

УДК 519.677

## **ВЛИЯНИЕ СПЕКУЛЯТИВНЫХ МОТИВОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА <sup>1</sup>**

© 2001 г. *В.Н.Разжевайкин*

117967, Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 28.06.2000 г.

Описаны подходы к изучению устойчивости равновесия в модели рынка одного товара и множества участников при наличии у них спекулятивных мотивов. Показано, что такие мотивы могут приводить к колебательной потере устойчивости. Указан способ асимптотического вычисления определяющих собственных значений якобиана, базирующийся на небольшом числе агрегированных по всем участникам характеристик. Приведены некоторые результаты численных расчетов для случая большого числа участников, динамически значимые характеристики которых распределены по стандартным вероятностным законам. Проведено исследование бифуркационной картины потери устойчивости равновесия для упрощенной модели динамики цены. Показан характер возможных автоколебательных режимов и указаны случаи возникновения консервативных динамических систем на границе области устойчивости.

### **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящей работе излагаются некоторые результаты изучения устойчивости положения равновесия в модели рынка одного товара (финансового инструмента) и, возможно, множества участников. Отличительной чертой настоящего рассмотрения от классических подходов, демонстрирующих устойчивость рыночного равновесия, является возможность присутствия у некоторых из участников спекулятивных мотивов при решении вопроса о степени индивидуальной заинтересованности в приобретении или сбыте данного товара. В работе использована одна достаточно простая математическая модель, сводящаяся к автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Ряд приведенных здесь результатов подробнее изложен в работе [1]. Сходные постановки можно также найти в книге [2].

В условиях, когда относительное изменение цены определяется суммарной величиной избыточного спроса, складывающейся из текущих значений избыточного

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-01225).

спроса для каждого из участников, причем значения эти стабилизируются к текущим равновесным значениям, вычисляемым через функции зависимости индивидуального избыточного спроса от цены, добавление членов интегрального вида, учитывающих прошлую ценовую динамику и интерпретируемых как спекулятивные факторы поведения участников, приводит к потере устойчивости, связанной с пересечением парой комплексно-сопряженных корней якобиана соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений мнимой оси. Процесс этого перемещения корней можно отслеживать по изменениям интегральных величин, связанных линейным образом с индивидуальными параметрами, характеризующими степень задействованности их обладателей в спекулятивной игре. Чем больше такая интегральная задействованность, тем менее устойчиво рыночное равновесие. Когда пара корней достигает мнимой оси, устойчивость теряется.

В случае очень большого числа участников возникает проблема вычисления тех собственных значений якобиана, которые ответственны за потерю устойчивости. Для ее решения предлагается способ их асимптотического вычисления, базирующийся на небольшом числе агрегированных по всем участникам характеристик. В качестве иллюстрации приводятся некоторые результаты численных расчетов для случая, когда у большинства участников динамически значимые характеристики распределены по стандартным вероятностным законам.

Ответ на вопрос, что будет происходить после потери устойчивости, линейная теория дать не может. В грубом случае такая ситуация представляет собой бифуркацию Андронова-Хопфа (см. [3]), при которой происходит зарождение устойчивого (в случае если первая ляпуновская величина отрицательна) или исчезновение неустойчивого (в случае когда она положительна) автоколебательного режима (предельного цикла). Напомним, что знак первой ляпуновской величины определяет устойчивость положения равновесия, когда для линейного приближения отслеживаемая пара корней оказывается в точности на мнимой оси. Для вычисления этой величины требуется знание степенных разложений правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия с точностью до членов третьего порядка [3]. С учетом специфики построения такой системы для рассматриваемой задачи это означает необходимость задания разложений такого порядка для функций индивидуального избыточного спроса, что представляется нереальным с практической точки зрения. Однако теоретическое задание таких функций, весьма часто применяемое, например, в

макроэкономических задачах (см., к примеру, [4]) может вызвать определенный интерес к поставленному вопросу. Это вызвано главным образом достаточно простой экономической интерпретируемостью свойств (таких как выпуклость) функций, связанных с характеристиками их производных малого порядка.

Для случая  $N$  участников возникающая система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из  $2N + 1$  уравнений. Даже для  $N = 1$  это создает определенные затруднения (такие, как необходимость нахождения центрального многообразия), уводящие в сторону от решения основной задачи нелинейного этапа - изучения бифуркационной картины динамики системы. Поэтому, дабы предельно упростить рассмотрение, уберем на этом этапе промежуточное звено между ценой и скоростью ее изменения, считая величину индивидуального избыточного спроса не адаптирующейся, а просто равной некоторой функции от цены. Такой подход не является оригинальным (см., например, модель устойчивости рынка в [5, гл. 12]), и, более того, есть следствие общего подхода при достаточно высоких коэффициентах адаптации в силу известной теоремы Тихонова о сингулярных возмущениях. Однако при этом, мы будем включать интегральный член, ответственный за спекулятивное поведение, как слагаемое в правую часть уравнения, задающего относительную скорость изменения цены. Содержательно такое предположение может интерпретироваться как спекулятивное регулирование непосредственно цены товара, а не спроса на него, как это делается на первоначальном, т.е. линейном этапе исследования. С учетом того, что фактически в процессе рыночных взаимодействий цены устанавливаются их участниками, такая интерпретация вполне может иметь право на существование.

Весьма любопытными оказываются результаты, полученные на этом этапе в случае линейного выбора функции избыточного спроса или же функции относительного избыточного спроса. Оказывается, что полученная в обоих случаях система обыкновенных дифференциальных уравнений для значений параметров, соответствующих попаданию на границу области устойчивости, является консервативной.

## 1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Предположим, что имеется рынок одного товара, способного обладать не только потребительской, но и спекулятивной ценностью (это может быть иностранная валюта, ценные бумаги, сырье и т. п.), и многих участников. Состояние рынка в текущий момент

времени определяется текущими значениями цены товара  $P(t) > 0$ , и величины избыточного спроса  $D_i(t)$  у каждого из участников, занумерованных посредством  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Задаваясь индивидуальными функциями спроса  $\tilde{D}_i(P)$ , индивидуальными коэффициентами адаптации  $\gamma_i > 0$  и рыночным "весом" каждого из участников  $r_i \geq 0$ , можно в случае отсутствия спекулятивных мотивов записать простую динамическую модель рынка в виде (здесь и далее  $\partial_u f(u) = df/du$ )

$$\partial_t P = P \sum_{i=1}^N r_i D_i, \quad \partial_t D_i = -\gamma_i (D_i - \tilde{D}_i(P)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

обладающую в случае естественных предположений, содержательно означающих, в частности, что рассматриваемый товар является полезным, т.е. при нулевых ценах пользующимся спросом:

$$\partial_P \tilde{D}_i(P) \leq 0, \quad \tilde{D}_i(0) > 0, \quad \tilde{D}_i(\infty) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \partial_P \sum_{i=1}^N r_i \tilde{D}_i(P) < 0, \quad (1.2)$$

единственным устойчивым положением равновесия  $\bar{P} > 0$ ,  $\bar{D}_i$ , определяемым из условий:

$$\sum_{i=1}^N r_i \bar{D}_i(\bar{P}) = 0, \quad \bar{D}_i = \tilde{D}_i(\bar{P}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

(единственность следует из первого уравнения в (1.3) для  $\bar{P}$  и условий (1.2); об устойчивости будет сказано ниже).

С учетом того, что масштаб  $D_i$  не задан, можно без ограничения общности считать все положительные  $r_i$  равными единице.

Пример 1.  $N = 2$ ,  $\tilde{D}_1(P) = \tilde{D}(P) > 0$  - функция (совокупного) спроса,  $-\tilde{D}_2(P) = \tilde{S}(P) > 0$  - функция (совокупного) предложения. При  $r_1 = r_2 = 1$  получаем классическую систему, используемую в макроэкономических моделях, в статическом варианте определяющую устойчивое рыночное равновесие по формуле: "спрос равен предложению".

Как нетрудно проверить, все излагаемые ниже результаты линейного характера останутся в силе, если вместо выражений  $R_j, j = 0, 1, \dots, N$ , где

$$R_0 = \sum_{i=1}^N r_i D_i, \quad R_i = D_i - \tilde{D}_i(P), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

стоящих в правых частях системы (1.1), будут использованы, соответственно, выражения  $R_j F_j(R_j)$  с гладкими функциями  $F_j(R_j)$ , принимающими положительные значения.

Это обстоятельство оказывается существенным в случае отсутствия полной определенности в методике задания переменных, характеризующих индивидуальные значения спроса. Единственным необходимым условием для того, чтобы на качественном уровне описываемые ниже линейные явления имели место, останется потенциальная возможность задания таких переменных в виде реальных тенденций к росту (падению) цены в условиях избыточного совокупного спроса (предложения) и стабилизации индивидуальных спросов к значениям, являющимся функциями цены.

Введем теперь следующую гипотезу о спекулятивном поведении участников рынка.

Гипотеза. Некоторые из участников рынка могут использовать его товар со спекулятивными целями, что отражается в модели добавлением в правых частях уравнений для  $D_i$  системы (1.1) членов вида:

$$\alpha_i D_i \beta_i \int_0^{\infty} \frac{\partial_t P(t - \tau)}{P(t - \tau)} e^{-\beta_i \tau} d\tau. \quad (1.4)$$

Содержательный смысл подынтегрального выражения, отнесенного к параметру  $\tau > 0$ , заключается в относительной скорости изменения цены товара в  $\tau$ -давний момент с учетом индивидуального коэффициента "дисконтирования"  $\beta_i > 0$  информации, являющейся достоянием отдаленного прошлого (перед интегралом этот коэффициент стоит из соображений нормировки). С точки зрения поведения отдельного участника рынка добавление выражения (1.4) означает, что принимаемые им решения основываются на собственном восприятии динамики рынка, опосредованном через модель, базирующуюся на следующей импликации: чем быстрее росла (падала) цена и чем свежее память об этом росте (падении), причем свежесть (т.е. вероятность сохранения в памяти события) определяется из условия постоянства индивидуальной скорости  $\beta_i$  забывания информации в единицу времени, тем больше шансов получить

прибыль (убыток) на ценовой разнице при покупке товара сейчас и продаже его в ближайшем индивидуально планируемом будущем. С точки зрения рынка в целом, это означает увеличение (сокращение) спроса некоторых из участников (их индивидуальная спекулятивная активность определяется параметрами  $\alpha_i \geq 0$ ). Заметим, что ориентировка участников рынка лишь на конечный исторический горизонт мало влияет на спекулятивную составляющую (по крайней мере при достаточно больших значениях  $\beta_i$ ). С учетом этого замечания можно сказать, что подобная мотивация спекулятивного поведения весьма распространена при работе с высоколиквидными активами.

Пусть  $\bar{P}, \bar{D}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$  выбраны из (1.3). Введем безразмерные переменные

$$u = \ln(P/\bar{P}), \quad v_i(t) = \beta_i \int_0^{\infty} u(t-\tau) e^{-\beta_i \tau} d\tau, \quad w_i = \ln(D_i/\bar{D}_i)$$

Для них система (1.1) с учетом поправок (1.4) примет вид:

$$\begin{cases} \partial_t u = \sum_{i=1}^N r_i \bar{D}_i e^{w_i} \\ \partial_t v_i = \beta_i (u - v_i), \quad \partial_t w_i = \alpha_i \beta_i (u - v_i) - \gamma_i \left( 1 - \frac{\tilde{D}_i (\bar{P} e^u)}{\bar{D}_i e^{w_i}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1.5)$$

Равновесию (1.3) соответствует нулевое положение равновесия системы (1.5).

Целью последующих трех разделов настоящей статьи является демонстрация некоторых весьма эффективных методов анализа линейной устойчивости системы (1.5) вблизи тривиального положения равновесия.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ

Теорема. В обозначениях

$$\rho_i = r_i \bar{D}_i, \quad d_i = \bar{P} \partial_P \tilde{D}_i(\bar{P}) \leq 0, \quad \delta_i = d_i / \bar{D}_i, \quad \varepsilon_i = \alpha_i \beta_i, \quad \sigma_i = \varepsilon_i + \gamma_i \delta_i,$$

$$\Pi = \prod_{i=1}^N (\beta_i + \lambda)(\gamma_i + \lambda)$$

характеристическое уравнение для вычисленного в нуле якобиана системы (1.5) имеет вид:

$$0 = \Pi \left\{ \lambda + \sum_{i=1}^N \rho_i [\varepsilon_i \beta_i / (\beta_i + \lambda) - \sigma_i] / (\gamma_i + \lambda) \right\}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Указанный якобиан имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho_1 & \cdots & \rho_N \\ \beta_1 & -\beta_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_N & 0 & \cdots & -\beta_N & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 & -\varepsilon_1 & \cdots & 0 & -\gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N & 0 & \cdots & -\varepsilon_N & 0 & \cdots & -\gamma_N \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

так что характеристическое уравнение, получающееся разложением  $|A - \lambda I| = 0$  по первой строке, принимает форму

$$(-\lambda)\Pi + \sum_{i=1}^N (-1)^{N+i} \rho_i |A_i| = 0, \quad (2.3)$$

где  $|A_i|$  вычисляется разложением по  $i$ -й строке второй группы в (2.2):

$$|A_i| = (-1)^{N+i+1} \{ -\sigma_i \Pi / (\gamma_i + \lambda) + (-1)^i \varepsilon_i |B_i| \}, \quad (2.4)$$

а матрица  $B_i$  получается из  $A - \lambda I$  вычеркиванием первой и  $(N+i)$ -й строк,  $(i+1)$ -го и  $(N+i+1)$ -го столбцов. В результате разложением матрицы  $B_i$  по строке с единственным ненулевым элементом находим

$$|B_i| = (-1)^{i+1} \beta_i \Pi / [(\gamma_i + \lambda)(\beta_i + \lambda)]. \quad (2.5)$$

Собирая (2.3)-(2.5), получаем для характеристического уравнения соотношение (2.1).

Замечание. В условиях

$$\gamma_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N \rho_i d_i < 0$$

указанная матрица является невырожденной, что следует из (2.1) при подстановке  $\lambda = 0$ .

Пример 2. В частном случае  $\alpha_i = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , характеристическое уравнение (2.1) принимает вид

$$0 = \Pi \left[ \lambda - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i \delta_i \gamma_i}{(\gamma_i + \lambda)} \right]. \quad (2.6)$$

Оно имеет  $N$  корней, совпадающих с  $-\beta_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , и  $N+1$  корней, совпадающих с корнями матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_1 & \cdots & \rho_N \\ \sigma_1 & -\gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N & 0 & \cdots & -\gamma_N \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_i = \gamma_i \delta_i$ ,  $\rho_i \sigma_i \leq 0$ ,  $\gamma_i > 0$ . Заметим, что эта, как и такая же матрица, но уже в обозначениях  $\rho_i = r_i \bar{P}$ ,  $\sigma_i = \gamma_i d_i \leq 0$ , получающаяся при линеаризации системы (1.1) около стационарного решения (1.3), обладает свойством знак-устойчивости (см. [6], а также [7, гл. 4]), т.е. остается устойчивой при умножении ее элементов на любые положительные постоянные, если по крайней мере для одного номера  $i$  будет выполнено  $\rho_i \neq 0$ . Впрочем, устойчивость указанной матрицы при этих условиях легко следует и из (2.6): если бы для некоторого корня  $\lambda$  было  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , то он обращал бы в нуль выражение в квадратных скобках, откуда следовало бы  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

В другом частном случае  $\beta_i = \beta > 0$ ,  $\gamma_i = \gamma > 0$  характеристическое уравнение имеет  $(N-1)$  - кратные корни  $-\beta$  и  $-\gamma$  и еще три корня, определяемых из кубического уравнения

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (2.7)$$

где

$$a = \beta + \gamma > 0, \quad b = \beta\gamma - (\beta S_a + \gamma S_d), \quad c = -\beta\gamma S_d, \quad S_a = \sum_{i=1}^N \rho_i \alpha_i, \quad S_d = \sum_{i=1}^N \rho_i d_i. \quad (2.8)$$

Потеря устойчивости в этом случае может происходить только на корнях уравнения (2.7), причем условие устойчивости Рауса-Гурвица определяется неравенством  $h = c - ab < 0$ . Подставляя сюда выражения для коэффициентов из (2.8), можно убедиться, что эта потеря устойчивости возможна только в случае  $\beta > 0$ , причем при достаточно больших  $\beta$  она будет иметь место при  $S_a > \gamma$ . Согласно приведенному выше замечанию в этом случае с ростом  $\beta$  будет наблюдаться пересечение парой комплексно-сопряженных корней мнимой оси. Случаю попадания их на мнимую ось соответствует



равенство  $h=0$ . Из соотношения  $\lambda_{23} = \pm i\omega$  в условиях  $h = 0$  находим  $\omega^2 = b$ , откуда для угловой скорости колебаний, возникающих на границе области устойчивости, получаем  $\omega = [-\beta - \gamma S_d / (\beta + \gamma)]^{1/2}$ . Очевидно также, что в этом случае  $\lambda_1 = -(\beta + \gamma)$ . Отметим, что условие  $S_a > \gamma$ , определяющее возможность потери устойчивости с ростом  $\beta$ , содержательно соответствует существенному влиянию спекулятивных мотивов в рассматриваемой системе.

Рассмотренный здесь второй частный случай может иметь место для любого  $N \geq 1$ , что демонстрирует возможность колебательной потери устойчивости рыночного равновесия из-за наличия спекулятивных мотивов для рынка с любым числом участников. Устойчивость возникающих при этом автоколебательных режимов будет зависеть от характера нелинейностей функций избыточного спроса каждого из участников в окрестности равновесного значения цены.

### 3. ЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА.

В рассмотренном в конце предыдущего раздела вырожденном случае для определения устойчивости рыночного положения равновесия помимо нескольких констант, относящихся ко всем участникам, требовалось знание только двух агрегированных по всем участникам показателей:  $S_a$  и  $S_d$ . Индивидуальный характер входящих в эти показатели составляющих значения не имел, так как связанные с ним собственные значения характеристического уравнения заведомо попадали в левую полуплоскость и на возможность появления неустойчивости оказывать влияния не могли.

В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности обобщения указанного свойства на общий случай. В явном виде его постановка может звучать следующим образом: Существует ли способ определения локализации по отношению к мнимой оси главных (т.е. с максимальной вещественной частью) собственных значений якобиана системы (1.5), вычисленного около тривиального положения равновесия, основанный на нахождении некоторого не зависящего от общего числа участников набора агрегированных по всем ним показателей? В более слабой формулировке можно было бы ставить вопрос не о фиксированном наборе таких показателей, а о некоторой процедуре нахождения некоторого их набора, априори не ограниченного сверху, но тем не менее достаточно обозримого. Расплывчатость последней формулировки взывает к

привлечению некоторого интуитивного опыта читателя, представляющего, что вычисление собственных значений квадратной матрицы, состоящей из  $2N+1$  строк, для случая очень большого  $N$  является существенно более сложной задачей даже с учетом современных вычислительных возможностей, чем вычисление по заданным формулам некоторых агрегированных по всем номерам  $i=1,2,\dots,N$  показателей. В настоящем разделе мы попытаемся обрисовать возможности положительного ответа на этот вопрос.

Фиксируем некоторые (ниже уточним, какие именно) положительные  $\beta$  и  $\gamma$  и рассмотрим исходные параметры как возмущения при  $s = 1$ :  $\beta_i(s) = \beta + b_i s$  и  $\gamma_i(s) = \gamma + g_i s$ , так что  $\beta_i = \beta_i(1)$  и  $\gamma_i = \gamma_i(1)$ . При этом если  $\lambda_0 = \lambda_0(\beta, \gamma)$  - один из двух комплексных корней характеристического уравнения, рассмотренных в примере 2 (для определенности можно выбрать тот из них, который имеет положительную мнимую часть), то функцию  $\lambda(s)$ , получающуюся из  $\lambda_0$  аналитическим продолжением по  $s$  корня характеристического уравнения (2.1) при выбранных  $\beta_i(s)$  и  $\gamma_i(s)$ , можно искать в виде ряда:

$$\lambda(s) = \lambda_0(\beta, \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n s^n \quad (3.1)$$

Поскольку параметры  $\beta$  и  $\gamma$  являются свободными, мы можем выбрать их из уравнения  $x_1 = 0$ , которое, будучи комплексным, эквивалентно системе двух вещественных уравнений. Эти уравнения могут быть получены приравнением к нулю действительной и мнимой частей выражения, полученного дифференцированием по  $s$  при  $s = 0$  соотношения (2.1) после подставленных туда выражений для  $\beta_i(s)$ ,  $\gamma_i(s)$  и  $\lambda(s) = \lambda_0(\beta, \gamma)$ . Заметим, что если вместо последней подстановки воспользоваться подстановкой (3.1), то полученная описанным здесь способом система уравнений позволяет решить обратную задачу, т.е. вычислить  $x_1$  по заданным значениям  $\beta$  и  $\gamma$ .

Применение на этом пути двукратного дифференцирования вместо однократного позволяет вычислить  $x_2$ . Вообще говоря, при уже вычисленных  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $x_k$  для  $k < n$  применение  $n$ -кратного дифференцирования задает линейное уравнение относительно  $x_n$ .

Все такие уравнения помимо уже вычисленных значений содержат только агрегированные переменные описанного выше типа. Так, например, для нахождения  $x_1$

при заданных значениях  $\beta$  и  $\gamma$  (равно как и для вычисления последних при условии  $x_1 = 0$ ) помимо  $S_a$  и  $S_d$  требуется еще дополнительно знание агрегатов  $W_a(1,0)$ ,  $W_a(0,1)$  и  $W_d(1)$ , где

$$W_a(k,l) = \sum_{i=1}^N \rho_i \alpha_i \beta_i^k \gamma_i^l, \quad W_d(l) = \sum_{i=1}^N \rho_i \delta_i \gamma_i^l. \quad (3.2)$$

В общем случае для нахождения  $x_n$  надо знать  $S_a$ ,  $S_d$ , все  $W_a(k,l)$  с  $k+l \leq n$  и все  $W_d(l)$  с  $l \leq n$ , т.е. всего  $(n+3)(n+2)/2 - 1$  агрегатов.

Как показывают численные расчеты (см. следующий раздел), уже первое приближение позволяет в большинстве случаев подойти весьма близко к искомому значению, т.е. найти такие  $\beta$  и  $\gamma$ , что будет выполнено неравенство

$$|\lambda(1) - \lambda_0(\beta, \gamma)| \ll |\lambda_0(\beta, \gamma)|.$$

В этом смысле вычисляемые на этом этапе параметры  $\beta$  и  $\gamma$  можно рассматривать как некоторые агрегаты для наборов  $\{\beta_i\}$  и  $\{\gamma_i\}$ . Что касается алгоритмов поиска  $\beta$  и  $\gamma$ , то они могут быть различны, хотя во всех случаях в своей локальной структуре основываются на знании только пяти агрегатов (см. изложенное выше рассмотрение для  $n = 1$ ). Такое их свойство было обозначено в работе [1] как свойство локально определенной агрегируемости в рассматриваемой здесь задаче о локализации главных собственных значений.

Поясним несколько подробнее процедуру поиска  $\beta$  и  $\gamma$ . Система уравнений для вычисления  $\beta$  и  $\gamma$  получается приравниванием к нулю вещественной и мнимой частей выражения

$$\lambda(\lambda + \beta) \{-\beta[W_a(0,1) - \gamma S_a] + (\lambda + \beta)[W_d(1) - \gamma S_d]\} + \lambda^2(\lambda + \gamma)[W_a(1,0) - \beta S_a] \quad (3.3)$$

в котором в качестве  $\lambda$  выбирается  $\lambda_0(\beta, \gamma)$ . Для тех, кто интересуется происхождением этого выражения, заметим, что оно может быть получено как числитель выражения для  $x_1$ , построенного по описанной выше методике.

Одним из возможных алгоритмов решения системы является алгоритм, основанный на методе Ньютона нахождения корней системы двух алгебраических уравнений. Он был опробован для нашей задачи и оказался весьма эффективным, но

чрезвычайно громоздким. Существенную роль в возможности его эффективного применения сыграло то обстоятельство, что интересующий нас случай с комплексными корнями кубического уравнения соответствовал отрицательности его дискриминанта, что позволило в явном виде в квадратурах выразить его вещественный, а через него и комплексные корни. Однако использование обратной к якобиану матрицы в условиях громоздкого вида самого якобиана чрезвычайно замедляло расчеты.

Другой, не менее эффективный, хотя существенно более простой с точки зрения практического применения, алгоритм нахождения  $\beta$  и  $\gamma$  заключается в применении итерационной процедуры  $\beta' = \beta + \Delta\beta$ ,  $\gamma' = \gamma + \Delta\gamma$  с подстановкой  $\beta'$  и  $\gamma'$  в выражение (3.3) вместо  $\beta$  и  $\gamma$ , соответственно, только на местах множителей при  $S_a$  и  $S_d$ . Считая  $\beta$  и  $\gamma$  известными, получаем систему двух *линейных* уравнений относительно  $\Delta\beta$  и  $\Delta\gamma$ , решение которой позволяет выбрать в качестве  $\beta$  и  $\gamma$  на следующем шаге вычисленные  $\beta'$  и  $\gamma'$ . При таком подходе незначительное увеличение по сравнению с методом Ньютона числа итераций, требуемых для получения стабилизации  $\beta$  и  $\gamma$  с заданной точностью, с лихвой компенсируется упрощением процедуры счета, а стало быть, и сокращением времени, необходимого для проведения каждой отдельной итерации.

Если не ограничиваться первым приближением, то можно увидеть, что стабилизация по  $\lambda$  происходит очень быстро с ростом номера приближения, так что принимать в расчет уточнения, получаемые за счет приближений высоких порядков, а значит, и большое число исходно рассматриваемых агрегатов (3.2) не имеет смысла.

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для расчетов индивидуальные функции зависимости избыточного спроса от цены выбирались из широкого класса выпуклых монотонно убывающих функций. Характер полученных результатов очень мало зависит от конкретного вида таких функций и может быть проиллюстрирован на примере линейных параметризаций вида  $\tilde{D}_i(P) = D_i^0 - k_i P / P_0$  с некоторым масштабным параметром  $P_0 > 0$  и положительными коэффициентами  $D_i^0$  и  $k_i$ . Содержательно такой выбор означает, в

частности, что рассматриваемый товар является полезным. Равновесные значения  $\bar{P}$  и  $\bar{D}_i$  вычисляются из соотношений (1.3), так что если обозначить

$$H = \sum_{i=1}^N r_i D_i^0 / \sum_{i=1}^N r_i k_i,$$

то будет выполнено

$$\bar{P} = P_0 H, \quad \bar{D}_i = D_i^0 - k_i H, \quad \delta_i = -k_i H / \bar{D}_i.$$

Исходные индивидуальные параметры выбирались случайным образом. Для положительных параметров  $D_i^0$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $r_i$  использовались логарифмически нормальные распределения.

Приведем результаты одного из проделанных расчетов. Поиск значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , представляющих "агрегированные" в смысле раздела 3 соответствующие индивидуальные значения параметров по всему ансамблю участников, осуществлялся по второму из описанных там способов. Число использованных для этого итераций было выбрано равным 40, степень приближения искомого собственного значения равнялась 7, количество участников  $N = 250$ , масштабный уровень цен  $P_0 = 1$ , параметры задаваемых логарифмически нормальных распределений выбирались таким образом:

ПАРАМЕТР	$D_i^0$	$k_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$r_i$
<b>M(log(.))</b>	<b>0.5</b>	<b>2.5</b>	<b>1.2</b>	<b>2.5</b>	<b>1.3</b>	<b>1.9</b>
<b>D(log(.))</b>	<b>0.52</b>	<b>1.5</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	<b>0.5</b>	<b>1.0</b>

(первая строка - обозначение параметра распределения, вторая - математическое ожидание его логарифма, третья - дисперсия логарифма).

Результаты расчетов можно видеть на приведенных ниже графиках. От некоторых произвольно выбранных положительных начальных значений  $\beta$  и  $\gamma$  достаточно быстро происходит их установление к асимптотическим значениям 12.30 и 3.134 соответственно (см. фиг.1, сплошная кривая для  $\beta$  и пунктирная для  $\gamma$ ). Полученные на этом этапе результаты для действительной и мнимой частей комплексных собственных значений (начальные значения на фиг, 2 и 3 соответственно), ответственных за устойчивость стационарного решения, определяющего рыночное равновесие моделируемой системы,

дают их первое приближение, которое затем уточняется (как видно из фиг. 2 и 3, ненамного), устанавливаясь на уровне  $-7.284$  и  $429.7$  соответственно.

Равновесный уровень цен в такой ситуации принимает значение  $\bar{P} = 0.0422$ .

Заметим, что приведенные на этих рисунках результаты типичны в том смысле, что отражают качественные характеристики изменения указанных на них переменных для весьма широкого спектра параметризаций. Более того, если не ограничиваться распределениями исходных параметров, так или иначе связанными с нормальными, а допустить рассмотрение более "реальных" в смысле экономических интерпретаций распределений, таких как равномерные или, напротив, обратно-степенные, то, как показывают расчеты, свойства сходимости будут проявляться не менее ярко, а для обозначенных здесь случаев даже усилятся.

## 5. УСТОЙЧИВОСТЬ В МОДЕЛИ СПЕКУЛЯТИВНОЙ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ

Этот и следующий разделы посвящены вопросам, касающимся исследования нелинейной картины бифуркаций для описанной в предыдущих разделах потери устойчивости. Рассматривается упрощенный вариант единственного участника, величина избыточного спроса которого является заданной функцией цены товара. Содержательная интерпретация используемой здесь постановки была подробно описана в заключительной части введения.

В случае когда (относительная) скорость изменения цены в условиях отсутствия спекулятивных мотивов задается некоторой убывающей от нее функцией, которую мы отождествляем с функцией (относительного к цене) избыточного спроса, добавление в правую часть членов вида (1.4), учитывающих такие мотивы, приводит в результате к модели динамики цены, описываемой одним интегродифференциальным уравнением вида

$$\partial_t P(t) = \alpha \beta P(t) \int_0^{\infty} \frac{\partial_t P(t-\tau)}{P(t-\tau)} e^{-\beta \tau} d\tau + D(P(t)). \quad (5.1)$$

Здесь, как и раньше,  $P(t)$  - цена товара в момент времени  $t$ ,  $D(P)$  - функция зависимости избыточного спроса от цены,  $\beta > 0$  - коэффициент забывания (дисконтирования) отдаленного прошлого,  $\alpha > 0$  - показатель спекулятивной активности. Предполагается, что

$$\partial_P D(P) < 0, \quad (5.2)$$

причем для некоторого  $P_s > 0$  выполнено  $D(P_s) = 0$ .

Таким образом, при  $\alpha = 0$  положение равновесия  $P_s$  уравнения (5.1) является глобально асимптотически устойчивым. Будем называть его рыночным равновесием.

При  $\alpha \neq 0$  на динамику  $P(t)$  оказывает влияние первый член правой части (5.1), отражающий спекулятивное поведение участников рынка. Интерпретация для этого члена здесь такая же, как и для выражения (1.4) в общей модели.

В переменных

$$u = \ln(P / \bar{P}), \quad v(t) = \beta \int_0^{\infty} u(t - \tau) e^{-\beta \tau} d\tau$$

уравнение (5.1) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\partial_t u = \alpha \beta (u - v) + D(P_s e^u) / (P_s e^u), \quad \partial_t v = \beta (u - v), \quad (5.3)$$

с тривиальным положением равновесия, соответствующим рыночному равновесию  $P_s$  уравнения (5.1). Обозначая  $\delta = -\partial_P D(P_s) > 0$  (см. (5.2)), для якобиана  $A$  правой части (5.3) в положении равновесия находим

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \beta - \delta & -\alpha \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

что дает для следа и детерминанта

$$\text{tr} A = \beta(\alpha - 1) - \delta, \quad \det A = \beta \delta > 0, \quad (5.5)$$

так что оба корня одного знака и лежат в левой полуплоскости при

$$\alpha < \alpha_0 = 1 + \delta / \beta. \quad (5.6)$$

При увеличении  $\alpha$  с прохождением через пороговое значение  $\alpha_0$  корни пересекают мнимую ось, переходя в правую полуплоскость. Для определения характера возникающей бифуркации вычислим первую ляпуновскую величину. С этой целью мы зададимся первыми тремя членами степенного разложения функции  $D(P)/P$  в окрестности  $P_s$ :

$$\frac{D(P)}{P} = -\delta \frac{(P - P_s)}{P_s} + a_2 \frac{(P - P_s)^2}{2P_s^2} + a_3 \frac{(P - P_s)^3}{6P_s^3} + o\left(\left|\frac{(P - P_s)^3}{P_s^3}\right|\right),$$

где  $a_i = P^i \partial_P^i (D(P)/P)$  при подстановке  $P = P_s$ . Система (5.3) при этом может быть переписана в виде:

$$\partial_t u = au + bv + a_{20}u^2 + a_{30}u^3 + o(|u|^3), \quad \partial_t v = cu + dv, \quad (5.7)$$

где линейные коэффициенты взяты из (5.4), а нелинейные вычисляются по формулам:

$$a_{20} = (a_2 - \delta)/2, \quad a_{30} = (a_3 + 3a_2 - \delta)/6 \quad (5.8)$$

(в силу того, что  $\partial_u = P\partial_P$ ). Первая ляпуновская величина вычисляется при условии

$$\text{tr}A = 0 \quad (5.9)$$

и равна (см. [3, гл. 11.5])

$$L_1 = -\frac{\pi G}{4b\omega^3} = \frac{\pi G}{4\alpha\beta\omega^3},$$

где  $\omega = \sqrt{\det A} = \sqrt{\beta\delta}$  - угловая скорость колебаний при условии (5.9), а  $G$  вычисляется из (5.7) по формуле:

$$G = b[3(a^2 + bc)a_{30} - 2aa_{20}^2]. \quad (5.10)$$

Условие (5.9) эквивалентно тому, что  $a = \beta$ , или же (см. (5.4) и (5.5))

$$\delta = \beta(\alpha - 1), \quad (5.11)$$

откуда получаем  $a^2 + bc = -\beta\delta$ . Подставляя это соотношение в (5.10), находим с учетом (5.8)

$$G = \alpha\beta^2[a_2^2 + \delta(a_2 + a_3)],$$

так что

$$L_1 = \frac{\pi[a_2^2 + \delta(a_2 + a_3)]}{8\delta\omega}. \quad (5.12)$$

В терминах безразмерных производных

$$d_i = P^{i-1} \partial_P^i (D(P)), \quad i = 2, 3,$$

вычисленных при  $P = P_s$ , выражение в квадратных скобках в (5.12) будет равно



$$d_2^2 + \delta(2d_2 + d_3), \quad (5.13)$$

поскольку  $a_2 = d_2 + 2\delta$ ,  $a_3 = d_3 - 3d_2 - 6\delta$ .

## 6. ДВА СЛУЧАЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Из результатов предыдущего раздела следует, что в случаях, когда функция избыточного спроса  $D(P)$ , или функция относительного избыточного спроса  $D(P)/P$  является линейной, первая ляпуновская величина  $L_1$  обращается в нуль (так как  $d_2 = d_3 = 0$ ). В такой ситуации для определения устойчивости линейно-пограничного состояния следует вычислять знак у старших ляпуновских величин [3]. Однако и эти величины обращаются в нуль, и это не случайно. Оказывается, что полученная таким образом система обыкновенных дифференциальных уравнений является консервативной.

Покажем это. Разберем подробно первый случай. Пусть

$$D(P) = \delta(P_s - P). \quad (6.1)$$

Тогда система (5.3) может быть переписана в виде

$$\partial_t u = \alpha\beta(u - v) - \delta(1 - e^{-u}), \quad \partial_t v = \beta(u - v), \quad (6.2)$$

где в силу (5.9) следует воспользоваться подстановкой  $\beta = (\alpha - 1)\beta$  (см. (5.11)). Меняя масштаб времени, можно в (6.2) считать  $\beta = 1$ . Вводя новые переменные  $q = e^{-u}$ ,  $w = u - v$ , можно переписать (6.2) в виде

$$\partial_t q = -q[\alpha w + (\alpha - 1)(q - 1)], \quad \partial_t w = (\alpha - 1)(w + q - 1). \quad (6.3)$$

Эта система имеет нелинейности не выше второго порядка и заменой переменной  $s = \alpha(1 - w - q) + q$  приводится к системе вида:

$$\partial_t q = q(s - 1), \quad \partial_t s = ks(1 - q), \quad (6.4)$$

являющейся консервативной вольтерровской системой типа "хищник-жертва" (см. [8, гл.1]). Построенный для (6.4) первый интеграл в терминах переменных  $(q, w)$  имеет вид

$$U(q, w) = \frac{\exp[\alpha(1 - w)]}{q^{\alpha-1}[\alpha(w + q - 1) - q]}. \quad (6.5)$$

Нетрудно также непосредственно проверить, что для сразу "угаданной" функции (6.5) будет выполнено  $dU/dt = \partial_q U \partial_t q + \partial_w U \partial_t w = 0$ , т.е. система (6.3) (а значит и (5.3)) при выборе (6.1) является консервативной при выполнении условий (5.11).

Точно так же и во втором случае в условиях параметризации вида

$$D(P) = \delta P(P_s - P)/P_s \quad (6.6)$$

система (5.3), приведенная к виду (ср. с (6.2))

$$\partial_t u = \alpha\beta(u - v) + \delta(1 - e^u), \quad \partial_t v = \beta(u - v)$$

в условиях (5.11) заменой переменных

$$q = e^u, \quad s = \alpha(u - v + 1 - q) + q,$$

сводится к (6.4), т.е. также является консервативной.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная в настоящей работе методика линейного анализа характеристического уравнения (2.1) позволяет свести многомерную задачу к одномерной, т.е. выписать систему исходного вида для случая  $N=1$ , имеющую почти такие же собственные значения якобиана, что и у исходной задачи. Исследование же устойчивости одномерной задачи весьма просто и сводится к исследованию кубического уравнения. В частности, устанавливается, что при определенных наборах параметров система может потерять устойчивость, причем если рассматривать изменение параметров вблизи границы области устойчивости, то может наблюдаться ее колебательная потеря, соответствующая переходу пары комплексно-сопряженных корней через мнимую ось. Условие попадания на границу устойчивости и частота колебаний на границе весьма просто выражаются через параметры одномерной задачи. Незначительные поправки для главных собственных значений, связанные с учетом неточности указанной одномерной аппроксимации, не вносят каких-либо существенных изменений в характер наблюдаемой картины устойчивости стационарных решений.

Более детальное исследование картины возникающей потери устойчивости возможно на упрощенной модели динамики цены, для которой учитывается наличие спекулятивных мотивов. Полученные с ее помощью результаты получают прозрачную экономическую интерпретацию.

1). Наличие спекулятивных мотивов является дестабилизирующим фактором для рыночного равновесия, причем потеря устойчивости происходит в колебательном режиме.

2). Частота возникающих колебаний в условиях, близких к критическим для потери устойчивости положения равновесия, пропорциональна среднему геометрическому между коэффициентом дисконтирования прошлого ( $\beta$  из раздела 5), служащего для описания исключительно спекулятивного поведения, и скоростью убывания избыточного спроса с ростом цены в окрестности рыночного равновесия ( $\delta$  из раздела 5), которая является исключительно рыночным параметром.

3). В случае малой спекулятивной активности ( $\alpha$  из раздела 5) рыночное положение равновесия остается линейно устойчивым. Критическим значением для нее является  $\alpha_0 > 1$  (см. (5.6)), превышение которого приводит к развитию линейной неустойчивости.

4). В окрестности критической точки, т.е. при  $|\alpha - \alpha_0| \ll \alpha_0$ , в зависимости от знака величины  $L_1$  (см. (5.12) и (5.13)), выражающейся через члены порядка не выше третьего в разложении функции избыточного спроса (или же относительного избыточного спроса) в окрестности рыночного равновесия, будет наблюдаться исчезновение неустойчивого (при  $L_1 > 0$ ) или же зарождение устойчивого (при  $L_1 < 0$ ) предельного цикла. В первом случае говорят о жесткой, а во втором - о мягкой потере устойчивости. Амплитуда колебаний, соответствующих этому циклу, пропорциональна величине  $r(\alpha) = \sqrt{-(\alpha - \alpha_0)/L_1}$  (см., например, [9, гл. 6]).

В случае жесткой потери устойчивости эта величина характеризует при  $\alpha < \alpha_0$  область притяжения устойчивого рыночного равновесия, т.е. величину возможных отклонений от него, при развитии которых наблюдается неустойчивая динамика.

В случае мягкой потери устойчивости  $r(\alpha)$  при  $\alpha > \alpha_0$  характеризует просто амплитуду возникающего устойчивого автоколебательного режима.

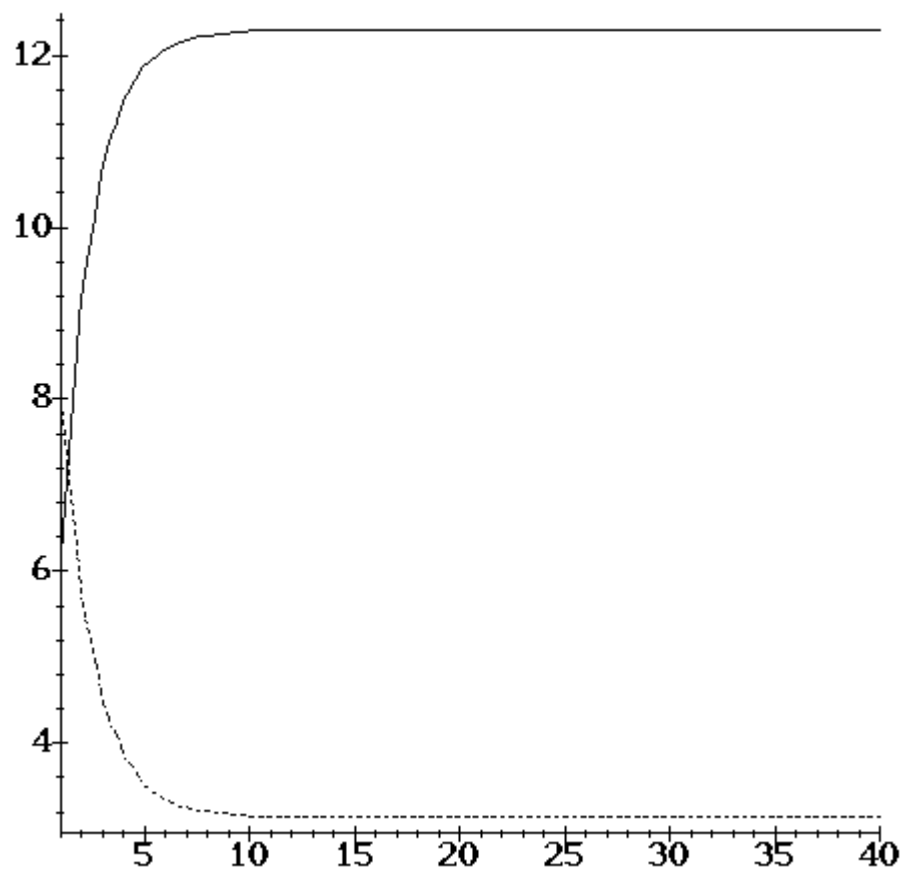
5). Часто используемые (см., например, [4]) в экономических моделях линейные параметризации (6.1) и (6.6) для, соответственно, функции избыточного спроса от цены и функции относительного избыточного спроса не являются характерными в исследовании вопроса о потере устойчивости при наличии спекулятивных мотивов. Наблюдаемая для них картина в условиях критического значения бифуркационного параметра (т.е. при  $\alpha = \alpha_0$ ) демонстрирует консервативный характер возникающих

динамических систем. Это означает, в частности, что выводы, изложенные в предыдущем пункте, к ним отношения не имеют.

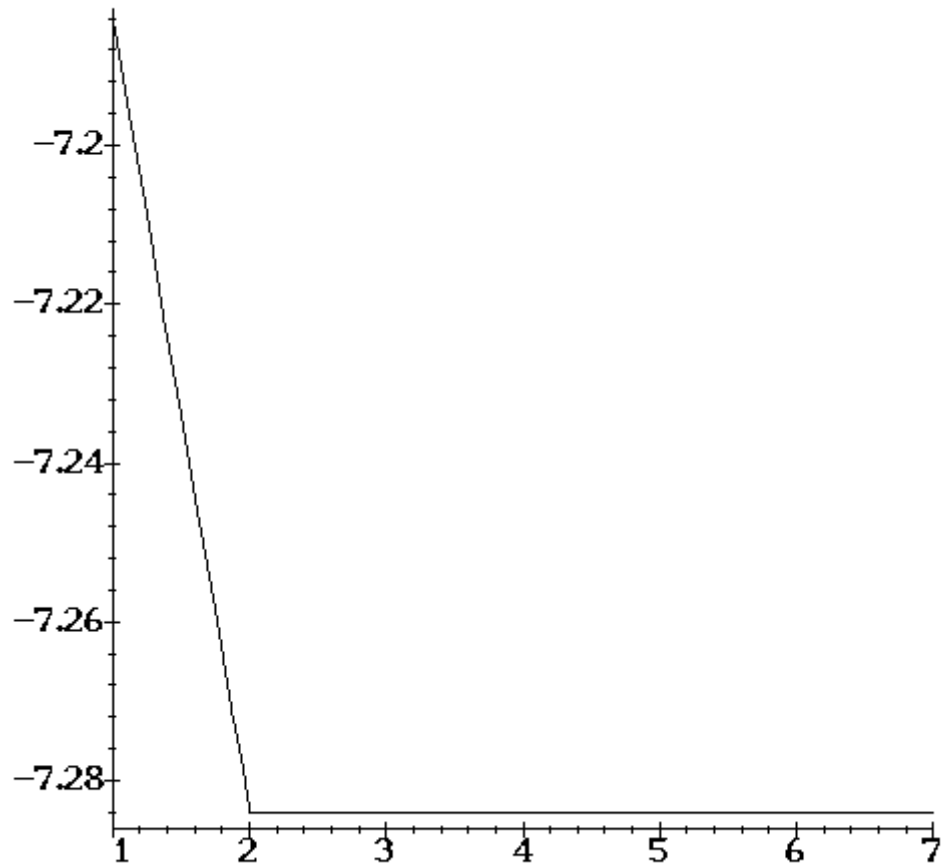
### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разжевайкин В.Н. Методы исследования устойчивости в модели рынка при наличии у его участников спекулятивных мотивов// Иссл. операций. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 46-60.
2. Петров А.А., Пospelов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования в экономике. М.: Энергоатомиздат, 1996.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
4. Мэнкью Н.Г. Макроэкономика. М.: МГУ, 1994.
5. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1979.
6. Quirk J.P., Ruppert R. Qualitative economics and the stability of equilibrium // Rev. Econ. Studies, 1965, v. 32, No 92. P. 311-326.
7. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
9. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

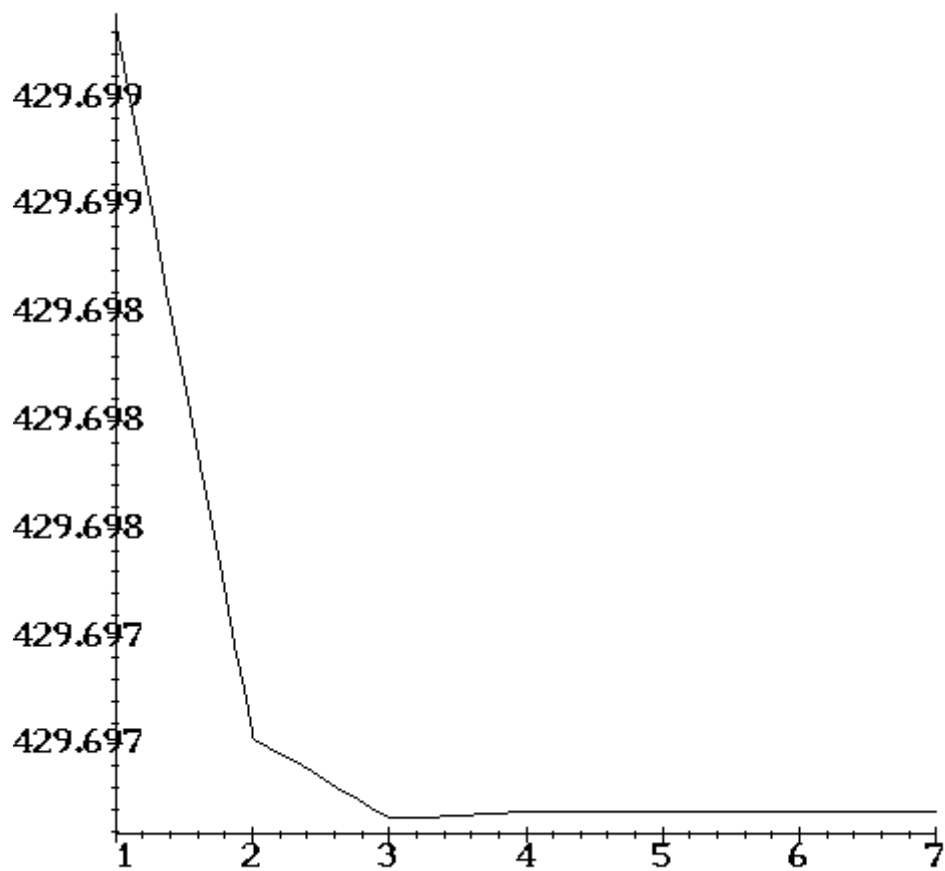
## РИСУНКИ



**Фиг.1** Показан процесс установления  $\beta$  (сплошная кривая) и  $\gamma$  (пунктирная кривая) в соответствии с описанной в третьем разделе итерационной процедурой.



**Фиг.2.** Наблюдается установление вещественной части главного собственного значения якобиана системы (1.5) в окрестности тривиального положения равновесия.



**Фиг.3.** То же, что и на фиг.2, но для мнимой части главного собственного значения якобиана системы (1.5).