МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
Информатика
и Управление
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

УДК 519.6.
ББК 22.19

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"
Федеральное государственное учреждение
"ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ"
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК"
Вычислительный центр им. А.А.Дородницына

---

Научная конференция «Вычислительная математика и ее приложения», посвященная памяти Александра Александровича Абрамова

Вычислительная математика и ее приложения — материалы конференции памяти А.А.Абрамова (1926 – 2019). Долгопрудный, МФТИ, 9 ноября 2019 г.

В сборнике представлены тезисы докладов участников конференции.
Тираж 150 экз.

Ответственные редакторы:
д.ф.-м.н. С.А.Абрамов,
д.ф.-м.н. В.Ж.Сакбаев

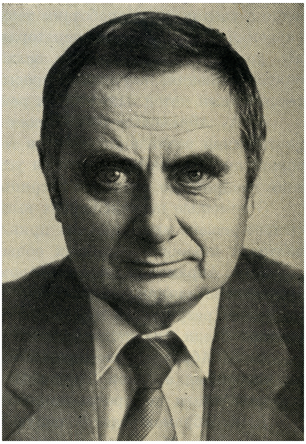
## Программный комитет конференции

- Евтушенко Юрий Гаврилович (председатель), г.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Ерешко Феликс Иванович, зав. отделом ФИЦ ИУ РАН
- Зубов Владимир Иванович, в.н.с. ФИЦ ИУ РАН, профессор МФТИ
- Иванов Григорий Евгеньевич (зам. председателя), зав. кафедрой высшей математики МФТИ
- Конюхова Надежда Борисовна, в.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Курочкин Сергей Владимирович, с.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Райгородский Андрей Михайлович, директор школы ФПМИ МФТИ
- Сакбаев Всеволод Жанович, зам. заведующего кафедрой высшей математики МФТИ
- Скороходов Сергей Леонидович, в.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Степанов Сергей Яковлевич, зав. отделом ФИЦ ИУ РАН
- Флеров Юрий Арсеньевич, г.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Шананин Александр Алексеевич, зав. кафедрой "Анализ систем и решений" МФТИ

## Оргкомитет конференции

- Райгородский Андрей Михайлович – председатель, Директор Физтех-школы прикладной математики и информатики ФПМИ
- Абрамов Сергей Александрович – зам. председателя, г.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Иванов Григорий Евгеньевич - зам. председателя, заведующий кафедрой высшей математики МФТИ
- Сакбаев Всеволод Жанович - зам. председателя, зам. заведующего кафедрой высшей математики МФТИ
- Бусовиков Владимир Михайлович, студент ФУПМ МФТИ
- Завадский Дмитрий Викторович, аспирант ФУПМ МФТИ
- Замана Константин Юрьевич, аспирант кафедры высшей математики МФТИ
- Зонн Иветта Арсеновна, гл. специалист ФИЦ ИУ РАН
- Маркашева Вера Алексеевна, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ
- Михайлов Гурий Михайлович, с.н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Прончева Ольга Геннадьевна, ассистент кафедры высшей математики МФТИ
- Рябенко Анна Андреевна, н.с. ФИЦ ИУ РАН
- Хмельнов Денис Евгеньевич, м.н.с. ФИЦ ИУ РАН

# Александр Александрович Абрамов
# (14.02.1926–10.01.2019)



Выдающийся ученый Александр Александрович Абрамов, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, прошел длинный жизненный и творческий путь. Он родился в г. Москве в семье учителей. В 1946 г. А.А.Абрамов окончил с отличием механико-математический факультет МГУ по кафедре теории функций и функционального анализа и поступил в аспирантуру МГУ. Его научным руководителем в эти годы был И.М.Гельфанд. В 1949 г. А.А.Абрамов защитил кандидатскую диссертацию "Топологические инварианты римановых пространств и пространств аффинной связности" , которую официальные оппоненты Л.С.Понтрягин и П.К.Рашевский оценили как выдающийся вклад в науку. В том же году А.А.Абрамов поступил на работу в Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР в Отдел приближенных вычислений, руководимый Л.А.Люстерником, и с тех пор научная деятельность Александра Александровича была неразрывно связана с вычислительной математикой и ее приложениями. С 1955 г. А.А.Абрамов становится одним из ведущих ученых Вычислительного центра АН СССР, заведующим Лабораторией теоретических исследований, которая вскоре была переименована в Отдел вычислительных методов. В 1974 г. он защитил докторскую диссертацию

"Методы решения некоторых линейных задач". А.А.Абрамов возглавлял Отдел вычислительных методов до 1991 г., занимая затем до конца своих дней должность главного научного сотрудника этого отдела. На протяжении многих лет А.А.Абрамов также вел активную педагогическую деятельность: с 1952 г. он преподавал в МФТИ, являясь с 1976 г. профессором кафедр высшей математики и математической физики. В 2005 году Ученый совет МФТИ присвоил ему звание почетного профессора.

А.А.Абрамову принадлежат значительные достижения в области вычислительных методов алгебры и дифференциальных уравнений и их применения к решению конкретных прикладных задач математической физики. Он является автором оригинальных высокоэффективных алгоритмов, нашедших широкое применение в вычислительной практике. Большой цикл работ А.А.Абрамова посвящен методам решения задач линейной алгебры высокой размерности, возникающих при приближенном решении уравнений в бесконечномерных пространствах. Методы основаны на аппроксимации таких задач задачами меньшей размерности. А.А.Абрамов дал оценки эффективности получающихся при этом итерационных процессов. Он предложил алгоритмически простой метод ускорения итерационного процесса для решения систем линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Одним из первых он провел исследование влияния накопления случайных погрешностей при решении систем ЛАУ методом исключения. А.А.Абрамов предложил устойчивый численный метод переноса граничных условий при решении краевых задач (КрЗ) для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), известный как "ортогональная дифференциальная прогонка Абрамова". Важным вкладом в теорию и методы численного решения ОДУ явились работы А.А.Абрамова по сингулярным системам линейных ОДУ. Им было обнаружено, что для широкого класса практически важных граничных условий в регулярной особой точке все семейство решений, удовлетворяющих заданному граничному условию, рассмотренное как единое целое, может быть задано разложениями гораздо более удобными, чем разложения для отдельных решений. Этот факт позволил предложить устойчивый способ переноса граничного условия из особой точки в точку, близкую к особой. А.А.Абрамов ввел и исследовал понятие допустимого граничного условия в особой точке. Эти идеи оказались плодотворными и были перенесены его учениками на ОДУ с иррегулярными особыми точками и на широкий класс нелинейных ОДУ. В результате были созданы целостная математическая теория и эффективные методы решения сингулярных КрЗ. В процессе численного решения КрЗ для нелинейных уравнений с частными производными, описывающих явления с фазовыми переходами, А.А.Абрамовым вместе с учениками были разработаны теория и методы решения некоторых типов нелинейных уравнений с монотонными операторами. При этом на операторы не накладывается каких-либо условий, заменяющих в ослабленной форме непрерывность. Было введено общее понятие решения, изучены вопросы его существования и единственности, предложен итерационный метод нахождения решения. А.А.Абрамовым были разработаны и исследованы эффективные алгоритмы, важные для практической реализации методов теории устойчивости и близких к ней разделов: численного построения проектора на устойчивое корневое подпространство матрицы, извлечения квадратного корня из матрицы и другие. Ему также принадлежат яркие работы по специальным функциям, самосопряженным и несамосопряженным спектральным задачам, в том числе многопараметрическим, системам дифференциально-алгебраических уравнений и многие другие. С помощью перечисленных методов А.А.Абрамовым и его учениками были успешно решены многочисленные важные прикладные задачи, возникающие в океанологии, акустике, радиофизике, квантовой механике, ядерной физике, теории упругих оболочек, физике твердого тела, нелинейной теории поля, инфляционной космологии и других областях.

А.А.Абрамов является автором около 180 научных работ, опубликованных в центральной печати. Его творчество оказало значительное влияние на развитие ряда областей вычислительной математики. Некоторые из его результатов и методов вошли в монографии, учебники и учебные пособия, они известны среди специалистов как "методы Абрамова". А.А.Абрамов участвовал в создании первой отечественной ЭВМ БЭСМ-1, за что в 1956 г. был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Он является одним из авторов первой советской книги по программированию. Среди учеников А.А.Абрамова – 18 кандидатов и 3 доктора наук, в том числе из ряда иностранных государств. А.А.Абрамов был бессменным членом редколлегии "Журнала вычислительной математики и математической физики" с момента его основания.

Будучи высоко одаренной личностью, А.А.Абрамов обладал феноменальной памятью и широтой интересов, поражал окружающих большими познаниями не только в математике, но и в литературе, музыке, истории, глубиной и оригинальностью суждений. Он оставил глубокий след в сердцах его друзей, коллег и учеников.

Доклады, представленные на настоящей конференции, относятся к различным областям математики, в которые А.А.Абрамов внёс вклад.

## Усеченные ряды в роли коэффициентов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

С.А. Абрамов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
А.А.Рябенко (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
Д.Е. Хмельнов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: sergeyabramov@mail.ru,
anna.ryabenko@gmail.com, dennis_khmelnov@mail.ru

В [1], [2] были предложены алгоритмы поиска лорановых и регулярных (представимых степенно-логарифмическими разложениями) решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечными формальными степенными рядами в роли коэффициентов. Вопрос представления бесконечных рядов очень существен для компьютерной алгебры. В данном случае ряды задаются в усеченном виде, что означает, что мы не располагаем полной информацией об уравнении. Исходя из этой неполной информации, алгоритмы дают максимально возможное число членов рядов, входящих в решения. В [1], [2] сообщалось о предварительных (пробных) вариантах реализующих эти алгоритмы в среде Maple [3] процедур и экспериментах с ними. Процедуры усовершенствованы, интерфейс и представление данных выбраны для них единообразно. Эти процедуры доступны на веб-странице http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries.

### Литература

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды. Ж. выч. мат. и мат. физ., 2019, № 10 (59). С. 66—77.

2. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды. Ж. выч. мат. и мат. физ., 2020, № 1 (60). (Прин. к печати).

3. Maple online help // http://www.maplesoft.com/support/help

**Полугруппы операторов и оптимальное восстановление решений уравнений математической физики**

Е.В. Абрамова (НИУ МЭИ, Москва)
Г.Г. Магарил-Ильяев (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
Е.О. Сивкова (МПГУ, Москва)
*E-mail address*: abramova_elena@inbox.ru,
magaril@mech.math.msu.su, sivkova_elena@inbox.ru

В докладе рассматривается полугруппа операторов $T_t$, $t \geq 0$, в $L_2(\mathbb{R}^d)$, действующая в образах Фурье по правилу: $F[T_t f](\xi) = \exp(-ta(\xi))F[f](\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$ и всех $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $a(\cdot)$ — непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}^d$, $a(0) = 0$ и $a(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Ставится задача об оптимальном восстановлении значений оператора $T_\tau$ по приближенным значениям операторов $T_{t_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(\tau) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ g_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\\ i=1,\ldots,n\\ \|T_{t_i}f(\cdot)-g_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_i,\\ i=1,\ldots,n}} \|T_\tau f(\cdot) - \varphi(g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\delta_i > 0$, $i - 1, \ldots, n$, и нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon L_2(\mathbb{R}^d) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, а также интересуют те отображения $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается. Такие отображения мы называем *оптимальными методами восстановления*.

В данной задаче найдено точное значение величины $E(\tau)$ и построено семейство линейных оптимальных методов. В качестве следствий найдены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности на $\mathbb{R}^d$ в данный момент времени $\tau$ по неточным измерениям этого решения в моменты времени $t_i$, $i = 1, \ldots, n$, а также оптимальные методы восстановления сужения на гиперплоскость решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям этого решения на других гиперплоскостях.

# О существовании и непрерывности глобальной неявной функции

А.В. Арутюнов (ИПУ РАН, Москва)
*E-mail address*: `arutyunov@cs.msu.ru`

Пусть $\Sigma$ — топологическое пространство, задано отображение $f : \mathbb{R}^n \times \Sigma \to \mathbb{R}^k$, дифференцируемое по первой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Рассматривается следующая задача. Для уравнения

$$f(x,\sigma) = 0 \tag{1}$$

с неизвестным $x \in \mathbb{R}^n$ и параметром $\sigma \in \Sigma$ требуется получить условия существования решения $x(\sigma)$, определенного при каждом $\sigma \in \Sigma$ и зависящего от параметра $\sigma$ непрерывно.

Получен следующий результат. Положим

$$O_n(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| < r\},$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0,$$

$$\alpha(r,\sigma) := \inf_{|x| \le r} \sup \left\{ \gamma \ge 0 : \, O_k(0,\gamma) \subset \frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma) O_n(0,1) \right\},$$

$$r \ge 0, \quad \sigma \in \Sigma,$$

$$\mathcal{D}(r,\sigma) := \int\limits_0^r \alpha(t,\sigma)\, dt, \quad r \ge 0, \quad \sigma \in \Sigma.$$

**Теорема 1.** *Предположим, что отображение $f$ непрерывно, отображение $f(\cdot,\sigma)$ дважды дифференцируемо при всех $\sigma \in \Sigma$, и отображения $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ непрерывны. Если*

$$|f(0,\sigma)| < \mathcal{D}(+\infty,\sigma) \quad \forall\, \sigma \in \Sigma,$$

*то существует непрерывное отображение $g : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ такое, что*

$$f(g(\sigma),\sigma) = 0, \quad \mathcal{D}(|g(\sigma)|,\sigma) \le |f(0,\sigma)| \quad \forall\, \sigma \in \Sigma.$$

Приведенное утверждение дает достаточное условие существования непрерывной глобальной неявной функции для уравнения (1). В случае, когда $\alpha(r, \sigma) = \text{const}$ теорема 1 совпадает с [1, теорема 6]. В случае, когда $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k = \Sigma$, $\mathcal{D}(+\infty, \sigma) \equiv +\infty$ и отображение $f$ представимо в виде $f(x, \sigma) \equiv F(x) - \sigma$, теорема 1 совпадает с теоремой о глобальном гомеоморфизме из [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01168).

## Литература

1. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции. Дифф. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 452–463.

2. *Абрамов А.А., Юхно Л.Ф.* Об одном численном методе решения систем нелинейных уравнений. ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1827–1834.

## Асимптотическое интегрирование нелинейной системы Гамильтона в резонансном случае

А.Б. Батхин (ИПМ им. М.В.Келдыша, Москва, МФТИ, Долгопрудный)
*E-mail address*: `batkhin@gmail.com`

Метод нормальной формы (НФ) является одним из наиболее эффективных способов построения асимптотического решения системы Гамильтона в окрестности положения равновесия, периодического решения или инвариантного тора [1]. НФ может быть также использована при исследовании устойчивости, бифуркаций и интегрируемости. Среди разработанных на сегодняшний день методов приведения системы Гамильтона к НФ можно выделить метод инвариантной нормализации (симметризации) [2], эффективно реализуемый в системах компьютерной алгебры.

Процедура приведения гамильтониана к НФ состоит из последовательности шагов. В окрестности положения равновесия $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$ функция Гамильтона $H(\mathbf{z})$ раскладывается в ряд $H = H_2 + H_3 + \ldots$ однородных форм степени $k$. Затем, квадратичная форма $H_2 = (\mathbf{z}, \Gamma\mathbf{z})/2$ приводится к нормальной форме. В случае простых собственных чисел $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n\}$ алгоритм нормализации описан в [2, § 7.3]. Пусть форма $H_2$ имеет резонанс, т.е. уравнение $(\mathbf{k}, \mathbf{\Lambda}) = 0$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{k} \neq 0$ на целочисленной решётке $\mathbb{Z}^n$. Наличие резонанса позволяет в ряде случаев получить явное представление корней $\mathbf{\Lambda}$ характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы $\Gamma$ через коэффициенты формы $H_2$ и, тем самым, выполнить нормализацию в символьном виде. Условие двухчастотного резонанса $\lambda_i = q\lambda_j$, $q \in \mathbb{Q}$ эффективно проверяется в терминах обобщённого дискриминанта $D_q(p(\lambda))$, который есть результант многочленов $p(\lambda)$ и его $q$-производной $(\mathcal{A}_q p)(\lambda)$ [3, 4]. Если порядок резонанса равен двум, т.е. многочлен $p(\lambda)$ имеет кратные корни, то матрица $\Gamma$ в общем случае имеет жорданову нормальную форму [1, Гл. I]. Однако, можно построить такое масштабирование фазовых переменных $\mathbf{q} = \varepsilon^a \mathbf{Q}$, $\mathbf{p} = \varepsilon^b \mathbf{P}$ и времени $t = \varepsilon^{a+b}\tau$ [5], что в новых переменных $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ матрица $\widetilde{\Gamma}$ квадратичной формы $\widetilde{H}_2$ станет диагонализируемой, а другие слагаемые формы $H_2$ войдут в качестве поправок более высокого порядка в разложение гамильтониана $H$ по параметру $\varepsilon$. Последующие шаги выполняются итерационно. При использовании алгоритма инвариантной нормализации они сводятся к усреднению очередного члена $M_i$ ряда Ли вдоль невозмущённого решения, определяемого квадратичным гамильтонианом $\widetilde{H}_2$. $M_i$ вычисляется через члены $H_j$, $j \leqslant i$, разложения исходного Гамильтониана, $G_j$, $j < i$, генератора Ли и $\widetilde{H}_j$, $j < i$, нормализованного Гамильтониана. Полученная НФ используется для асимптотического интегрирования исходной системы Гамильтона.

## Литература


1. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. *Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
3. *Батхин А.Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена. Программирование. 2018. № 2. С. 5–17.
4. *Батхин А.Б.* Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты. Программирование. 2019. № 2. С. 6–15.
5. *Брюно А.Д., Петров А.Г.* Вычисление гамильтоновой нормальной формы. ДАН. 2006. Т. 410, № 4. С. 474–478. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. С.В.Фомина. Изд. Наука. Москва: 1965.
6. *Колмогоров А.Н.* О понятии алгоритма. Успехи математических наук. 1953. Т. 8. № 4 (56). С. 175–176.

# Линии уровня изменённого потенциала и точки либрации на поверхности малых небесных тел

А.А. Буров (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
В.И. Никонов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: teormech@gmail.com, nikon_v@list.ru

Задачи динамики малых объектов на поверхности небесных тел представляет существенный интерес в связи с интенсивным исследованием таковых. Небесные объекты могут быть разнообразной природы, они мог быть сформированы как естественным путём, так и руками человека.

Активное освоение малых небесных тел неизбежно приведёт к замусориванию их поверхности космическими аппаратами или их обломками. Кроме того, зондирование малых небесных тел за счёт ударных проб, как показывают выполненные эксперименты, также приводит к выбросу большого числа камней и пылевых облаков. Имеет смысл как минимум оценить те места, где такие объекты будут скапливаться.

Как известно, многие небесные тела совершают равномерное вращение вокруг одной из главных центральных осей инерции. Поэтому естественно ставить задачу о существовании и устойчивости относительных равновесий, отвечающих критическим точкам изменённого потенциала. Для этого принимают во внимание потенциал центробежных сил.

В работе для ряда астероидов построены карты распределения значений потенциала ньютоновского притяжения и измененного потенциала на поверхности небесного тела, вычисленных с помощью формулы Вернера-Ширса [1,2]. Естественно ожидать скопления камней, песка, космического мусора на поверхности небесного тела именно в точках локальных минимумов измененной потенциальной энергии. Поверхность тела представляется многогранником с треугольными гранями.

Работа выполнена В.И. Никоновым при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых - кандидатов и докторов наук (проект № МК-1712.2019.1), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00335.

## Литература

1. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994, 59 (3),253–2782.

2. *Werner R.A. and Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representation of asteroid 4769 Castalia, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1997, Astr. 65, 313–344.

**Some investigation methods of boundary value problems for general partial differential equations**

V.P. Burskii (Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi)
*E-mail address:* bvp30@mail.ru

The report is devoted to some questions of a general theory of boundary value problems for partial differential equations and contains results of the author. Basic question that we ask is: How can one study boundary value problems for linear differential equations of general form? We offer some approaches to this problem and obtain a set of results. Let

$$L = L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

be a linear differential operation with smooth coefficients, which can be complex-valued or matrix, and let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$. Traces of a smooth solution of the equation $Lu = 0$ can not arbitrary and they are somehow connected to each other. Let us consider the Cauchy problem

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \psi_0, u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi_1, ..., u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega} = \psi_{m-1}.$$

One can obtain a necessary condition of the connection of the traces $\psi_j$ of the solution $u$ from the Green's formula

$\int\limits_\Omega (Lu\overline{v} - u\overline{L^+ v})\, dx = \sum_{q=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} u\, \overline{\partial_\nu^q v}\, ds,$ where $L^+$ is a formally adjoint operator, $L_{(j)}\, u$ is a linear differential expression of the order $j$, which one can count up if functions $\psi_j$ are known. We have:

$$\forall v \in \ker L^+, \sum_{q=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} u\, \overline{\partial_\nu^q v}\, ds = 0.$$

This condition proves to be necessary and sufficient often. Let $m = 2$, coefficients $a_\alpha$ be constant and let us have: $Lu = f, \; u|_{\partial\Omega} = 0$.

Let the domain $\Omega$ be given by means of the inequality $P(x) > 0$ where $P \in R[x]$ is a polynomial, $|\nabla P|_{P=0} \neq 0$. If $\tilde{u} = u$ in $\Omega$ and $\tilde{u} = 0$ outside, $F-$ the Fourier-transformation, we obtain the equivalent problem

$$P(-D_\xi)[L(\xi)F(\tilde{u})(\xi)] = g(\xi)$$

with a known function $g$. In particular, for the equation

$$L(D)\; u = (b^1 \cdot \nabla)\; (b^2 \cdot \nabla)\, u = 0 \qquad (*)$$

the problem $L(D_x)u = 0, \; u|_{P(x)} = 0$ with operator from (*) is equivalent to the problem $P(-D_\xi)w = 0, \; w|_{L(\xi)} = 0$. The applications of this methods are numerous.

Another method for studying boundary value problems for equation (*) is a new problem of moments on the curve $\partial\Omega$.

# К задаче обращения для уравнения класса Фукса с комплексными параметрами

В.И. Власов (ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: vlasov@ccas.ru

Уравнение класса Фукса второго порядка с вещественными особыми точками $b_n$ $(n = 1, \ldots, N)$, и комплексными параметрами $\alpha_n$ и $\gamma_m$ $(m = 2, 3, \ldots, N-2)$ может быть приведено к виду [1]

$$\Xi''(z) + (1/2)\, R(z)\, \Xi(z) = 0, \tag{1}$$

$$R(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{N-1} \frac{1-\alpha_n^2}{2(z-b_n)^2} +$$

$$+\frac{1}{(z-b_1)(z-b_{N-1})}\left(\sum\nolimits_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n^2-1}{2}(-1)^{\delta_{N,\,n}} + \sum\nolimits_{m=2}^{N-2} \frac{\gamma_m}{z-b_m}\right);$$

здесь принято $b_1 = 0$, $b_{N-1} = 1$, $b_N = \infty$, а остальные $b_n$ расположены на интервале $(0, 1)$; $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера. Задача обращения заключается [2] в построении функции $z = \Phi(w)$, обратной к отношению $w = \varphi(z) = \Xi_1(z)/\Xi_2(z)$ двух его линейно независимых решений.

Пусть функция $\widetilde{z} = \tau_q(z) \in M\ddot{o}b$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ на себя с условиями $\tau_q(b_{q\ominus 1}) = 1$, $\tau_q(b_q) = \infty$, $\tau_q(b_{q\oplus 1}) = 0$, где $\ominus$ и $\oplus$ — вычитание и сложение по модулю $N$, а $z = T_q(\widetilde{z})$ — функция, обратная к $\tau_q(z)$. Введем набор функций $\xi = \varphi_j(\zeta)$, $j \in \mathbb{N}$, по формулам $\varphi_1(0; \zeta) = \ln \zeta$; $\varphi_1(\nu; \zeta) = \zeta^\nu$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$; $\varphi_j(\zeta) = \zeta^J - (-1)^j \ln \zeta^J$, $J = [j/2]$, $j = 2, 3\ldots$ Через $\zeta = \Phi_j(\nu; \xi)$ обозначим обратные функции; обозначим также $\mathbb{K}_+(r) = \{z : |z| > r\} \cap \overline{\mathbb{H}}$ и $\Sigma(\lambda, z) = \lambda_{-1} z + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^{-k}$, где $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots)$.

Следующая теорема обобщает результаты из [3], [4].

**Теорема 1.** *Пусть $q \in \{1, \ldots, N\}$ — выбранный номер особой точки уравнения (1). Тогда справедливы следующие утверждения.*

*1) Для функции $w = \varphi(z)$ имеет место представление*

$$\varphi(z) = \omega \circ \varphi_j \circ \Sigma(\lambda, \tau_q(z)), \tag{2}$$

*справедливое на множестве $T_q(\mathbb{K}_+(r_q))$ при некотором $r_q > 0$; $\omega$ — функция из $M\ddot{o}b$; здесь для строки коэффициентов $\lambda$, номера $j$, а при*

*$j = 1$ и величины $\nu$, выписываеться явный алгоритм вычисления через параметры уравнения (1). При заданном уравнении и выбранных $q$ и $\omega$ представление (2) единственно.*

*2) Для обратной функции $z = \Phi(w)$ имеет место представление*

$$\Phi(w) = T_q \circ \Sigma(\Lambda,\ \Phi_j \circ \Omega(w)), \tag{3}$$

*справедливое на множестве $\omega \circ \varphi_j(\mathbb{K}_+(R_q))$ при некотором $R_q > 0$; здесь $\Omega$ обратно к $\omega$. Коэффициенты $\Lambda_k$ явно выражаются через $\lambda$. При заданном уравнении (1) и выбранных $q$ и $\omega$ представление (3) единственно.*

## Литература


1. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат. Москва: 1950.
2. *Смирнов В.И.* Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Магистерская дисс. Петроград: 1918.
3. *Власов В.И., Волков Д.Б.* К задаче обращения для уравнения класса Фукса. Дифф. ур. 1986. Т. 22. №11. С. 1854-1864.
4. *Волков Д.Б.* Об интегрировании уравнения классса Фукса с четырьмя особыми точками. Сообщ. прикл. мат. ВЦ АН СССР. 1991.

## Применение алгоритма Чебышева – Маркова - Крейна для анализа микрофизических процессов в градовых облаках

З.С. Гаева (ВГИ, Нальчик)
А.А. Шананин (МФТИ, Долгопрудный)
*E-mail address*: gzs@mail.ru, alexshan@yandex.ru

В докладе рассматривается задача управления микрофизическими процессами, описываемыми уравнением Смолуховского. Целью управления является минимизация числа частиц, размеры которых превышают критический размер. Для этого в градовое облако внедряют по определённой программе дополнительные зародыши градин (реагент), которые предотвращают образование крупных градин. В геофизике принято распределение частиц по размерам (массе) раскладывать по системе ортогональных функций Дмитриева. Для построения приближенного решения уравнения Смолуховского обычно применяется метод Галёркина. Зная значения коэффициентов Галёркина, нельзя вычислить точное значение числа частиц. Однако с помощью модифицированного алгоритма Чебышева-Маркова-Крейна можно построить точные верхние и нижние оценки этого числа (см. [1,2]). Задача оптимального управления о минимизации точной верхней оценки обладает спецификой. Функционал в этой задаче задан неявно, и его значение вычисляется по значениям коэффициентов Галёркина с помощью модифицированного алгоритма Чебышева-Маркова-Крейна. Для численного решения задачи оптимального управления с такой спецификой требуется разработать эффективный алгоритм вычисления градиента функционала, а не только его значения. Решению этой задачи посвящены работы [3,4].

### Литература

1. *Гаева З.С., Шананин А.А.* Проблема моментов Маркова-Чебышева и исследование галеркинских приближений в одной задаче агрегации кристаллов. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 9. С. 35–54.

2. *Гаева З.С., Шананин А.А.* Об обобщениях неравенства Чебышева. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 1. С. 15–24.

3. *Гаева З.С., Шананин А.А.* Численный метод решения задачи управления микроструктурой градового облака. Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 12. С. 69–84.

4. *Гаева З.С., Шананин А.А.* Алгоритм Чебышева–Маркова-Крейна для анализа микрофизических процессов в градовых облаках. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1551–1569.

# Вычислительные аспекты в проблеме децентрализации

М.А. Горелов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
Ф.И. Ерешко (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: griefer@ccas.ru, fereshko@yandex.ru

Проблемы информированности и децентрализации являются одними из главных в теории принятия решений и привлекали внимание (см., например, https://en.wikipedia.org/wiki/Decentralization) мыслителей всех эпох. Опыт показывает, что на практике управление достаточно сложными организационными системами осуществляется по гибридному иерархическому принципу. Отсюда можно сделать вывод о том, что существуют ситуации , когда децентрализованное управление является более эффективным. Однако объяснить причину эффективности децентрализации управления было затруднительно. Объяснение было предложено в начале 70-х годов прошлого века Ю.Б. Гермейером и Н.Н.Моисеевым: если лицо, принимающее решения, передаст часть своих полномочий по выбору решений каким-то агентам, то совместными усилиями можно будет своевременно обработать большие объемы информации и за счет этого сделать управление более эффективным. В настоящее время тенденции к централизации управления сложными системами явно не наблюдается. Вероятно, это связано с тем, что параллельно идет процесс усложнения связей как между отдельными элементами внутри управляемой системы, так связей системы с внешним миром. Поэтому и объемы необходимой для эффективного управления информации тоже растут. Построить формальные математические модели, позволяющие описать этот эффект, долгое время не удавалось.

Решение получено в работе [1] и базируется на новом представлении теоретико-игровых конструкций с использованием исчисления предикатов. Предлагаются вычислительные процедуры на основе новых подходов к описанию игр.

## Литература

1. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе // Контуры

цифровой реальности: Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего / Под ред. В.В.Иванова, Г.Г. Малинецкого, С.Н. Сиренко. М.: Ленанд, 2018. С. 187–202.

2. *Шваб К.* Четвертая промышленная революция / Пер. с англ. Предисловие Греф Г.О. М.: «Эксмо», 2016.

3. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

4. *Ватель И.А.,Ерешко Ф.И.* Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание, 1973.

5. *Ватель И.А.,Ерешко Ф.И.* Игры с иерархической структурой // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 478–482.

6. *M.A. Gorelov, F.I. Ereshko* Awareness and Control Decentralization. Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80. Issue. 6, P. 1063–1076.

# Группа преобразований пространства квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Лиувилля-фон Неймана

А.Д. Грехнева (ЛИИ им. Громова, Жуковский)
В.Ж. Сакбаев (МФТИ, Долгопрудный)
*E-mail address*: alice-prohorses@yandex.ru, fumi2003@mail.ru

В докладе будет исследована эволюция множества квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Шредингера с полиномиальной зависимостью потенциала от плотности вероятности состояния в координатном пространстве

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{\Delta}u(t) + \mathbf{V}(u(t))u(t),\ t \in (0,T); \quad T \in (0,+\infty], \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2([-\pi,\pi]). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{V}(u) \equiv |u|^p; \quad p \geq 0.$, $\mathbf{\Delta}$ – оператор Лапласа в пространстве $H$, областью определения которого является пространство $H^2$, состоящее из функций пространства Соболева $W_2^2(-\pi,\pi)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям Дирихле $u(-\pi) = 0$, $u(\pi) = 0$. Будет показано, что для малых показателей нелинейности $p \in [0,4)$ задача Коши (1)-(2) порождает непрерывную группу $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ нелинейных преобразований пространства начальных данных $H^1 = D(\sqrt{-\mathbf{\Delta}})$, сохраняющих $H$-норму решения и значение функционала энергии $E(u) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(-\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2})dx$ на векторах $u(t) = \mathbf{U}(t)u_0$, $t \in \mathbb{R}$. Если же $p \geq 0$, то будет показано, что найдутся начальные данные (2), при которых решение задачи Коши допускает явление самофокусировки за конечное время, которое сопровождается явлением градиентного взрыва решения.

Будут исследованы аппроксимации исходного уравнения Шредингера (1) его энергетическими регуляризациями, задаваемыми направленным множеством полуограниченных снизу функционалов энергии $E_\epsilon(u) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(\frac{\epsilon}{2}|\Delta u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2})dx$, $\epsilon \in (0,1)$, $\epsilon \to +0$. Устанавливается сходимость последовательности решений регуляризованных задач Коши к решению задачи Коши (1), (2) на всем промежутке его существования. На промежутках, содержащих граничные точки промежутка существования решения задачи (1), (2), установлена расходимость последовательности регуляризованных решений. С помощью задания меры на множестве параметров регуляризации определено продолжение решения задачи Коши через момент возникновения градиентного взрыва посредством функции со значениями в пространстве $(B(H))^*$ квантовых состояний, значения которой на всем промежутке существования решения $u(t)$, $t \in [0,T)$ задачи (1), (2) совпадают векторными квантовыми состояниями, задаваемыми значениями решения. В связи с этим рассматривается вопрос о задаче Коши для уравнения Лиувилля-фон Неймана

$$i\frac{d}{dt}\rho(t) = [\mathbf{\Delta} + \mathbf{V}(\rho(t)), \rho(t)],\ t > 0; \qquad \rho(+0) = \rho_0,\ \rho_0 \in \Sigma(H), \quad (3)$$

где $\Sigma(H)$ – множество квантовых состояний, определяемое как пересечение единичной сферы с конусом положительных элементов пространства линейных непрерывных функционалов на банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $B(H)$. Будут получены условия, при которых задача Коши (3) задает непрерывную группу преобразований подмножества $\Sigma_S(H)$ соболевских квантовых состояний, получены условия разрушения соболевских состояний и их перехода в множество состояний $\Sigma(H)$.

**Символьно-численные методы исследования стационарных движений системы двух связанных тел на круговой орбите**

С.А. Гутник (МФТИ, Долгопрудный)
В.А. Сарычев (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва)
*E-mail address*: `s.gutnik@inno.mgimo.ru` , `vas31@rambler.ru`

С использованием методов компьютерной алгебры и численных методов проведено исследование свойств нелинейной алгебраической системы, определяющей равновесные ориентации системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, движущихся в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного момента. В общем случаи равновесные ориентации системы двух тел определяются системой 12 алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от 4 параметров задачи [1]. Для определения равновесных ориентаций связки двух тел проводилась декомпозиция системы алгебраических уравнений, с применением методов линейной алгебры и алгоритмов построения базисов Гребнера. Положения равновесия в зависимости от параметров системы двух тел определялись путем исследования числа действительных корней алгебраических уравнений из полученных базисов Гребнера. Проведен анализ условий существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров задачи. Рассматриваются вопросы эффективности алгоритмов построения базисов Гребнера от числа параметров на примере представленной системы уравнений. Рассматриваются также равновесные ориентации связки двух тел для специальных случаев, когда одна из главных осей инерции как первого, так и второго тела совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом вектором или касательной к орбите. Для определения равновесных ориентаций системы тел проводилась декомпозиция стационарных алгебраических уравнений движения на 9 подсистем. Для решения системы алгебраических уравнений применялись алгоритмы построения базисов Гребнера. Положения равновесия определялись путем численного анализа корней алгебраических уравнений из построенного базиса Гребнера.

## Литература

1. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите. Программирование. 2019. Т. 45, № 2, С. 32–40.

## Итерационный метод решения обратной задачи для гиперболического уравнения

А.М.Денисов (МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва)
*E-mail address*: den@cs.msu.ru

Рассматривается задача для квазилинейного гиперболического уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + \alpha F(x,y,u(x,y)) = c(x,y)f(y), \qquad (1)$$

$$(x,y) \in Q,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le L, \qquad (3)$$

где $Q = \{(x,y) : 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le L\}$, $\alpha$ - постоянная.

Задача (1)-(3) представляет собой задачу с данными на характеристиках, методы исследования которой хорошо известны.

Ставится следующая обратная задача. Пусть функции $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $F(x,y,z)$ и число $\alpha$ заданы, а функция $f(y)$ неизвестна. Требуется определить функции $f(y)$, $u(x,y)$, удовлетворяющие (1)-(3) и условию

$$u(l,y) = g(y), \quad 0 \le y \le L, \qquad (4)$$

где $g(y)$ - заданная функция.

Обратная задача (1)-(4) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений для функций $f(y)$, $u(x,y)$. Существование решения этой системы, а значит и решения обратной задачи, доказывается с помощью построения итерационного метода и обоснования его сходимости. Итерационный метод может быть также использован для приближенного решения обратной задачи.

Доказывается единственность решения обратной задачи и исследуется асимптотика ее решения при малых значениях параметра $\alpha$.

# Применение Быстрого Автоматического Дифференцирования для решения обратных коэффициентных задач оптимизационными методами второго порядка сходимости

Ю.Г. Евтушенко (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва; МФТИ, Долгопрудный)
В.И. Зубов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва; МФТИ, Долгопрудный)
А.Ф. Албу (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва; МФТИ, Долгопрудный)
*E-mail address*: `yuri-evtushenko@yandex.ru`, `vladimir.zubov@mail.ru`, `alla.albu@mail.ru`

Обратные коэффициентные задачи представляют повышенный интерес и рассматриваются довольно давно. При этом большое внимание уделяется не только теоретическому исследованию этих задач, но и разработке численных методов их решения. Авторами настоящей работы ранее был предложен алгоритм численного решения задачи идентификации зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества в одномерной и двумерной постановках. В разработанном алгоритме обратная коэффициентная задача сводилась к вариационной задаче: требовалось найти такую зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, при которой температурное поле и (или) поток тепла на границе образца, полученные в результате решения прямой задачи, мало отличаются от экспериментальных данных.

Для численного решения получаемых оптимизационных задач использовался метод градиентного спуска. Хорошо известно, что для эффективной работы градиентных методов необходимо знать точное значение градиента целевой функции. Использование в предложенном алгоритме методологии Быстрого Автоматического Дифференцирования позволило добиться этого: градиент целевой функции вычислялся с машинной точностью. Однако в окрестности решения градиентные методы сходятся довольно медленно. Принимая во внимание этот факт, в настоящей работе исследуется возможность применения оптимизационных методов второго порядка сходимости для решения сформулированной вариационной задачи.

Наиболее популярным методом второго порядка является метод

Ньютона. В нем на каждой итерации требуется вычисление и обращение матрицы Гесса, что зачастую является достаточно сложным и требующим больших затрат машинных ресурсов процессом. Одной из разновидностей метода Ньютона является метод Ньютона-Гаусса. Этот итерационный метод предназначен для решения задачи наименьших квадратов. Здесь отпадает необходимость вычисления и обращения матрицы вторых производных, но строится матрица типа Якоби. Ее элементы – компоненты градиента каждого из квадратичных слагаемых целевого функционала. При этом скорость сходимости метода Ньютона-Гаусса близка к квадратичной.

Преимущество метода Ньютона-Гаусса – в простоте его реализации. Однако его применение к решению конкретных задач обнаружило ряд проблем, связанных с некорректной работой и замедлением сходимости. Изучение этих проблем привело к модификации метода Ньютона-Гаусса – алгоритму Левенберга-Марквардта. От метода Ньютона-Гаусса этот алгоритм отличается введением специального параметра регуляризации. Упомянутая выше матрица типа Якоби также, как и градиент, требует высокой точности определения своих элементов.

Целью настоящей работы является исследование возможности применения и эффективности алгоритма Левенберга-Марквардта к решению обратных коэффициентных задач. Существенным является то, что в предлагаемом нами подходе элементы матрицы типа Якоби вычисляются с машинной точностью благодаря использованию методологии Быстрого Автоматического Дифференцирования.

# О существовании и гладкости глобальной обратной функции

С.Е. Жуковский (ИПУ РАН, Москва)
*E-mail address*: `s-e-zhuk@yandex.ru`

Пусть задано гладкое отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ такое, что $f(0)=0$. Классическая теорема об обратной функции гарантирует, что если производная отображения $f$ в нуле не вырождена, то существует гладкая функция, определенная в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$, являющаяся правой обратной к $f$. Это утверждение носит локальный характер. В связи с этим представляется естественным вопрос о нахождении условий, гарантирующих существование глобального правого обратного отображения, т.е. правого обратного к $f$ отображения, определенного на всем пространстве $\mathbb{R}^k$.

Получен следующий результат. Обозначим через $O_n(r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $r\ge 0$. Для произвольного линейного оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ обозначим

$$\operatorname{cov}A := \max\{\gamma\ge 0:\ O_k(\gamma)\subset AB_n(1)\}.$$

Положим

$$\alpha(r) := \inf_{|x|\le r}\operatorname{cov}\frac{\partial f}{\partial x}(x),\quad \mathcal{D}(r) := \int\limits_0^r \alpha(t)\,dt,\quad r\ge 0.$$

**Теорема 1.** *Предположим, что отображение $f$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\mathcal{D}(+\infty)>0$. Тогда существует непрерывно дифференцируемое отображение $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ такое, что*

$$f(g(y))=y,\quad \mathcal{D}(|g(y)|)\le |y|\quad \forall\, y\in O_k(\mathcal{D}(+\infty)).$$

Приведенное утверждение дает достаточное условие существования гладкой глобальной правой обратной функции к заданному отображению. В случае, когда $\alpha(r)=\mathrm{const}$ теорема 1 совпадает с [1, теорема 2]. В случае, когда $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k$ и $\mathcal{D}(+\infty)=+\infty$, теорема 1 совпадает с теоремой о глобальном гомеоморфизме из [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01168).

## Литература


1. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции. Дифф. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 452–463.

2. *Абрамов А.А., Юхно Л.Ф.* Об одном численном методе решения систем нелинейных уравнений. ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1827–1834.

## Конгруэнции и унитарные конгруэнции в теории матриц

Х.Д. Икрамов (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
*E-mail address*: ikramov@cs.msu.su

Хотя основной областью научной деятельности Александра Александровича Абрамова были численные методы решения дифференциальных уравнений, будучи человеком с очень широкими интересами, он следил и за многими смежными областями математики (и не только математики). В частности, он всегда интересовался линейной алгеброй и ее численными аспектами. Автор знает об этом не понаслышке: А.А. давал внешний отзыв на мою кандидатскую диссертацию и был одним из оппонентов по докторской. Уверен, что он с удовольствием послушал бы сообщение о последних событиях, относящихся к преобразованиям конгруэнции, вторым по важности в теории комплексных квадратных матриц после преобразований подобия.

Дан обзор важнейших фактов, относящихся к матричным преобразованиям конгруэнции, псевдоподобия и унитарной конгруэнции. Сформулировано понятие рационального алгоритма и обсуждается вопрос о том, какие задачи в теории конгруэнций могут быть решены посредством рациональных алгоритмов.

**Применение неравенств, связывающих элементарные симметрические функции $S_1, S_2, S_n$, для анализа сходимости метода Фалька-Лангемейера**

И.Е. Капорин (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: igorkaporin@mail.ru

Рассматривается обобщенная задача на собственные значения - $Ax = \lambda Bx$ с симметричными положительно определенными (с.п.о.) матрицами $A$ и $B$. Известно (см., напр., [3]), что существующие стандартные пакеты программ (LAPACK и т. п.) могут оказываться недостаточно точными при численном решении спектральных задач с плохо обусловленными матрицами. Поэтому в последние десятилетия заметное внимание уделялось методам, не использующим предварительную тридиагонализацию, одним из которых является метод Фалька-Лангемейера [1]. В этом методе для приближенной диагонализации пары с.п.о. матриц применяется последовательность элементарных преобразований подобия с матрицей $F = I + \alpha e_j e_k^{\mathrm{T}} + \beta e_k e_j^{\mathrm{T}}$, одновременно аннулирующих элементы матриц $A$ и $B$, расположенные в позициях $(j, k)$ (а тогда и позициях $(k, j)$ в силу сохранения симметрии), так что $(F^T AF)_{jk} = 0$, $(F^T BF)_{jk} = 0$.

Введем матричный функционал $\mathbf{K}(M) = \left(n^{-1}\mathrm{trace}\, M\right)^n (\det M)^{-1}$, называемый K-числом обусловленности матрицы $M$ (см., напр., [2]).

**Теорема 1.** *Для любой с.п.о. $n \times n$-матрицы $M$, нормированной условием $\mathrm{trace}\, M = n$, справедлива оценка*

$$\|I - M\|_F^2 \geq \frac{n}{n-1} \left(1 - \mathbf{K}(M)^{-1}\right),$$

*где через $\|C\|_F^2 = \mathrm{trace}\,(C^T C)$ обозначен квадрат фробениусовой нормы матрицы $C$.*

**Теорема 2.** *Если для любой с.п.о. $n \times n$-матрицы $A$ подобная ей матрица $\hat{A} = F^T AF$ такова, что выполнено $(\hat{A})_{jk} = 0$, где позиция $(j, k)$ определяется из условия $|A_{jk}| = \max_{s,t} |A_{st}|$, то справедлива оценка*

$$\mathbf{K}(\hat{\mathcal{A}}) - 1 \leq \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) (\mathbf{K}(\mathcal{A}) - 1),$$

*где* $\mathcal{A} = (\mathrm{Diag}A)^{-1/2}A(\mathrm{Diag}A)^{-1/2}$ *и* $\hat{\mathcal{A}} = (\mathrm{Diag}\hat{A})^{-1/2}\hat{A}(\mathrm{Diag}\hat{A})^{-1/2}$.

Используя последнее утверждение, можно уточнить алгоритм реализации метода и установить глобальную сходимость итерируемых матриц к диагональной форме со скоростью, зависящей только от $n$.

## Литература


1. *Falk S., Langemeyer P.* Das Jacobische rotationsverfahren fur reell-symmetrische matrizenpaare I, II // Elektronische Datenverarbeitung, 1960. F.7. P.30-34; F.8. P.35–43.

2. *Kaporin I.* New convergence results and preconditioning strategies for the conjugate gradient method // Numer. Linear Algebra Appls. 1994. V. 1. P. 179–210.

3. *Slapnicar I., Hari V.* On the quadratic convergence of the Falk-Langemeyer method // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1991. V.11. N.1. P.84–114.

## О решении стационарного уравнения диффузии с сильно меняющимся коэффициентом

Г.М. Кобельков (МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва)
*E-mail address*: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Предложены и исследованы итерационные процессы с числом итераций, не зависящим от изменения коэффициента диффузии.

## О методах вычисления сфероидальных и эллипсоидальных функций и их применении в классических задачах акустической дифракции

Н.Б. Конюхова (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: n.konyukhova@gmail.com, nadja@ccas.ru

Работы по тематике, указанной в названии, проводились в Отделе вычислительных методов ВЦ АН СССР (ВЦ РАН) примерно с начала 80-х до середины 90-х годов прошлого столетия (по инициативе Акустического института и при поддержке ИФП и ИАЭ). Были разработаны универсальные методы и алгоритмы расчета волновых сфероидальных функций (ВСФ) и волновых эллипсоидальных функций (ВЭФ), возникающих при разделении переменных в трехмерном уравнении Гельмгольца в сфероидальных и эллипсоидальной системах координат (СК) (см. [1]–[3] и библиографию там). Такое разделение приводит: для угловых ВСФ – к сингулярным самосопряженным задачам Штурма-Лиувилля, где роль спектрального параметра (СП) играет параметр разделения; для угловых ВЭФ – к двухпараметрической самосопряженной спектральной задаче для системы из двух слабосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с двумя СП как параметрами разделения; для радиальных ВСФ и ВЭФ – к задачам с непрерывным спектром для ОДУ второго порядка на полубесконечном интервале. Эти методы и алгоритмы применялись к решению широкого круга прикладных задач (в том числе и другими авторами). В частности, были решены классические задачи дифракции плоской звуковой волны на акустически идеальных сфероидах и трехосных эллипсоидах в широком диапазоне изменения параметров задач, в том числе для сфероидов и эллипсоидов больших волновых размеров: решались внешние краевые задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца с условиями излучения на бесконечности методом разделения переменных в сфероидальных и эллипсоидальной СК (см. [4]–[8] и библиографию там).

Результаты были доложены на многочисленных научных конференциях и семинарах, в том числе за рубежом. В 1995 году коллектив авторов был награжден Юбилейной премией на конкурсе лучших работ ВЦ РАН. Наиболее оригинальные идеи в разработке методов и алгоритмов решения перечисленных выше задач принадлежат А.А.Абрамову.

### Литература


1. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Пак Т.В., Парийский Б.С.* Вычисление вытянутых сфероидальных функций решением соответствующих дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 1. С. 3–18.

2. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* Вычисление угловых волновых функций Ламе решением вспомогательных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 813–830.

3. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* Вычисление радиальных волновых функций для сфероидов и трехосных эллипсоидов модифицированным методом фазовых функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 2. С. 212–234.

4. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* О задаче дифракции плоской звуковой волны на трехосном эллипсоиде. Дифференц. ур-ния. 1993. Т. 29. № 8. С. 1347–1357.

5. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* О некоторых многопараметрических спектральных задачах математической физики. Матем. моделирование. 1994. № 6. С. 14–21.

6. *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* О численно-аналитическом исследовании задач дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытянутых сфероидах и трехосных эллипсоидах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 9. С. 1374–1400.

7. *Abramov A.A., Konyukhova N.B., Levitina T.V.* Numerical investigation of the problem of a plane acoustic wave scattering by a general triaxial ellipsoid. Design Engineering Technical Conf. ASME. New York: 1995. V. 3. Part B. P. 437–447.

8. *Abramov A.A., Dyshko A.L., Konyukhova N.B., Levitina T.V.* On numerical solving of several mathematical physics problems by separation of variables. Proc. of the Intern. Seminar "Day on Diffraction–98". Изд. НИИХ СПбГУ. Санкт-Петербург: 1998. P. 68–81.

# Представления сплетений конечных групп и многокомпонентные квантовые системы

В.В. Корняк (ЛИТ ОИЯИ, Дубна)
*E-mail address*: vkornyak@gmail.com

Квантовое описание можно сделать конструктивным, если в квантовом формализме непрерывные группы унитарных эволюций заменить унитарными представлениями конечных групп. Конструктивные модели многокомпонентных квантовых систем представляют особый интерес для изучения таких явлений, как нелокальные квантовые корреляции и квантовая телепортация. Эти экспериментально наблюдаемые явления являются следствием *квантовой запутанности*, свойственной многокомпонентным системам. Гильбертово пространство $N$-компонентной системы является тензорным произведением гильбертовых пространств компонент: $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i$. Если компоненты "однородны" (изоморфны), то их можно рассматривать как квантовые подсистемы локализованные в точках некоторого геометрического пространства $X$. В этом случае гильбертово пространство имеет вид $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^X$, где $\mathcal{H}$ — представитель класса эквивалентности "локальных" гильбертовых пространств. Естественной группой симметрий такой многокомпонентной системы является специальная комбинация группы симметрий, действующей внутри отдельной компоненты — "локальная группа" $F = F(\mathcal{H})$, и группы, переставляющей компоненты — "группа симметрий пространства" $G = G(X)$. Эта комбинация называется *сплетением* и обозначается как $\widetilde{W} = F \wr_X G$. Если $F(\mathcal{H})$ — унитарное представление $F$ в локальном гильбертовом пространстве, то $\widetilde{W}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$ представляет собой унитарное представление сплетения в гильбертовом пространстве системы в целом. Важной фундаментальной задачей является разложение этого представления на неприводимые компоненты. Трудности разложения представлений групп на неприводимые компоненты в значительной степени связаны с двумя параметрами: размерностью и рангом[1] представления. Оба эти параметра в случае представлений

[1]Рангом представления называется размерность централизаторной алгебры — алгебры матриц, коммутирующих со всеми матрицами представления.

сплетений имеют, как правило, очень высокие значения. Мы предложили алгоритм построения разложения представлений сплетений на неприводимые компоненты, который основан на использовании легко вычисляемого полного множества взаимно ортогональных неприводимых инвариантных проекторов в локальном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Этот алгоритм, в частности, строит полный набор ортогональных проекторов в неприводимые инвариантные подпространства гильбертова пространства сплетения $\mathcal{H}^X$, размерность которого экспоненциально зависит от числа точек пространства $X$. Реализация алгоритма на языке Си легко справляется с представлениями сплетений, имеющими размерности в квадриллионы и ранги в сотни миллионов. Выражения для проекторов в гильбертово пространство сплетения представляют собой тензорные полиномы от локальных проекторов. Такая структура позволяет свести вычисление квантовых корреляций в инвариантных подпространствах сплетений к последовательностям манипуляций с "маленькими" матрицами локальных проекторов.

## Применение дифференциально-топологических инвариантов аппроксимирующего отображения для топологической классификации объектов

С.В. Курочкин (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: kuroch@ccas.ru

Топологический анализ данных (TDA) имеет целью выявление и изучение наиболее "грубых" ("существенных", "устойчивых", "инвариантных" и т.д.) свойств точечных множеств в многомерных пространствах, которые не зависят от выбора системы координат и инвариантны относительно непрерывных деформаций объекта и/или пространства признаков. В последние годы, в связи постановкой все более сложных задач анализа многомерных, зашумленных и плохо структурированных данных, направление привлекает большое внимание исследователей и практиков.

В настоящее время наиболее распространенные методы TDA основаны на вычислении устойчивых (персистентных) групп гомологий объекта. В докладе будет рассказано об альтернативном подходе, основанном на общематематической идее: исследовать свойства объекта путем изучения функций, определенных на нем. Возможно, наиболее известным примером такого подхода является теория Морса.

Предлагаемый метод основан на вычислении дифференциальных инвариантов некоторого отображения, связанного с гладким отображением, аппроксимирующим объект в евклидовом пространстве. Метод направлен на выявление гомотопических свойств объекта. В лучшем случае (в частности, для двумерного случая и для классических поверхностей в трехмерном пространстве) его гомотопический тип может быть полностью восстановлен. Требование к объекту – быть "достаточно хорошим", что включает в себя: многообразия; клеточные пространства; черно-белые растровые изображения и растровые изображения с оттенками серого, представляющие изначально черно-белые объекты; облака точек в евклидовых пространствах метрической размерности меньше, чем у объемлющего пространства.

Аппроксимирующее отображение может строиться с помощью нейронной сети или иным общеупотребительным способом.

Основной результат (для двумерного случая) устанавливает соответствие между количеством окружностей в букете, описывающем гомотопический тип объекта, и степенью некоторого отображения, которое строится по аппроксимирующему (и его степень конструктивно вычисляется).

Применимость алгоритма показана на изображениях из базы данных MNIST.

## Литература


1. *Курочкин С.В.* Распознавание гомотопического типа объекта с помощью дифференциально-топологических инвариантов аппроксимирующего отображения. Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 4. С. 611–617.

# Расчет собственных частот вытянутого сфероида модифицированным методом Абрамова

Т.В. Левитина (MPS Göttingen, Deutschland)
*E-mail address*: levitina@mps.mpg.de

При моделировании акустических колебаний внутри вытянутого сфероида разделение переменных в сфероидальных координатах приводит к двухпараметрической задаче Штурма–Лиувилля: разделенные угловое и радиальное волновые сфероидальные уравнения оказываются связаны парой спектральных параметров — константой разделения $\lambda$ и безразмерным волновым числом $c$, определяющим частоту колебательной моды. Каждая мода характеризуется мульти-индексом $(n, l)$, $n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. числом внутренних нулей решений углового и радиального уравнений. Разрешимость задачи, несмотря на ее сингулярность, доказана для любого мульти-индекса, но численное решение представляет определенную трудность.

Предложенный в [1] метод решения многопараметрических спектральных задач соединял ньютоновские итерации и движение по параметру, связующему более простую задачу с "замороженными"коэффициентами при спектральных параметрах с исходной задачей. В [1] были доказаны разрешимость всех промежуточных задач и возможность вычислений ньютоновских итераций на каждом шаге на пути от "замороженной"задачи к исходной, среди прочего обратимость соответствующих матриц Якоби. Была получена оценка невязки расчётов $\lambda$ и $c$ в зависимости от длины промежуточных шагов. Тем не менее, метод [1] оказался недостаточно эффективным для расчёта мод типа "шепчущих галерей"(МШГ), важных для многочисленных практических приложений.

Модификация метода [1], использующая разработанную ранее А.А. Абрамовым процедуру переноса граничных условий в окрестности регулярной особой точки, позволила существенно расширить область изменения входных параметров и осуществить вычисление МШГ, отвечающих гигантским значениям азимутального индекса $m \sim 1000 - 5000$, в том числе и для сильно вытянутых сфероидов.

Более того, доказанная в [1] разрешимость промежуточных задач при движении от "замороженной"к исходной задаче открыла более широкие возможности для применения метода Ньютона, к примеру на базе высокоточных разностных схем. Такая работа была проведена автором совместно с коллегами из университета г. Бари (Италия ) и ТУ Вены (Австрия).

Готовится к публикации подробное описание возможных модификаций метода Абрамова, проиллюстрированное результатами вычислений МШГ.

## Литература


1. *Абрамов А.А., Ульянова В.И.* Один метод решения самосопряженных многопараметрических спектральных задач для слабо связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37:5. С. 566–571.

## Адаптивные и неадаптивные методы оптимального восстановления операторов

К.Ю. Осипенко (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
*E-mail address:* kosipenko@yahoo.com

При численном нахождении интегралов от функций наряду с теми или иными квадратурными формулами, где узлы, в которых вычислены значения интегрируемой функции, определены независимо от самих значений функции, часто используются методы интегрирования с автоматическим выбором шага, где каждый последующий узел выбирается в зависимости от значений функции в предыдущих узлах. Методы, в которых информация на каждом следующем шаге зависит от информации, получаемой на предыдущих шагах, называются адаптивными.

Адаптивные методы включают в себя неадаптивные, как частный случай, и естественно ожидать, что они будут давать меньшую погрешность аппроксимации, чем неадаптивные. Так и происходит во многих задачах, таких, например, как вычисление корней функции или нахождении ее экстремальных значений. Тем не менее оказывается, что существуют задачи, в которых адаптивные методы не дают выигрыша по сравнению с неадаптивными. В таких случаях вместо более сложно устроенных адаптивных методов имеет смысл использовать неадаптивные.

Вопрос о том, помогают ли адаптивные методы в сравнении с неадаптивными, исследовался многими авторами. Одна из первых работ в этой тематике принадлежит Н.С. Бахвалову [1], в которой он доказал, что для выпуклых и центрально-симметричных классов функций при восстановлении значений линейных функционалов адаптивные методы не дают преимущества. В частности, на таких классов методы с автоматическим выбором шага не дают преимущества по сравнению с оптимальной квадратурной формулой.

В докладе вводится общее понятие адаптивного метода для восстановления линейных операторов [2] и исследуются связи с неадаптивным восстановлением.

**Литература**

1. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 4. С. 1014–1018.

2. *Osipenko K.Yu.* Generalized adaptive versus nonadaptive recovery from noisy information. J. Complexity. 2019. V. 53. P. 162–172.

# Приложения сеточно-характеристического метода для моделирования пространственных динамических процессов в сплошных средах

И.Б. Петров (МФТИ, Долгопрудный)
*E-mail address*: petrov@mipt.ru

Доклад посвящен приложению сеточно-характеристического метода для моделирования пространственных динамических процессов в сплошных средах, в том числе численному решению задач о поведении технических и жилищных конструкций при интенсивном динамическом воздействии. Эти задачи являются актуальными при решении проблем минимизации разрушительных последствий террористических актов, землетрясений, техногенных катастроф, высокоскоростных взаимодействий. Решение подобных задач дает оценки стойкости жилищных, промышленных и оборонных сооружений, т.е. позволяет прогнозировать локализацию и размер областей возможных разрушений, места приложения нагрузки, геометрических характеристик конструкции, свойств конструкционных материалов. Численное решение подобных задач связано с такими проблемами, как построение адекватных математических моделей при моделировании процессов в широком диапазоне изменений давления, температуры, деформаций, а также адекватное описание поведения численного решения в областях больших его градиентов.

В рассматриваемых задачах динамического деформирования возникают проблемы, связанные с большими деформациями расчетных сеток, образованием неодносвязных областей интегрирования при разлете частиц разрушенных материалов, или материалов, перешедших в другое фазовое состояние. Для преодоления этих вычислительных трудностей использовались подвижные и лагранжевы расчетные сетки, Кроме этого, разработан сеточно-характеристический метод на нерегулярных расчетных сетках. Для учета разлета частиц разрушенного материала метод гладких частиц был адаптирован для численного решения задач об ударном нагружении деформируемых тел.

В механике к настоящему времени накоплен значительный экспериментальный опыт и предложено значительное количество моделей деформирования и разрушения материалов. Однако расчеты на стойкость жилищных и промышленных сооружений проводятся, в основном в статическом приближении. Что касается динамической прочности пористых конструкций, которыми являются рассматриваемые объекты, то характер механических процессов, возникающих при интенсивных воздействиях, существенно отличается от статистического случая. Эти процессы носят, в первую очередь, волновой характер и разрушения рассматриваемых объектов являются, как правило, следствием волновых воздействий на конструкционные материалы. В работе проводится численное исследование динамических процессов, как во всей конструкции, так и локальных, изучаются особенности волновых процессов в пористых средах. Использование сеточно-характеристического метода позволило получить, волновой фронт, аналогичный конусу Маха, в пористой твердотельной деформируемой среде. Кроме того, получены такие локальные динамические эффекты, как образование изгибных волн (их гидродинамический аналог – вихри) в балочных перекрытиях, динамические сдвиговые разрушения, обусловленные наличием многочисленных свободных границ в существенно неодносвязной области интегрирования, которой является пористая конструкция жилого дома или промышленного сооружения.

# Новый численный метод для квазилинейных дифференциальных уравнений, применимый на специальных классах функций

А.В. Подорога (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва),
И.В. Тихонов (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
*E-mail address*: anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Излагается новый численный метод решения квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0,$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Функция потока $f(u)$ предполагается кусочно линейной, а начальная функция $\varphi(x)$ — кусочно постоянной. При таких ограничениях появляется возможность точного численного моделирования обобщённого решения $u(x,t)$. Идея метода основана на компьютерном расчёте движения разрывов функции $u(x,t)$ в согласии с классическими условиями Гюгонио и Олейник [1, 2]. Возможна модификация метода для случая невыпуклых функций потока $f(u)$.

При более общих предположениях (функция потока $f(u)$ кусочно гладкая, а начальная функция $\varphi(x)$ кусочно непрерывная) можно использовать соображения аппроксимации, получая нашим методом приближенное решение $\tilde{u}(x,t)$ на достаточно большом промежутке времени. В докладе приводятся примеры и иллюстрации. Дополнительные подробности см. в [3, 4, 5].

## Литература

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: «Наука», 1978. — 688 с.

2. *Лакс П.Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М.-Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. — 296 с.

3. *Подорога А.В., Тихонов И.В.* Сравнительный анализ различных численных методов для квазилинейного уравнения дорожного движения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 2. С. 154–179.

4. *Подорога А.В., Тихонов И.В.* Метод движения разрывов для специальных квазилинейных уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 242–245.

5. *Подорога А.В.* Особенности моделирования решений квазилинейного закона сохранения с невыпуклой функцией потока // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. — Вып.19. — С. 85–92.

# Задачи Дирихле для обобщенного уравнения Коши-Римана с сверхсингулярной точкой на полуплоскости

А.Б.Расулов (НИУ МЭИ),
И.Н.Дорофеева (НИУ МЭИ)
*E-mail address*: rasulov_abdu@rambler.ru, idoro224@gmail.com

Пусть $S^+ = \{(x,y) : y > 0, |x| < \infty\}$- верхняя полуплоскость, $L$-вещественная ось, $\overline{S} = S^+ \cup L, z_1 \in S^+, a, f \in C(\overline{S}^+)$. В области $\overline{S_\varepsilon^+} = \overline{S^+} \cap \{|z - z_1| \geq \varepsilon\}$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{\bar{z}} u - Au = f, \quad A = \rho a, \ \ \rho = \frac{(z - z_1)}{|z - z_1|^{n+1}}. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega(z) = \frac{2}{(n-1)|z - z_1|^{n-1}}, \quad A_0(z) = \frac{z - z_1}{|z - z_1|^{n+1}}[a(z) - a(z_1)], \tag{2}$$

и сингулярный интеграл типа Векуа-Помпейу

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon A)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{S^+{}_\varepsilon} \frac{A(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \tag{3}$$

где интегральный оператор $T_\varepsilon$ определяется аналогично (3) по отношению к области $S_\varepsilon^+$. Доказывается,что функция $\Omega(z)$, $z \neq z_1$; существует и представима в виде

$$\Omega(z) = -a(z_1)\omega(z) + (TA_0)(z) + \frac{a(z_1)}{(n-1)\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{|\zeta - \zeta_1|^{n-1}(\zeta - z)} \tag{4}$$

и решения уравнения (1) дается формулой

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega} f)], \tag{5}$$

где $\phi \in H_{loc}(\overline{S^+}, z_1)$ – произвольная аналитическая функция.

**Постановка задач типа Дирихле.** *Требуется найти решение уравнения (1) в области $S^+$ из класса $D^{1,p}(S^+) \bigcap C^\alpha(\overline{S^+})$ удовлетворяющее на границе $L$ краевому условию:*

$$\operatorname{Re}\left[e^{-\Omega} U\right]_L = g(t),$$

*где $g(t) \in C(L)$, причем $g(t) = o(|t|^{-h})$, $h > 0$;.*

Решение задачи найдено явной формулой.

**Сингулярно возмущенное уравнение Коши-Римана с особенностью в младшем коэффициенте**

А.Б.Расулов (НИУ МЭИ),
Ю.С. Федоров (НИУ МЭИ)
*E-mail address*: rasulov_abdu@rambler.ru, FedorovYS@mpei.ru

Пусть область $D$ содержит точку $z = 0$ и ограничена простым гладким контуром $\Gamma$, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_\delta = D \cap \{|z| > \delta\}$ с малым $\delta > 0$.

В области $D$ рассмотрим следующую сингулярно возмущенную систему уравнений Коши-Римана с сингулярными младшими коэффициентами:

$$\begin{cases} \varepsilon[x\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)] - 2(a_1u_1 - a_2u_2) = 2f_1, \\ \varepsilon[y\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - x\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)] - 2(a_2u_1 + 2a_1u_2) = 2f_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$, $a_j$, $f_j$-заданные функции, j=1,2.

Пусть для краткости $\rho(z) = \bar{z}$. Умножая второе уравнение (1) на мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$ и объединяя его с первым уравнением, а также используя $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши-Римана, с учетом $u = u_1 + iu_2$, $a = a_1 + ia_2$, $f = f_1 + if_2$ записываем систему уравнений (1) в удобной форме для исследования, т.е. в комплексном виде:

$$\varepsilon\rho u_{\bar{z}} - au = f, \tag{2}$$

где $a \in C(\overline{D})$. Под его решением этого уравнения понимается функция $u \in C(\overline{D}) \cap C^\infty(D_\delta)$, для любого $\delta > 0$. Для упрощения вычислений далее, предположим, что $\Gamma : |z| = R$. Для уравнение (2) в области $D$ рассмотрим следующую задачу типа Дирихле:

Требуется найти решение уравнения (2) из класса $u \in C(\overline{D}) \cap C^\infty(D_\delta)$, удовлетворяющей на контуре $\Gamma$ граничную условию

$$\mathrm{Re}|\frac{z}{R}|^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}} u|_\Gamma = g(t), \tag{3}$$

где $g(t) \in C(\Gamma)$.

В настоящей работе метод регуляризации С.А. Ломова обобщается на сингулярно возмущенное уравнение Коши-Римана с сингулярным младшим коэффициентом. Доказывается, что ряд, полученный как решение задачи (3), сходится в обычном смысле абсолютно и равномерно по переменному $z$ во всей области $\overline{D}$.

# Моделирование взаимодействия встречных потоков частиц

Т.В. Сальникова (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
С.Я. Степанов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: tatiana.salnikova@gmail.com, stepsj@ya.ru

Для изучения физических явлений, таких как процесс образования протопланетного облака, или эволюции космической массы, движущейся вокруг Земли необходимо построение математических моделей, допускающих возможность проведения массовых компьютерных экспериментов.

В работе предлагается модель взаимодействия изначально движущихся навстречу друг другу потоков частиц. Частицы моделируются одинаковыми шарами с равными массами Взаимодействие частиц описывается потенциалом типа Леннарда-Джонса. В этой модели к гравитационному потенциалу всемирного тяготения вводится дополнительный член для учета размера частиц и регуляризации потенциала в окрестности нулевого расстояния между центрами частиц. На расстояниях меньше диаметра шаров притяжение частиц переходит в отталкивание. При расстоянии равном или меньшем диаметра шаров рассматривается либо модель неупругого удара с коэффициентом восстановления Ньютона и возможностью слипания частиц, либо модель бесстолкновительного движения.

Моделирование с различными начальными условиями и разными коэффициентами восстановления приводит к различным сценариям эволюции системы. Одним из возможных сценариев является образование двух устойчивых скоплений частиц, вращающихся как вокруг своих центров масс так и вокруг общего центра масс.

Приведены результаты компьютерных экспериментов.

# Эффективное интегрирование быстроосциллирующих функций

С.Л. Скороходов (ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: `sskorokhodov@gmail.com`

Высокоточное и быстрое интегрирование осциллирующих функций является важной задачей вычислительной математики, возникающей при использовании широкого арсенала Фурье-анализа, проекционных методов, интегральных преобразований и др. Использование известных формул типа Филона дает недостаточную для прикладных задач точность либо требует множественного разбиения отрезка интрегрирования, поэтому в работе предложен метод интегрирования, позволяющий достичь очень высокой точности за необходимое время.

Пусть необходимо найти интеграл $\int_a^b F(x)e^{i\Omega x}\,dx$. С помощью замены $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$ и разбиения $F(x)$ на сумму четной $f_{ev}$ и нечетной $f_{od}$ функций, приходим к задаче вычисления $\int_0^1 f_{ev}(t)\cos\omega t\,dt$ и $\int_0^1 f_{od}(t)\sin\omega t\,dt$. Пусть также известно, что $f_{ev}(t)$ и $f_{od}(t)$ аналитичны в круге $|t| < r$, $r > 1$, и разложимы в ряды $f_{ev}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^{2k}$, $f_{od}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^{2k+1}$. Это приводит к необходимости вычислять интегралы

$$I_k = \int_0^1 t^{2k}\cos\omega t\,dt\,,\ J_k = \int_0^1 t^{2k+1}\sin\omega t\,dt\,,\ \omega = \frac{b-a}{2}\,\Omega \gg 1. \quad (1)$$

С помощью интегрирования по частям выводим для $I_k$ рекуррентное соотношение

$$\omega^2 I_k + 2k(2k-1)I_{k-1} = 2k\,\cos\,\omega\, + \omega\,\sin\,\omega\,. \quad (2)$$

Имея значение $I_0 = \frac{\sin\omega}{\omega}$ можно вычислять последующие значения $I_k$, $k = 1, 2, \ldots$ с помощью соотношения (2). Однако такой способ вычисления $I_k$ обладает сильной численной неустойчивостью. Для преодоления этой трудности преобразуем (2) к виду трехчленного однородного уравнения

$$\frac{\omega^2}{2(k+1)\cos\omega + \omega\sin\omega}\,I_{k+1} +$$

$$+\left\{\frac{2(k+1)(2k+1)}{2(k+1)\cos\omega+\omega\sin\omega}-\frac{\omega^2}{2k\cos\omega+\omega\sin\omega}\right\}I_k =$$
$$= \frac{2k(2k-1)}{2k\cos\omega+\omega\sin\omega}\, I_{k-1}\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет 2 линейно независимых решения $I_k^{(1)}$ и $I_k^{(2)}$, асимптотики которых представимы в виде

$$\frac{I_{k+1}^{(1)}}{I_k^{(1)}} = -\frac{4k^2}{\omega^2}+O(k), \quad \frac{I_{k+1}^{(2)}}{I_k^{(2)}} = 1+O(k^{-1}), \quad k\to\infty\,. \tag{4}$$

Решение $I_k^{(1)}$ называют доминантным, а $I_k^{(2)}$ – минимальным решением уравнения (3) и именно $I_k^{(2)}$ является искомым. Для его нахождения используем рекурсию (3) в обратном направлении: зададим достаточно большое целое число $N>\omega$, положим $I_{N+1}=1$, тогда значение $I_N$, согласно (4), также положим $I_N=1$. Все последующие $I_k$ при $k=N-1, N-2, \ldots, 0$ вычислим по рекурсии (3) и затем, учитывая линейность соотношения (3), проведем нормировку найденных $I_k$ на коэффициент $\frac{\sin\omega}{\omega I_0}$.

Следующим шагом может служить повторение такой процедуры при увеличении $N_* > N$. Доказано, что коэффициенты $I_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$, стремятся с высокой скоростью к искомым интегралам в (1).

Интегралы $J_k$ в (1) вычисляются аналогично, при этом точность $\varepsilon$ расчетов может быть чрезвычайно высокой.

## О неподвижности основания физического маятника

А.С. Сумбатов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)
*E-mail address*: sumbatow@ccas.ru

На горизонтальной поверхности, опираясь на неё по углам четырьмя точками, стоит симметричная тяжелая прямоугольная рама (основание), в середине которой на вертикальном твердом стержне подвешен физический маятник. Колебания маятника вызывают перераспределение давлений на опорные точки и появление опрокидывающего момента, приложенного к основанию. Предполагается, что в опорных точках возникают силы сухого трения, действующие со стороны опорной плоскости. Ставится задача об определении условий неподвижности основания в зависимости от значений параметров системы при любых колебательных движениях маятника.

В силу геометрической симметрии системы можно рассматривать её плоскую модель.

Задача статически неопределима. Тем не менее, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема.** *Если масса $M$ основания не меньше $0,317768$ от массы $m$ маятника и выполняется условие*

$$-3z_1 + \varepsilon(\lambda+3) + \varepsilon\lambda {z_1}^2 - 2\sqrt{(1+z_1^2)(1+\varepsilon^2)} > 0$$

*то при всевозможных колебательных движениях маятника его основание остается неподвижным.*

Здесь

$$\lambda = \frac{M}{m}, \quad \varepsilon = \min\left(\frac{L}{H}, k\right)$$

$L$ – половина ширины основания, $H$ – высота подвеса маятника, $k$ – коэффициент сухого трения, $z_1$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$\varepsilon\lambda z^3 + \varepsilon(\lambda-3)z - 3 = 0$$

При некотором определенном ограничении на начальное значение угловой скорости и при вращательных движениях физического маятника его основание будет неподвижным.

## Матрицы и тензоры малого ранга в математике и приложениях

Е.Е. Тыртышников (ИВМ РАН, Москва)
*E-mail address*: eugene.tyrtyshnikov@gmail.com

Методы малоранговой аппроксимации матриц и тензоров бурно развиваются в течение уже нескольких десятилетий, при этом в наиболее успешных методах тензоры трансформируются в ассоциированные с ними матрицы и активно применяются методы малоранговой аппроксимации для матриц. В докладе будет представлено современное состояние области, в частности новые результаты, развивающие теорию псевдоскелетных аппроксимаций [1]. В числе наиболее интересных новых приложений отметим методы глобальной оптимизации в задачах докинга и методы повышенной точности для решения уранений типа Смолуховского.

### Литература

1. *S. Goreinov, E. Tyrtyshnikov, N. Zamarashkin*, A theory of pseudoskeleton approximations, Linear Algebra Appl. 261 (1997) 1–21.

# Содержание

ISBN 978-5-6043248-7-5

9 785604 324875