В.Н.Разжевайкин, М.И.Шпитонков

Модельные оценки в многомерной диффузионной модели корреляционной адаптометрии

Постановка задачи

В [1] была построена и обоснована диффузионная модель корреляционной адаптометрии вида:

$$\partial_t u = a\Delta u - (\vec{b}, \nabla u), \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \subset^n$, $t \in_+$,$\nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})$, $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $\Delta = (\nabla, \nabla)$ - оператор Лапласа по x , $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в ^{n} , $\vec{b} \neq 0$ - n - мерный вектор. Считается, что ограниченная область Ω имеет достаточно гладкую границу, на которой существует единственная точка $s(\vec{b}) \in \partial\Omega$ такая , что вектор внешней нормали к границе в этой точке совпадает как по направлению, так и по знаку с вектором $\vec{b}$, причем вся область находится по одну сторону от $s(\vec{b})$ по направлению $\vec{b}$. Без ограничения общности будем считать, что ортогональная система координат в ^{n} выбрана таким образом, что $s(\vec{b})$ находится в ее начале, а $-x_n$ совпадает с направлением вектора $\vec{b}$ (см. рис.1), так что $\vec{b} = -be_n$, где b >0 , а e_n - единичный вектор в направлении x_n.

Для граничных условий непроницаемости

$$(a\nabla u - \vec{b}u, \nu)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ. Коды проектов N° 03-01-00678,N° 04-01-00309

Рис. 1: Граница области в окрестности крайней точки.

где ν - нормаль к $\partial\Omega$ существует единственное (с точностью до умножения на константу) стационарное решение задачи (1) вида:

$$u(x) = v(x_n) = v_0 e^{-\frac{bx_n}{a}} \tag{3}$$

То, что (3) является решением, проверяется его непосредственной подстановкой в (1), (2), а его единственность следует из знакопостоянства, обеспечивающего принадлежность собственному подпространству соответствующему максимальному собственному значению оператора L , определяемого правой частью (1) при краевых условиях (2). Этот оператор является самосопряженным неограниченным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} e^{-\frac{b}{a}x_n} u(x)v(x)dx$. Его максимальное собственное значение является простым, а соответствующая собственная функция - знакопостоянная как доставляющая максимум форме $\frac{\langle Lu,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$. Необходимость перемены знака у собственных функций, соответствующих остальным собственным значениям, вытекает из свойства ортогональности (по указанному скалярному произведению) для собственных функций, соответствующих различным собственным значениям.

Отметим также, что стационарность решения (3), означающая также равенство нулю максимального собственного значения оператора L , влечет также устойчивость этого решения с точностью до пропорциональных изменений. В дальнейшем без ограничения общности будем считать $v_0 = 1$. Математической моделью измеряемых в задачах корреляционной адаптометрии величин являются наборы линейных функций

$$\varphi \ = \ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i, \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i x_i \tag{4}$$

с ненулевым n набором компонент, а моделью определяющих значимые свойства адаптации статистических характеристик (вес корреляционного графа и т. п.) - их коэффициенты корреляции по распределению (3):

$$K(\varphi, \psi) = \frac{M[(\varphi - M\varphi)(\psi - M\psi)]}{(M[(\varphi - M\varphi)^2]M[(\psi - M\psi)^2])^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

где

$$M(\varphi) \ = \ \frac{\int\limits_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx}{\int\limits_{\Omega} u(x) dx} \tag{6}$$

- среднее значение функции $\varphi(x)$ по распределению $u(x)$ в области Ω

Задача настоящей работы заключается в исследовании зависимости выражения (5)от параметров уравнения (1) с учетом (4).

Оценка в параболической области

В случае общего положения в окрестности точки $s(\vec{b})$ граница области Ω может быть представлена в виде $\partial\Omega = \{x : x_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 + o(x^2)\}$, где все $a_i > 0, i = 1, ..., n-1$.

Параболической аппроксимацией области Ω в точке $s(\vec{b})$ будем называть параболическую область вида:

$$\Omega_p = \{x : x_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2\} \tag{7}$$

Расчеты коэффициентов корреляции (5) для распределения (3) будем проводить для области (7), так что в этом разделе в (6) интегрирование осуществляется по области Ω_p вместо Ω . Каждой функции φ из (4)сопоставим вектор $\bar{\varphi} = (\frac{\varphi_1}{\sqrt{a_1}}, ..., \frac{\varphi_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}}}, 0)$. Угол между векторами $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ будем обозначать как $\angle\bar{\varphi}\bar{\psi}$.

Для параболической области (7) и функции из (4) справедлива

Теорема 1.

1) при $b \to \infty$, $\bar{\varphi} \neq 0$,$\bar{\psi} \neq 0$ $\quad K(\varphi, \psi) \to \cos(\angle\bar{\varphi}\bar{\psi})$

2) при $b \to 0$ и $\varphi_n\psi_n \neq 0$ $\quad K(\varphi, \psi) \to \text{sign}(\varphi_n\psi_n)$

Доказательство.

Обозначим $N = \int\limits_{\Omega_p} u(x)dx$ и $M_{k,\vec{l}} = M(x_1^{l_1} x_2^{l_2} ... x_{n-1}^{l_{n-1}} x_n^k)$, где $\vec{l} = (l_1, ..., l_{n-1})$. Если какое-либо l_i нечетно, то очевидно $M_{k,\vec{l}} = 0$. Поэтому интерес могут представлять только $M_{k,2\vec{l}}$. В частности положим $M_k = M_{k,\vec{0}}$. , $M_0 = 1$. Для них (здесь и далее $\gamma = \frac{b}{a}$)

$NM_k = \int\limits_{\Omega_p} x_n^k e^{-\gamma x_n} dx = \int\limits_0^\infty x_n^k e^{-\gamma x_n} S(x_n) dx_n$, где $S(x_n)$ - $(n-1)$ -мерный объём сечения области Ω_p гиперплоскостью $x_n = \text{const}$. Если V_{n-1} - объём единичного $(n-1)$ - мерного шара, то

$S(x_n) = \frac{V_{n-1}}{P} x_n^{\frac{n-1}{2}}$, где $P = (\prod_{i=1}^{n-1} a_i)^{\frac{1}{2}}$.

Поскольку всегда при $\nu > 0$, $\mu > 0$ $\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\gamma x} dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\gamma^\nu}$, то

$$NM_k = \frac{\Gamma(\nu) V_{n-1}}{\gamma^\nu P}, \; \nu = k + \frac{n+1}{2} \tag{8}$$

Обозначим также$M_{0i} = M_{0,2\vec{l_i}}$, где $\vec{l_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 стоит на i-м месте), так что

$$NM_{0i} = \int_0^\infty e^{-\gamma x_n} \int_{-(x_n/a_i)^{1/2}}^{(x_n/a_i)^{1/2}} x_i^2 S(x_n, x_i) dx_i dx_n, \tag{9}$$

где $S(x_n, x_i)$ -$(n-2)$ - мерный объём сечения области Ω_p парой гиперплоскостей $x_n = \text{const}, \quad x_i = \text{const}$

Таким образом

$$S(x_n, x_i) = \frac{V_{n-2}(x_n - a_i x_i^2)^{\frac{n-2}{2}} a_i^{\frac{1}{2}}}{P} \tag{10}$$

Из (9) и (10) находим :

$$NM_{0i} = \mu_i \int_0^\infty e^{-\gamma x_n} \int_0^{q_i} x^2 (q_i^2 - x^2)^m dx_i dx_n; \tag{11}$$

где $\quad q_i = \sqrt{\frac{x_n}{a_i}}, \quad m = \frac{n-2}{2}, \quad \mu_i = \frac{2a_i^{m+\frac{1}{2}} V_{n-2}}{P}$.

Внутренний интеграл в (11) - стандартный :

$\int_0^q x^2 (q^2 - x^2)^m dx = q^{2m+s} \int_0^1 y^2 (1 - y^2)^m dy = I_m q^{2m+3}$

($I_m >$ 0 берется заменой $y = \sin\varphi$). Отсюда

$$NM_{0i} = \frac{\mu_i I_m}{a_i^{m+3/2}} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma x_n} x_n^{m+3/2} dx_n = \frac{2V_{n-2} I_m}{P a_i \gamma^\nu}(\nu) \quad (12)$$

при $\nu = m + \frac{5}{2} = \frac{n+3}{2}$.

Вычислим теперь корреляционную функцию векторов (4). Имеем

$$\begin{aligned} M\varphi &= \varphi_n M_1 \\ M\varphi^2 &= \varphi_n^2 M_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 M_{0i} \\ M\varphi\psi &= \varphi_n \psi_n M_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \psi_i M_{0i} \end{aligned} \quad (13)$$

(т.к. $\varphi\psi = (\varphi_i x_i + ... + \varphi_n x_n)(\psi_1 x_1 + ... + \psi_n x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i x_i^2 + \sum\limits_{i \neq j} \varphi_i \psi_j x_i x_j$).

Члены второй суммы при интегрировании исчезают, ибо содержат нечетную степень x_i , $i \leq n-1$, а последнее слагаемое первой суммы выделяется в соответствии с представлением (13).

Для вычисления (5) находим:

$M(\varphi - M\varphi)^2 = M\varphi^2 - (M\varphi)^2 =$
$\varphi_n^2 M_2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 M_{0i} - \varphi_n^2 M_1^2 =$
$\varphi_n^2 (M_2 - M_1^2) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 M_{0i}$,

$M[(\varphi - M\varphi)(\psi - M\psi)] = M(\varphi\psi) - M\varphi M\psi =$
$\varphi_n \psi_n M_2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i \psi_i M_{0i} - \varphi_n \psi_n M_1^2 =$
$\varphi_n \psi_n (M_2 - M_1^2) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i \psi_i M_{0i}$

Далее для $\Gamma_l = \Gamma(l/2)$ в силу (8) с учетом того, что $M_0 = 1$ находим:

$$N = \frac{\Gamma_{n+1} V_{n-1}}{\gamma^{\frac{n+1}{2}} P} \tag{14}$$

Из (8) и (14) получаем:

$$M_k = \frac{\Gamma_{2k+n+1}}{\gamma^k \Gamma_{n+1}},\ k \geq 0 \tag{15}$$

Из (12) и (14) следует :

$$M_{0i} = \frac{2\Gamma_{n+3} V_{n-2} I_m}{\gamma^{\frac{n+1}{2}} \gamma P a_i} = \frac{2\Gamma_{n+3} V_{n-2} I_m}{\Gamma_{n+1} V_{n-1} \gamma a_i} \tag{16}$$

Из (15) получаем:

$$M' = M_2 - M_1^2 = \frac{\Gamma_{n+5}}{\gamma^2 \Gamma_{n+1}} - \frac{\Gamma_{n+3}^2}{(\gamma \Gamma_{n+1})^2} = \frac{\Gamma_{n+1}\Gamma_{n+5} - \Gamma_{n+3}^2}{\gamma^2 \Gamma_{n+1}^2} > 0 \tag{17}$$

Для $K(\varphi, \psi)$ из (5) находим:

$$K(\varphi,\psi) = \frac{M'\varphi_n\psi_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i\psi_i M_{0i}}{[(M'\varphi_n^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 M_{0i})(M'\psi_n^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 M_{0i})]^{1/2}} \tag{18}$$

С учетом неравенств (16) и (17) можно задать векторы $\bar{\varphi}' = (\frac{\varphi_1}{\sqrt{M_{01}}}, ..., \frac{\varphi_{n-1}}{\sqrt{M_{0,n-1}}}, \frac{\varphi_n}{\sqrt{M'}})$ и аналогично $\bar{\psi}'$

Тогда (18) переписывается в виде:

$$K(\varphi,\psi) = \frac{(\bar{\varphi}', \bar{\psi}')}{\sqrt{(\bar{\varphi}', \bar{\varphi}')(\bar{\psi}', \bar{\psi}')}} = \cos(\angle \bar{\varphi}' \bar{\psi}') \tag{19}$$

Поскольку $\frac{M_{0i}}{M'} = \gamma C_i$, где C_i не зависят от $\gamma = \frac{b}{a}$, то при $b \to 0$ у векторов $\bar{\varphi}'$ и $\bar{\psi}'$ исчезают первые $n-1$ компонент, а при $b \to \infty$ - последняя. Умножая векторы $\bar{\varphi}'$ и $\bar{\psi}'$ на подходящую положительную постоянную (вычисляется из (16)) получаем отсюда первое утверждение теоремы. Второе же утверждение вытекает из построенной асимптотики элементарным образом.

Следствие. При $n = 2$ для $b \to \infty$ $K(\varphi, \psi) \to \mathrm{sign}(\varphi_1\psi_1)$.

Асимптотика для произвольной области

В этом разделе мы покажем, как результат, полученный выше для параболической аппроксимации области Ω , распространяется в случае $b \to \infty$ (или, эквивалентно, $\gamma \to \infty$) и на саму эту область.

Теорема 2.

Для произвольной ограниченной области $\Omega \subset^n$, удовлетворяющей условиям, указанным в разделе 1, выполняется утверждение 1 теоремы 1.

Доказательство основывается на вычислении оценок отклонений $K(\varphi, \psi)$ из (5) для случая $b \to \infty$ от найденных в теореме 1 значений для ее параболической аппроксимации в точке $s(\vec{b})$. Выберем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим две области $\Omega_1^\varepsilon = \Omega \cap \{x : x_n \leq \varepsilon\}$ и $\Omega_2^\varepsilon = \Omega \backslash \Omega_1^\varepsilon$. Соответствующее разбиение параболической аппроксимации будем обозначать как $Omega_{1p}^\varepsilon = \Omega_p \cap \{x : x \leq \varepsilon\}$, $\Omega_{2p}^\varepsilon = \Omega_p \backslash \Omega_{1p}^\varepsilon$. Мы покажем, что выбирая по $\varepsilon \to 0$ достаточно большое значение b , можно добиться сколь угодно малого расхождения каждого из сомножителей, входящих в (1.5), вычисленных по Ω и по Ω_p , причем малость в(x_n, ε) окрестности точки $s(\vec{b})$ достигается за счет близости областей Ω_1^ε и Ω_{1p}^ε , т.е. малости их симметрической разности $\Omega_s^\varepsilon = (\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_{1p}^\varepsilon) \backslash (\Omega_1^\varepsilon \cap \Omega_{1p}^\varepsilon)$.

Введем обозначение $I(\Omega, f, \gamma) = \int\limits_{\Omega} f(x) e^{-\gamma x_n} dx$. То обстоятельство, что в знаменателе (18) все компоненты положительны, является решающим в возможности получения оценок при $\gamma \to \infty$ для подходящего выбора $\varepsilon \to 0$.

При интегрировании выражений $I(\Omega_2^{\varepsilon}, x_n^k x_i^{2l}, \gamma)$, $I(\Omega_{2p}^{\varepsilon}, x_n^k x_i^{2l}, \gamma)$, $k, l \in_+$ с учетом ограниченности области Ω и параболичности Ω_p можно, оценивая $|x_i|$ через $x_n^{\frac{1}{2}}$ получать для них верхние оценки через $I(\Omega_p, x_n^k x_i^{2l}, \gamma)$ с коэффициентом $(\gamma\varepsilon)^{\nu} e^{-\gamma\varepsilon}$, $\nu = k + l$ исчезающем при $\gamma\varepsilon \to \infty$.

Это следует из асимптотики Гамма-функции $\Gamma(a, z) \sim z^{a-1} e^{-z}$ при $z \to \infty$ (см. [3]). Что касается перекрестных членов, которые исчезали при интегрировании по параболической области, а потому не вошли в (18), то те из них, которые не обращаются в нуль, могут быть оценены по абсолютной величине линейными комбинациями ненулевых квадратичных членов, изменяющихся в составе соответствующих сумм. Интегралы по области Ω_s^{ε} от квадратичных (а также от мажорируемых ими перекрестных) членов могут быть оценены соответствующими (см. выше) линейными комбинациями от квадратичных членов с грубым коэффициентом $o(\varepsilon)$ (специфика области Ω_s^{ε}).

Суммируя все поправки, получаем окончательный коэффициент для каждой из сумм, входящих в знаменатель в (18) $(1 + o(\varepsilon) + o((\gamma\varepsilon)^{-1})$.

Несколько сложнее обстоит дело с числителем в (18), под знаком суммы в котором возможно наличие слагаемых разных знаков. Тем не менее, если эта сумма не обращается в нуль, то с учетом равенства по γ всех входящих в нее членов ее можно использовать для оценивания (в данном случае оценочные коэффициенты уже будут зависеть от вида функций φ и ψ) в соответствии с указанной выше схемой для интегралов как от квадратичных, так и перекрестных выражений с тем же коэффициентов, что и выше. Если же эта сумма обращается в нуль, то при наличии поправок, связанных с формой области, на ее месте будет стоять выражение вида $[o(\varepsilon)+o((\gamma\varepsilon)^{-1})]M_z$, где M_z - одна из сумм, входящих в знаменатель (18). При $\varepsilon \to 0$ и $(\gamma\varepsilon) \to \infty$ в этом случае получаем $K(\varphi, \psi) \to 0$ в точном соответствии с (18).

Заметим, что во всех предыдущих рассуждениях мы вели речь именно о суммах, входящих в (18), но не о выражениях, содержащих множителем M'. Что касается последних, то, во-первых, к ним могут быть применены все приведенные выше рассуждения с учетом того, что $M' > 0$ (в более простом варианте - без перекрестных членов), а во-вторых, сами эти выражения становятся не интересными (при $\gamma \to \infty$ из-за более высокой асимптотики по γ^{-1} по сравнению с рассмотренными суммами (см. (16), (17)).

В заключение доказательства заметим, что полагая, например, $\varepsilon = \gamma^{-\frac{1}{2}}$ можно получить поправочный коэффициент $(1 + o(\gamma^{-1}))$ к выражению в (18) уже для самой области Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И.* Модельное обоснование корреляционной адаптометрии с применением методов эволюционной оптимальности. // ЖВМ и МФ, 2003, т.43, № 2, с. 308-320.

2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М: Наука, 1971.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М: Наука, 1979.