектора-столбца $f^{(i-1)}$.

Размерность l линейного пространства $\mathrm{Span}_m(S)$ линейных форм, порожденного $e_1, \ldots, e_m$ и всеми линейными формами $e_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$j = 1, 2, \ldots$, называется *m-рангом* системы S. Если неотрицательные целые $l_1, \ldots, l_m$ таковы, что линейные формы

$$e_1,\ e_1^{(1)},\ \ldots\ , e_1^{(l_1-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

$$e_m,\ e_m^{(1)},\ \ldots\ , e_m^{(l_m-1)},$$

образуют базис

$$f_1, \ldots, f_l$$

пространства $\mathrm{Span}_m(S)$, $l = l_1 + \cdots + l_m$, то упорядоченный набор $(l_1, \ldots, l_m)$ является *допустимым разбиением* m-ранга системы S.

Пример 1. Рассмотрим систему $y' = Ay$ трех уравнений с постоянными коэффициентами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2-ранг l этой системы равен трем, и единственное допустимое разбиение l — это $(2, 1)$. Например, разбиение $(1, 2)$ не является допустимым, так как $e_2' = e_2$. С другой стороны, 3-ранг этой системы имеет три допустимых разбиения $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$.

Производная в силу системы S любой линейной формы из (3), т.е. из $f_1, \ldots, f_l$, является линейной комбинацией (над K) линейных форм $f_1, \ldots, f_l$. Введем новые неизвестные $z_1, \ldots, z_l$, которые выражаются через $y_1, \ldots, y_n$ посредством линейных форм $f_1, \ldots, f_l$. Пусть матрица $B \in \mathrm{Mat}_l(K)$ такова, что вектор-столбец коэффициентов производной линейной формы f_i в силу системы S равен произведению B на вектор-столбец коэффициентов f_i, $i = 1, 2, \ldots, l$. Напишем систему уравнений

$$z' = Bz, \tag{4}$$

$z = (z_1, \ldots, z_l)^T$. Базис $f_1, \ldots, f_l$ можно расширить до базиса

$$f_1, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_n$$

пространства всех линейных форм от $y_1, \ldots, y_n$. Использование линейных форм из этого базиса для введения новых неизвестных $Z = (z_1, \ldots, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_n)$, соответствует замене вида

$$Z = Hy$$

с невырожденной матрицей $H \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Исходная система S преобразуется в

$$Z' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ U & V \end{pmatrix} Z. \tag{5}$$

Предложение 1 (i) *Проекции на $y_1, \ldots, y_m$ множества решений исходной системы S и, соответственно, системы $z' = Bz$ совпадают.*

(ii) *Если решение системы $z' = Bz$ таково, что его компоненты, равные $y_1, \ldots, y_m$, принадлежат заданному классу F, то и все его компоненты принадлежат этому классу.*

(iii) *Если m-ранг исходной системы равен n, и система обладает решением с компонентами $y_1, \ldots, y_m$, принадлежащими заданному классу F, то* все *компоненты такого решения принадлежат этому классу.*

Доказательство. (i) Положим $z = (z_1, \ldots, z_l)^T$, $\tilde{z} = (z_{l+1}, \ldots, z_n)^T$. Исходя из решения z системы (4), мы с помощью системы (5) получаем для $\tilde{z}$ неоднородную систему

$$\tilde{z}' = V\tilde{z} + Uz, \tag{6}$$

которая согласно сделанному в конце введения (разд. 1) предположению, должна иметь решение в классе G. С другой стороны, m из неизвестных $z_1, \ldots, z_l$ равны $y_1, \ldots, y_m$ (преобразование H не изменяет значения этих неизвестных):

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_1',\ \ldots,\ z_{l_1} = y_1^{(l_1-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_k = y_m,\ z_{k+1} = y_m',\ \ldots,\ z_l = y_m^{(l_m-1)}.$$

(ii) Очевидно, так как класс F замкнут относительно дифференцирования.

(iii) В этом случае система (5) имеет вид $Z' = BZ$, и при этом $y = H^{-1}Z$; далее принимаем во внимание (ii).

Беря $F = \{0\}$, получаем следствия предложения 1.

Следствие 1. Исходная система имеет ненулевое решение с нулевыми компонентами $y_1, \ldots, y_m$ если и только если m-ранг системы меньше n;

Следствие 2. *Все* компоненты ненулевого решения неприводимой над K системы (т.е. системы, которую невозможно привести к виду (5) с помощью линейной над K невырожденной замены неизвестных) являются ненулевыми.

Если мы интересуемся, скажем, рациональными или мероморфными решениями системы $z' = Bz$, то тот факт, что некоторые из неизвестных являются производными других, может быть использован для понижения априорных границ порядков полюсов решений (такие границы могут быть получены методами, рассмотренными в [10], [11]). Например, если мы знаем, что $z'_1 = z_2, z'_2 = z_3, \ldots, z'_{l-1} = z_l$, и что $\gamma > 0$ является верхней границей порядков полюсов неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_l$ в $x = x_0$, то в качестве более точных границ порядков полюсов функций $z_1, z_2, \ldots, z_{l-1}$ можно взять, соответственно, $\gamma - l, \gamma - l + 1, \ldots, \gamma - 1$. Если оказывается, что $\gamma - l \leq 0$, то это означает, что ни одна из функций $z_1, \ldots, z_l$ вообще не имеет полюса в x_0.

3 Алгоритм

Вычисление m-ранга исходной системы и построение системы $z' = Bz$ вида (4) играют ключевую роль в решении рассматриваемой проблемы.

Алгоритм описывается следующим образом: если m-ранг исходной системы равен n, то выдать сообщение, что коль скоро выделенные компоненты решения системы принадлежат заданному классу, то и все компоненты принадлежат ему; если же m-ранг системы меньше n, то построить систему $z' = Bz$ так, как описано в разд. 2, найти ее решения, все компоненты которых принадлежат заданному классу, и выдать соответствующее подмножество компонент этих решений (удаляя компоненты-производные).

Здесь уместно вернуться к сказанному во введении: компьютерная алгебра располагает многочисленными алгоритмами построения таких решений систем вида (1), все компоненты которых принадлежат тому или иному классу функций. Эти алгоритмы подразделяются на два типа. К первому типу относятся алгоритмы, использующие сведение системы к скалярному уравнению n-го порядка, — такое сведение называется *анкаплингом* (uncoupling), оно достигается, как правило, построением циклического вектора, о чем мы скажем несколько слов в следующем разделе. Ко второму типу относятся не использующие это сведение алгоритмы, они называются *прямыми*. Прямые алгоритмы зарекомендовали себя в системах компьютерной алгебры как более быстрые, но, однако, таких алгоритмов известно не очень много. Для случая, когда K — поле рациональных функций, здесь можно назвать алгоритмы поиска рациональных решений (см.[11], [10]) и регулярных формальных решений (см. [4], [5]), нерегулярных решений с использованием рядов Пюизо (см. [12]). Но, скажем, алгоритмы поиска лиувиллевых решений или, что то же самое, решений в квадратурах (см. [2]) предназначены для скалярного случая, а для решения систем используется анкаплинг.

Описанный в этом параграфе алгоритм обеспечивает выполнение предварительного этапа, предшествующего поиску тем или иным способом решений системы $z' = Bz$ (которую можно было бы назвать m-системой), все компоненты которых принадлежат заданному классу.

Завершим обсуждение алгоритм замечанием, касающимся случая, когда m-ранг исходной системы равен n. Здесь тоже можно построить матрицу B, она будет иметь размер $n \times n$. В алгоритме, однако, предлагается не строить матрицу B, а вернуться в этом случае к исходной системе $y' = Ay$ (операции, которые преобразуют A в B, могут привести к "распуханию" выражений, являющихся матричными элементами). Но если не предполагать, что F является линейным пространством над K, а считать лишь, что F замкнуто относительно дифференцирования (задача, несколько отличающаяся от рассматриваемой нами), то переход к системе $z' = Bz$ необходим и в случае m-ранга, равного n. В этом случае часть (iii) предложения 1 не работает, так как $H^{-1}z$ может содержать не принадлежащие F компоненты. Так будет, например, если $K = \mathbb{Q}(x)$ и нас интересуют полиномиальные компоненты $y_1, \ldots, y_m$, или эти же компоненты в виде целых функций. Так, например, для системы

$$y' = \begin{pmatrix} -1/x & 2x \\ 0 & -1/x \end{pmatrix} y,$$

$n = 2$, $m = 1$, и ее 1-ранг равен 2. Эта система имеет линейно независимые над полем констант решения $(x, 1/x)^T$, $(1/x, 0)^T$, откуда следует, что у нее нет решений, обе компоненты которых полиномиальны. Рассмотрение исходной системы вместо $z' = Bz$ не позволит найти полиномиальную компоненту $y_1 = x$. При этом

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/x^2 & -1/x \end{pmatrix},$$

и решения соответствующей системы, обе компоненты которых полиномиальны, представляются в виде произведения произвольной константы на $(x, 1)^T$.

Добавим к сказанному, что обычно поиск полиномиальных решений разбивается на два этапа: поиск априорной верхней границы для степеней полиномов, являющихся компонентами любого такого решения, и последующий поиск этих компонент, например, методом неопределенных коэффициентов. Здесь можно прибегнуть к упрощению, подобному описанному в конце раздела 2. Если известно, что степень любого из полиномов $z_1, z_2, \ldots, z_l$ меньше, чем $\gamma \geq 0$, и при этом $z_1' = z_2, z_2' = z_3, \ldots, z_{l-1}' = z_l$, то $\deg z_2 \leq \gamma - 1$, $\deg z_3 \leq \gamma - 2, \ldots, \deg z_l \leq \gamma - l + 1$; если же для некоторого i, $1 \leq i \leq l - 1$, оказывается, что $\gamma - 1 < 0$, то это означает, что $z_{i+1} = \ldots = z_l = 0$.

4 Случай $m = 1$

Если $m = 1$, то матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ g_0 & g_1 & \ldots & g_{l-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где l равно 1-рангу исходной системы. Множество решений системы $z' = Bz$, очевидно, совпадает в этом случае с множеством векторов $(u, u', \ldots, u^{(l-1)})^T$, где u пробегает все решения уравнения $Lu = 0$ при

$$L = \frac{d^l}{dx^l} - \sum_{i=0}^{l-1} g_i \frac{d^i}{dx^i}.$$

Применяя предложение 1 к случаю $m = 1$, получаем, что любое $y_1 = u$, где u — решение уравнения $Lu = 0$, может быть дополнено до решения системы $y' = Ay$. Мы видим, что справедливо

Предложение 2 *Все решения уравнения $Lu = 0$ и только они являются y_1-компонентами всех решений y системы $y' = Ay$.*

Заметим, что если 1-ранг системы (1) равен n, то y_1 является так называемым *циклическим вектором* (см. [13]) для этой системы, и справедливость предложения 2 для этого случая ни у кого не вызывала сомнений; упоминавшееся во введении недоразумение, связанное с цитатой из [9], касалось случая меньших значений m-ранга. Циклический вектор системы вида (1) — это линейная форма $v = v_1 y_1 + \cdots + v_n y_n$ с коэффициентами из K такая, что v вместе с производными в силу системы $v', \ldots, v^{(n-1)}$ образуют базис пространства $\mathrm{Span}_n(S)$. Уравнение для v минимального порядка, являющееся следствием системы, имеет в этом случае порядок n. Доказано, что при широких предположениях относительно поля K циклический вектор существует, и известны алгоритмы его построения, среди которых случайный выбор коэффициентов $v_1, \ldots, v_n$ с проверкой линейной независимости $v, v^{(1)}, \ldots, v^{(n-1)}$ и, при необходимости, повторение этой процедуры вплоть до появления циклического вектора — вполне приемлемый.

В последующих примерах мы, рассматривая ту или иную задачу решения системы по отношению к части неизвестных, полагаем, как правило, что поле K коэффициентов системы и выбранный класс F образуют рациональные функции. Это делается исключительно из соображений простоты. Наш подход не связан жестко с этими предположениями.

Пример 2. Рассмотрим систему $y' = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3\,x & -1 - 2\,x & 2\,x \\ (1 - x - x^2)/x^2 & -1/x^2 & (1 - x - x^2)/x^2 \\ (1 - x - 3\,x^3)/x^2 & (x^2 - 1 + 2\,x^3)/x^2 & (1 - x - 2\,x^3)/x^2 \end{pmatrix},$$

$y = (y_1, y_2, y_3)^T$, $K = \mathbb{Q}(x)$. Допустим, что мы интересуемся всеми рациональными y_1, y_2. Так как 2-ранг этой системы равен 3, то любое ее решение с y_1 и y_2, принадлежащими какому-то подходящему классу, в частности, классу рациональных функций, должно иметь все компоненты, принадлежащие этому классу. Использование для поиска рациональных решений, например, прямого алгоритма из [10] показывает, что ненулевых рациональных решений этой системы не существует, и, следовательно, не существует и ненулевых решений, для которых обе компоненты y_1 и y_2 являются рациональными функциями. Если же мы интересуемся всеми возможными рациональными y_2, то соответствующий 1-ранг равен 2, и новая система $z' = Bz$ имеет матрицу B следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (x+3)/(x^3+x^2-x) & (x+3)(1-x)/(x^3+x^2-x) \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

при этом $z = (z_1, z_2)^T$, $z_1 = y_2, z_2 = y_2'$. Рациональные решения системы $z' = Bz$ могут быть найдены с помощью прямого алгоритма из [10]. Мы также видим, что по предложению 2 эта система эквивалентна скалярному уравнению $Ly_2 = 0$, где

$$L = (x - x^2 - x^3)\frac{d^2}{dx^2} + (x+3)(1-x)\frac{d}{dx} + x + 3\,;$$

проекция пространства решений $y' = Ay$ на y_2 совпадает с пространством решений $Ly_2 = 0$, которое, как можно показать, имеет базис $x-1$, $x^{-1}+x^{-2}$. Это означает, что уравнение $Ly_2 = 0$ не имеет никаких других решений, кроме рациональных, что y_2 является рациональной функцией для всех решений системы $y' = Ay$, и что для любых констант c_1, c_2 найдется ее решение y такое, что $y_2 = c_1(x-1)+c_2(x^{-1}+x^{-2})$. Пространство тех решений этой системы, для которых $y_2 = 0$, имеет размерность 1, так как система (6) в этом случае состоит из одного однородного уравнения первого порядка. Можно показать, что в полном соответствии с следствием 1 предложения 1 одномерное пространство тех решений этой системы, для которых $y_2 = 0$, порождается решением

$$y = e^{x^2/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если мы пользуемся каким-либо прямым алгоритмом поиска рациональных решений системы $z' = Bz$ с матрицей (8), то предварительное оценивание порядка полюсов может, например, дать верхнюю границу 3 для $x = 0$ и 1 для корней уравнения $x^2 + x - 1 = 0$; замена

$$z_1 = \frac{p_1(x)}{x^3(x^2-x+1)}, \quad z_2 = \frac{p_2(x)}{x^3(x^2-x+1)} \qquad (9)$$

в $z' = Bz$ приводит к довольно громоздкой системе для полиномов p_1, p_2, откуда находятся полиномы шестой степени такие, что рациональные функции (9) оказываются сократимыми на, соответственно, $x(x^2-x-1)$ и x^2-x-1. Если применить соображения, приведенные в самом конце разд. 2, то станет ясно, что решения системы $z' = Bz$ не имеет полюсов в корнях уравнения $x^2+x-1=0$, границей же полюса z_1 в 0 будет 2. Поэтому вместо (9) можно использовать замену $z_1 = p_1/x^2, z_2 = p_2/x^3$, что приведет к более простой системе, решением которой являются полиномы $p_1(x), p_2(x)$ третьей степени.

5 Структура матрицы B; частичная устойчивость нулевого решения в случае системы с постоянными коэффициентами

Мы уже видели, что при $m=1$ матрица системы $z' = Bz$ является сопровождающей матрицей вида (7). Рассмотрим случай $m>1$, в котором B есть $l \times l$-матрица следующего вида

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
* & \dots & * & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * & \dots & * & * \\
 & & & & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 1 & & & & & & & \\
* & \dots & * & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * & \dots & * & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
* & \dots & * & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * & \dots & * & * \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
* & \dots & * & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * & \dots & * & *
\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где звездочки $*$ означают какие-то элементы поля K. Если A в исходной системе является постоянной $n \times n$-матрицей, то B тоже будет постоянной.

Для исследования устойчивости относительно $y_1, \dots, y_m$ нулевого решения системы $y' = Ay$ с постоянной вещественной матрицей A (известная проблема классической механики (см. [6])) прямое применение критерия Рауса-Гурвица не помогает.

Пример 3. Рассмотрим систему $y' = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как характеристический полином имеет корень 1, решение $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ неустойчиво по Ляпунову. Как мы можем исследовать устойчивость этой системы относительно y_1? Согласно методу μ-преобразования, предложенному в [7] (см. также [6]), полагаем $\mu_1 = y_2 - 2y_3$ в первом уравнении

$$y_1' = -y_1 + y_2 - 2y_3$$

исходной системы. Получаем

$$\mu_1' = -y_1 - y_2 + 2y_3.$$

Благодаря тому, что 1-ранг исходной системы равен 2, неизвестные y_2, y_3 могут быть исключены. Имеем

$$y_1' = -y_1 + \mu_1$$

$$\mu_1' = -y_1 - \mu_1$$

(в общем случае пришлось бы вместо μ дополнительно использовать $\mu_1, \mu_2, \ldots$). Характеристическим полиномом последней системы является $-\lambda^2 - 2\lambda - 2$, корни которого суть $-1+i$, $-1-i$. Каждый из них имеет отрицательную вещественную часть, следовательно, решение $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ исходной системы асимптотически устойчиво относительно y_1.

Переход к системе $z' = Bz$, описанный нами в разд. 2, может быть использован вместо μ-преобразования. В рассматриваемом случае

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$z_1 = y_1, z_2 = y_1'$, и корни характеристического полинома равны $-1 + i$, $-1 - i$, как и после μ-преобразования.

В общем случае вид (10) матрицы B оказывается удобным, когда надо находить характеристический полином. Перестановка строк матрицы $B - \lambda I_l$ сводит задачу к вычислению определителя матрицы

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & & & & & & c_{1l} \\
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & & & & & & c_{ml} \\
\hdashline
-\lambda & 1 & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & -\lambda & 1 & & & & & \\
\hdashline
& & & -\lambda & 1 & & & & \\
& & & & \ddots & \ddots & & & \\
& & & & -\lambda & 1 & & & \\
\hdashline
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\hdashline
& & & & & & -\lambda & 1 & \\
& & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & -\lambda & 1
\end{pmatrix}, \qquad (11)
$$

где верхняя горизонтальная часть матрицы содержит m строк, следующие части содержат, соответственно, $l_1-1, \dots, l_m-1$ строк, $l_1+\cdots+l_m = l$. Исключения в верхней части матрицы с помощью единичных элементов последующих строк (сначала исключаем $c_{1n}, \dots, c_{ml}$, используя последнюю строку, затем используем предпоследнюю строку и т.д.) и дальнейшее разложение по столбцам, содержащим лишь по одному (единичному) элементу, сводит задачу нахождения определителя матрицы (11) к нахождению определителя $m \times m$-матрицы $(p_{ij}(\lambda))$, в которой

$$p_{ij} = c_{i,k_{j-1}+1} + c_{i,k_{j-1}+2}\lambda + \cdots + c_{i,k_j}\lambda^{l_j-1},$$

где $k_0 = 0$ и $k_j = l_1 + \cdots + l_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Этот определитель, который с точностью до знака совпадает с определителем матрицы (11), может быть вычислен стандартными методами. Таким образом, нам не обязательно выписывать и хранить всю матрицу (10), достаточно найти m ее строк, изображенных звездочками, и построить $m \times m$-матрицу $(p_{ij}(\lambda))$.

Предложение 3 *Пусть система S вида (1) с постоянными коэффициентами имеет m-ранг l, $l \geq m \geq 1$, пространство $\mathrm{Span}_m(S)$ обладает базисом (3), и вектор коэффициентов разложения $e_s^{(l_s)}$ по этому базису* *есть* $(d_{s1}, \ldots, d_{sl})$. *Тогда характеристический полином матрицы* B *системы (4), построенной так, как предписывает наш алгоритм, с точностью до знака совпадает с определителем* $m \times m$*-матрицы* $(p_{ij}(\lambda))$, *в которой*

$$p_{ij} = d_{i,k_{j-1}+1} + d_{i,k_{j-1}+2}\lambda + \cdots + d_{i,k_j}\lambda^{l_j-1} - \lambda^{l_j},$$

где $k_0 = 0$ *и* $k_j = l_1 + \cdots + l_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство непосредственно следует из сказанного выше о вычислении определителя матрицы (11): полагаем $c_{st} = d_{st} - \lambda$, если $t = k_j$ для некоторого $j \le m$, и $c_{st} = d_{st}$ в остальных случаях.

Предложение 3 является обобщением того, что если матрица (7) имеет постоянные элементы, то ее характеристический полином с точностью до знака равен $g_0 + g_1\lambda + \cdots + g_{l-1}\lambda^{l-1} - \lambda^l$.

Для случая постоянных коэффициентов Г.В.Плотников реализовал в Maple описанные выше алгоритмы построения матрицы B и вычисления характеристического полинома. Эксперименты показали, что если пользоваться программами Г.В.Плотникова, то время, затрачиваемое, например, на вычисление характеристического полинома матрицы B 20-го порядка с $m = 3$, как минимум, в два с половиной раза меньше, чем при использовании стандартных Maple-процедур.

Тот факт, что в случае системы с постоянными коэффициентами устойчивость нулевого решения исходной системы относительно $y_1, \ldots, y_m$ равносильна устойчивости нулевого решения системы $z' = Bz$ относительно всех ее неизвестных (это так и для метода μ-преобразования), выводится из того, что решения системы с постоянными коэффициентами имеют специальный (хорошо известный) вид. Однако в случае переменных коэффициентов это уже может не иметь места.

Пример 4. Уравнение

$$x(x+1)y'' - 2y' + (9x^6 + 9x^5 - 2)y = 0$$

имеет решения $(\sin x^3)/(x+1)$ и $(\cos x^3)/(x+1)$. Мы можем построить линейную систему из двух уравнений первого порядка для $y_1 = y, y_2 = y'$. Нулевое решение этой системы, очевидно, устойчиво относительно y_1 при $x \to +\infty$, но оно не устойчиво относительно y_1, y_2: например, функция $((\sin x^3)/(1+x))'$ не ограничена при $x \to +\infty$. Если применить к этой системе преобразование, описанное в разд. 2, то система не претерпит изменений.

6 m-ранг нелинейной автономной системы

Величина, которую мы называем m-рангом, используется в механике и теории управления, хотя часто в неявном виде, для исследования наблюдаемости системы через неизвестные $y_1, \ldots, y_m$ системы $y' = Ay$, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$: в определенном смысле система наблюдаема если и только если ее m-ранг равен n.

Понятию допустимого разбиения m-ранга, которое введено в этой статье, также можно найти дополнительные применения. Мы рассмотрим его возможное использование в теории автономных систем вида

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{12}$$

и таких, что $y_1(x) = \ldots = y_n(x) = 0$ является решением системы, т.е.

$$f_i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Предположим, что функции $f_1, \ldots, f_n$ являются достаточно гладкими, когда $|y_i| < r$, $i = 1, \ldots, n$, где r — некоторое положительное вещественное число. Для $0 < m \leq n$, определим m-ранг системы (12) как m-ранг (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) ее линеаризации $y' = Cy$ (C — постоянная $n \times n$-матрица).

Предложение 4 *Пусть m-ранг системы (12) равен l и $(l_1, \ldots, l_m)$ является допустимым разбиением l. Тогда существует ρ, $0 < \rho < r$, такое, что для любых $a_1, \ldots, a_m$, удовлетворяющих неравенствам $|a_i| < \rho$, $i = 1, 2, \ldots, m$, система (12) имеет решение $(y_1, \ldots, y_n)^T$, для которого*

$$y_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и

$$y_i^{(j)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, l_i - 1.$$

Доказательство. Мы ограничимся рассмотрением случая $m = 1$, доказательство общего случая аналогично. Обозначим посредством

$Q(y_1, \ldots, y_n)$ множество функций аргументов $y_1, \ldots, y_n$ таких, что каждая из этих функций определена в некоторой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$ и имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(y_1, \ldots, y_n) y_i y_j$$

с достаточно гладкими α_{ij}.

Предположим, что первые уравнения системы имеют вид

$$y'_k = y_{k+1} + \varphi_k(y_1, \ldots, y_n), \tag{14}$$

$\varphi_k \in Q(y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, l-1$. Индукцией по k легко доказывается, что

$$y_1^{(k)} = y_{k+1} + \psi_k(y_1, \ldots, y_n), \tag{15}$$

$\psi_k \in Q(y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, l-1$ (благодаря (13), дифференцирование по x любой функции из $Q(y_1, \ldots, y_n)$ в силу системы (12) дает функцию из $Q(y_1, \ldots, y_n)$). Подставляя $y_1^{(k)} = 0$ в (15), получаем

$$y_{k+1} + \psi_k(y_1, \ldots, y_n) = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, l-1$. Положим $\Psi_k(y_1, \ldots, y_n) = y_k + \psi_{k-1}(y_1, \ldots, y_n)$, $k = 2, \ldots, l$. Очевидно,

$$\Psi_k(0, \ldots, 0) = 0 \ \text{ и } \ \left.\frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i}\right|_{y_1 = \ldots = y_n = 0} = \delta_{ki},$$

$k = 2, \ldots, l$, $i = 1, 2, \ldots, n$. По теореме о неявной функции уравнения $\Psi_k(y_1, \ldots, y_n) = 0$, $k = 2, \ldots, l$, позволяют представить $y_2, \ldots, y_l$ как функции $y_1, y_{l+1}, \ldots, y_n$ для $|y_1| < \rho$, $|y_{l+1}| < \rho, \ldots, |y_n| < \rho$, где ρ — достаточно малое вещественное положительное число:

$$y_k = y_k(y_1, y_{l+1}, \ldots, y_n), \ \ k = 2, \ldots, l.$$

Отсюда следует, что для произвольных $y_1(0), y_{l+1}(0), \ldots, y_n(0)$ таких, что $|y_1(0)| < \rho, |y_{l+1}(0)| < \rho, \ldots, |y_n(0)| < \rho$ мы можем определить $y_2(0), \ldots, y_l(0)$, для которых соответствующее решение обладает требуемым свойством: $y'_1(0) = y''_1(0) = \ldots = y_1^{(l)}(0) = 0$.

Вернемся к линейной системе $y' = Ay$ трех уравнений с постоянными коэффициентами из примера 1, общее решение которой есть

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \;\; y_2 = c_3 e^x, \;\; y_3 = c_1 e^x - c_2 e^{-x}.$$

Как отмечалось, 2-ранг l этой системы равен 3, и единственным допустимым разбиением l служит $(2, 1)$. В соответствии с предложением 4 для любых a_1, a_2 система имеет решение

$$y_1 = \frac{a_1}{2} e^x + \frac{a_1}{2} e^{-x}, \;\; y_2 = a_2 e^x; \;\; y_3 = \frac{a_1}{2} e^x - \frac{a_1}{2} e^{-x},$$

такое, что $y_1(0) = a_1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = a_2$.

Рассмотрим разбиение $(1, 2)$, которое не является допустимым. Если $a_2 \neq 0$, то $y_2(0) = a_2$ влечет, что $y_2'(0) \neq 0$ (потому что $y_2'(x) = y_2(x)$).

Это показывает важность допустимости разбиения l в условии предложения 4.

Примечание 1 к предложению 4. Решение $(y_1, \ldots, y_n)^T$, существование которого утверждается в предложении, может быть взято таким, что

$$|y_k(0)| < M\rho, \;\; k = m+1, m+2, \ldots, n \tag{16}$$

для некоторого M, зависящего от исходной системы, но не от $a_1, \ldots, a_m$. Доказательство вновь проведем для случая $m = 1$. Любая система 1-ранга l может быть преобразована (линейным преобразованием неизвестных с постоянной невырожденной $n \times n$-матрицей T) в систему, первые $l - 1$ уравнений совпадают с (14) и y_1 не изменяется под действием T. Абсолютные значения всех остальных переменных увеличиваются не более, чем в M раз, где M — это максимум абсолютных величин элементов матрицы T. Отсюда следует, что соответствующее решение обладает свойством (16).

Примечание 2 к предложению 4. В линейном (не обязательно автономном) случае это предложение справедливо в более общей форме: существует решение такое, что $y_i^{(j)}(0), \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 0, 1, \ldots, l_i - 1$, имеют произвольные заданные значения.

7 Разностные системы

Результаты разд. 1 – 4, 6 справедливы для разностных систем, если мы в функциональном случае используем сдвиг E по независимой переменной на 1 вместо дифференцирования: $E\varphi(x) = \varphi(x+1)$; в абстрактной алгебраической ситуации E может быть любым автоморфизмом поля K. Последовательные сдвиги $f^{[0]}, f^{[1]}, \ldots$ линейной формы f в силу системы $Ey = Ay$ определяются сходно с последовательными производными в дифференциальном случае; как аналог формул (2) мы имеем

$$f^{[0]} = f, \quad f^{[i]} = A^T(Ef^{[i-1]}), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $Ef^{[i-1]}$ есть результат покомпонентного сдвига вектор-столбца $f^{[i-1]}$ (мы вновь отождествляем линейную форму с вектор-столбца ее коэффициентов в базисе $y_1, \ldots, y_n$).

Пример 5. Рассмотрим систему $Ey = Ay$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x(x+1)^2} & -x & 1 \\ 1 & \frac{x^2+2x-1}{x(x+1)} & x & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x+1 & 0 & 0 & \frac{x+1}{x} \end{pmatrix},$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, \quad K = \mathbb{Q}(x)$. Предположим, нас интересуют рациональные y_1, y_2. Общее рациональное решение исходной системы есть произведение произвольной константы на вектор $(0,\ 0,\ 1,\ x)^T$. 2-ранг системы равен 3, и мы можем построить новую систему $Ez = Bz$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x^4+6x^3+13x^2+14x+4}{x(x+1)(x+2)^2} & \frac{2x^4+11x^3+21x^2+17x+4}{x(x+1)(x+2)^2} & \frac{3x^2+6x+2}{x^2(x+1)^3(x+2)} \\ 2 & -1 & \frac{x^3+3x^2+x-2}{x(x+1)^2} \end{pmatrix},$$

$z = (z_1, z_2, z_3)^T$, $z_1 = y_1, z_2 = Ey_1, z_3 = y_2$. Общее рациональное решение исходной системы есть произведение произвольной константы на вектор $(1/x,\ 1/(x+1),\ x+1)^T$. Обе компоненты y_1, y_2 решения исходной системы суть рациональные функции если и только если $y_1 = c/x$, $y_2 = c \cdot (x+1)$, где c — константа.

В разностном случае, так же как и в дифференциальном, алгоритмы решения систем подразделяются на два типа, — алгоритмы, использующие сведение системы к скалярному уравнению n-го порядка, и прямые алгоритмы. Для случая, когда K — поле рациональных функций, в качестве прямых можно назвать алгоритмы поиска рациональных решений (см. [14], [10]), регулярных и нерегулярных формальных решений (см. [15]). Как и в дифференциальном случае, алгоритмы поиска лиувиллевых решений (см. [16]) предназначены для скалярного случая, и для решения систем используется анкаплинг. Алгоритмы поиска решений в виде гипергеометрических термов и их линейных комбинаций (см. [17], [18]) ориентированы на скалярный случай, но идея алгоритма из [18], как утверждает его автор, переносится и на случай систем.

Предложение 4 в разностном случае утверждает, что если m-ранг разностной автономной системы равен l, и $(l_1, \ldots, l_m)$ является допустимым разбиением l, то найдется ρ, $0 < \rho < r$, такое, что для любых $a_1, \ldots, a_m$, удовлетворяющих неравенствам $|a_i| < \rho$, $i = 1, 2, \ldots, m$, система обладает решением $(y_1, \ldots, y_n)^T$, для которого

$$y_i(0) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и

$$E^j y_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, l_i - 1,$$

т.е.

$$y_i(0) = a_i, \ \ y_i(1) = \cdots = y(l_i - 1) = 0, \quad i = 1 \ldots, m.$$

Мы также можем использовать $\Delta = E - 1$ вместо E; это ведет к другому решению, для которого выполнено

$$\Delta^j y_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, l_i - 1,$$

т.е.,

$$y_i(0) = y_i(1) = \cdots = y_i(l_i - 1) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

8 Настраиваемый алгоритм

Алгоритм построения новой системы с матрицей B, порядок которой равен m-рангу исходной системы, в дифференциальном и разностном случаях имеют много общего, что позволяет описать их в едином общем виде с привлечением некоммутативных полиномов Оре (об их использовании в компьютерной алгебре см., например, [19], [20]). Это дает возможность применять алгоритм, например, и в q-разностном случае. В таком обобщенном виде алгоритм был реализован Д.Е.Хмельновым в Maple. Матрицы B для систем из примеров 2 и 5 могут быть построены обращением к одной и той же процедуре, настраиваемой с помощью специальных параметров на то или иное кольцо полиномов Оре (в отношении примеров 2 и 5, соответственно, на дифференциальный и разностный случаи).

Авторы благодарят С.Я.Степанова (ВЦ им. А.А.Дородницына РАН) и М.Баркату (университет г.Лимож) за ценные консультации, касающиеся частичной устойчивости решений и дифференциальных следствий систем, а также М.ван Хое (университет штата Флорида) за разъяснения, касающиеся возможности прямого применения алгоритма из [18] к системам разностных уравнений.

Список литературы

[1] Bronstein M. Computer algebra algorithms for linear ordinary differential and difference equations// Progress in Math. Basel: Birkhäuser, 2001. V. 202. P. 105–119.

[2] Singer M.F., van der Put M. Galois theory of linear differential equations. Grundlehren der Math. Wiss., V. 328. Heidelberg: Springer. 2003.

[3] Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

[4] Barkatou M.A., Pfluegel E. An algorithm computing the regular formal solutions of a system linear differential equations// J. Symbolic Comput. 1999. V. 28. P. 569–587.

[5] Abramov S.A., Bronstein M., Khmelnov D.E. On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems. Proc. of CASC'05. Computer Algebra in Scientific Computing. Lect. Notes in Comput. Science, 3718. P. 1–12. Berlin Heildelberg: Springer. 2005.

[6] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научн. мир, 2001.

[7] Воротников В.И., Прокопьев В.П. Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем// Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. С. 268–271.

[8] Черменский А.Г. Наблюдаемость и устойчивость по части переменных. Дифференциальные уравнения// 1987. Т. 23. N 4. С. 680–685.

[9] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.

[10] Abramov S.A., Bronstein M. On solutions of linear functional systems. Proc. of ISSAC'2001. P. 1–6. New York: ACM Press, 2001.

[11] Barkatou M.A. On rational solutions of systems of linear differential equations// J. Symbolic Comput. 1999. V. 28. P. 547–567.

[12] Pfluegel E. An algorithm for computing exponential solutions of first prder linear differential systems. Proceedings of ISSAC'1997, p. 164–171. ACM Press, 1997.

[13] Cope F.T. Formal solutions of irregular differential equations// Am. J. Math. 1936. V 58. P. 130–149.

[14] Abramov S.A., Barkatou M.A. Rational solutions of first order difference systems. Proc. of ISSAC'1998. P. 124–131. New York: ACM Press, 1998.

[15] Barkatou M.A., Chen G. Computing the exponential part of a formal fundamental matrix of a linear difference system// J. Difference Equat. and Applic. 1999. V. 5. P. 117–142.

[16] Singer M.F., Hendriks P.A. Solving difference equations in finite terms. J. Symbolic Comput. 1999. V. 27. P. 239–259.

[17] Petkovšek M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients// J. Symbolic Comput. 1992. V. 14. P. 243–264.

[18] van Hoeij M. Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equation// J. Pure and Appl. Algebra. 1999. V. 139, P. 109–131.

[19] Bronstein M., Petkovšek M. On Ore rings, linear operators and factorisation// Программирование. 1994. N 1. С. 27–44.

[20] Bronstein M., Petkovšek M. An introduction to pseudo-linear algebra// Theor. Comput. Sci. 1996. V. 157. P. 3–33.