УДК 517.957

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ НЕМОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ С ДИФФУЗИЕЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПЛОТНОСТИ

В.Н. Разжевайкин

Доказывается неустойчивость стационарных немонотонных ограниченных решений задачи Коши для одного уравнения реакции-диффузии на бесконечной прямой для случая плотностно зависящей диффузии. Указываются исключающие условия типа равенства, при которых возможно существование устойчивых монотонных решений.

1. В настоящей статье исследуются вопросы устойчивости стационарных ограниченных решений квазилинейного параболического уравнений

$$\partial_t u = \partial_x (D(u)\partial_x u) + F(u). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$. Функции $D(u)$ и $F(u)$ считаются достаточно гладкими (достаточно, например, непрерывной дифференцируемости по Гельдеру для всех $u \in \mathbf{R}$), причем

$$D(u) > D_0 > 0, \ \ u \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Сформулированная ниже теорема является прямым обобщением аналогичного результата, изложенного в работе [1] для случая $D(u) \equiv 1$. Для случая функции $D(u)$ общего вида в ограниченной выпуклой области произвольной размерности аналогичный результат (без дополнительных условий (6) в формулировке теоремы) был изложен в работе [2].

Вопросы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

где функция $u_0(x)$ также считается гладкой с ограниченной $C^{2+\alpha}(\mathbf{R})\,(\alpha \in (0,1))$ нормой, в классе гельдеровых функций решается в работе [3] (гл. V, теорема 8.1). Там в частности показано, что если функция $F(u)$ ограничена по Липшицу, т.е., если в условиях достаточной гладкости найдется $C > 0$ такое, что

$$|\partial_u F(u)| \le C, \tag{4}$$

то решение указанной задачи Коши может быть неограниченно продолжено по времени.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35K57, 35B35.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 03-01-00678, 04-01-00309

Заметим, что при рассмотрении вопросов устойчивости стационарных решений задачи Коши последнее условие всегда можно считать выполненным даже если оно не предполагается выполненным изначально. То же относится к условию ограниченности сверху для функции $D(u)$. Это обуславливается возможностью использования априорной информации о локализации решений в ограниченной области в предположении устойчивости.

2. Возможность использования различных топологий в определении понятия устойчивости не имеет принципиального значения для обсуждаемых ниже утверждений. Поскольку основной результат работы формулируется в терминах неустойчивости, то при заданной гладкости возмущений более предпочтительными являются более слабые. В качестве одного из возможных приемлемых вариантов мы выбрали топологию равномерной сходимости на всей рассматриваемой пространственной области.

Определение. Стационарное (т.е. не зависящее от времени, дважды непрерывно дифференцируемое по Гельдеру, ограниченное) решение $\tilde{u}(x)$ уравнения (1) называется устойчивым (в C - норме), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $u_0(x)$, удовлетворяющей неравенству $\sup |u_0(x) - \tilde{u}(x)| < \delta$ любое ограниченное решение задачи (1), (3) будет удовлетворять неравенству $|u(x,t) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $t > 0$.

3. Введем следующие обозначения:

$$Q(u) = D(u)F(u),\ J(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} Q(u)du, \tag{5}$$

$$\Sigma(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{2} [Q(u_i)]^2 + [J(u_1, u_2)]^2.$$

Предположим, что выполнено следующее условие

$$u_1 < u_2 \Rightarrow ((\Sigma(u_1, u_2) \neq 0) \vee \exists u_3 \in (u_1, u_2) :\ J(u_1, u_3) \geq 0)\,. \tag{6}$$

Это условие означает, что не существует двух различных нулей функции $Q(u)$, являющихся одновременно нулями интеграла от нее, между которыми этот интеграл остается строго отрицательным. Оно является условием общего положения, т.е. нарушается при соотношениях типа равенства, от которых можно избавиться малым изменением исходной функции $D(u)$ или $F(u)$. Заметим здесь, что предположение о невозможности реализации строгого неравенства для интегралов в (6) влечет в условиях (6) в силу непрерывности функции $Q(u)$ тождество $Q(u) \equiv 0$ для всех $u \in (u_1, u_2)$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть функции $D(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют описанным выше условиям гладкости и ограниченности. Тогда никакое стационарное ограниченное решение уравнения (1), отличное от монотонного, не может быть устойчивым.*

Более того, в условиях (6) требование немонотонности такого решения можно ослабить до требования его непостоянности.

Доказательство излагается в следующих ниже пунктах.

Замечания. 1). Более сильные утверждения о неустойчивости получатся, если в определении потребовать от $u_0(x)$ выполнения некоторых дополнительных свойств. Как это будет видно из доказательства, утверждение теоремы останется в силе, если дополнительно считать, что $u_0(x)$ является знакопостоянной, дважды непрерывно дифференцируемой по Гельдеру, а также наследует от $\tilde{u}(x)$ такие ее свойства, как периодичность (с тем же периодом), четность (с учетом возможного сдвига начала отсчета вдоль x) и асимптотичность (т.е. $\tilde{u}(x) \to a$ при $|x| \to \infty$ влечет $u_0(x) \to 0$).

2). В случае нарушения условий (6) существует семейство монотонно возрастающих (и симметричное ему семейство монотонно убывающих) ограниченных стационарных решений задачи (1), одинаковых с точностью до сдвига вдоль пространственной прямой. Свойство монотонности решений задачи Коши по начальным условиям позволяют в этом случае говорить о (нейтральной) устойчивости таких решений по крайней мере по отношению к возмущениям, не выводящим за пределы изначально задаваемой полосы, образуемой малыми сдвигами в обе стороны рассматриваемого монотонного решения.

3). Случай $\Omega = \mathbf{R}$ уникальный. Он не требует краевых условий. Наличие ограничений (даже односторонних) области Ω при выполнении условий непроницаемости на границе $\partial\Omega$: $\partial_x u|_{\partial\Omega} = 0$ позволяет говорить о выполнении утверждения теоремы для непостоянных стационарных решений независимо от выполнения условия (6). Для ограниченной области $\Omega = [a, b]$ это есть частный случай теоремы из [2]. В случае полуоси $\Omega = \pm[0, \infty)$ четное продолжение решения $\tilde{u}(x)$ дает симметричное немонотонное решение на всей оси. Остается только воспользоваться замечанием 1.

4. Сделаем замену переменных

$$\hat{w}(u) = \int_0^u D(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

В силу (2) указанная замена осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathbf{R}$ в себя с обратным $\hat{u}(w)$. При этом, поскольку $d\hat{w} = D(u)du$, то функция $w(x,t) = \hat{w}(u(x,t))$, где для $u(x,t)$ выполнено (1), удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w = G(w)\partial^2_{xx} w + b(x). \tag{8}$$

Здесь $G(w) = D(\hat{u}(w))$, $b(w) = G(w)f(w)$, $f(w) = F(\hat{u}(w))$.

Если $\tilde{u}(x)$ – стационарное решение уравнения (1), то, как нетрудно видеть функция $\tilde{w}(x) = \hat{w}(\tilde{u}(x))$ является стационарным решением уравнения (7) и наоборот $\tilde{u}(x) = \hat{u}(\tilde{w}(x))$, так что свойства однородности, ограниченности и устойчивости (в указанном выше смысле) наследуются одним из них от другого. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить справедливость ее утверждения в отношении стационарных решений уравнения (8).

5. Стационарное решение $\tilde{w}(x)$ уравнения (8) является решением уравнения

$$\partial^2_{xx}\tilde{w} + f(\tilde{w}) = 0, \tag{9}$$

решения которого могут быть описаны фазовыми траекториями уравнения

$$\frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \Pi(\tilde{w}) = C \tag{10}$$

на фазовой плоскости $(\tilde{z}, \tilde{w})$, где $\tilde{z}(x) = \partial_x\tilde{w}(x)$, $\Pi(w) = \int_0^w f(\xi)\,d\xi$, $C = \mathrm{const}$.

Выбирая различные значения для C, мы получаем различные решения уравнения (10).

Нетрудно видеть, что каждому интервалу, заключенному между двумя соседними нулями $a < a'$ функции $C - \Pi(w)$ (в случае, если внутри интервала это выражение положительно) соответствует ограниченное решение уравнения (9). В зависимости от характера обращения функции $C - \Pi(w)$ в нуль на концах этого интервала могут представиться две возможности.

1) $\Pi'(a)\Pi'(a') \neq 0$, в этом случае соответствующее решение $\tilde{w}(x)$ – периодическая функция.

2) $\Pi'(a)\Pi'(a') = 0$, $[\Pi'(a)]^2 + [\Pi'(a')]^2 \neq 0$. Пусть, например, $\Pi'(a) = 0$. Тогда $\tilde{w}(x) \to a$ при $|x| \to \infty$.

Случай 1) будем называть регулярным, случай 2) – сингулярным. Заметим, что в силу условия (6) возможность обращения $\Pi(w)$ в нуль с касанием на обоих концах исключена. Это следует из того, что согласно с (5) $J(0, u) = \Pi(\hat{w}(u))$.

Заметим также, что гладкость функции $\tilde{w}(x)$ превышает гладкость функции $f(w)$ на два.

6. Наряду с уравнением (9) стационарное решение $\tilde{w}(x)$ уравнения (8) удовлетворяет также уравнению

$$G(\tilde{w})\partial^2_{xx}\tilde{w} + b(\tilde{w}) = 0, \tag{11}$$

дифференцирование которого по x дает

$$L\tilde{z} = 0, \tag{12}$$

где $\tilde{z}(x) = \partial_x\tilde{w}(x)$,

$$L = k(x)\partial^2_{xx} + q(x), \tag{13}$$

$$k(x) = G(\tilde{w}(x)),\ q(x) = G'_w(\tilde{w}(x))\partial^2_{xx}\tilde{w}(x) + b'_w(\tilde{w}(x)).$$

Во избежание дублирования одинаковых рассуждений мы по возможности будем рассматривать одновременно оба случая – регулярный и сингулярный.

В регулярном случае мы фиксируем период l функции $\tilde{w}(x)$ и выберем в качестве базового функционального пространства $\hat{L}_2[0, l]$, наделенное скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \int_0^l \frac{u(x)v(x)}{k(x)}\,dx. \tag{14}$$

Будем считать, что оператор L является замыканием дифференциального оператора (13), определенного изначально на множестве достаточно гладких (например, дважды непрерывно дифференцируемых) функций $\psi(x)$, удовлетворяющих краевым условиям периодичности с периодом l:

$$\psi(0) = \psi(l),\ \partial_x\psi(0) = \partial_x\psi(l). \tag{15}$$

Заметим, что так определенный оператор L является самосопряженным с областью определения $\hat{H}^2(0,l)$, где $\hat{H}^p(0,l)$ – это подпространство пространства $\hat{L}^2(0,l)$ функций ψ с ограниченной нормой $\|\psi\|_p = \sum_{k=0}^{p}\left\|\frac{\partial^k\psi}{\partial x^k}\right\|$, при $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle}$, для которых выполнены краевые условия периодичности:

$$(\partial_x)^j\psi(0) = (\partial_x)^j\psi(l),\ j = 0,\dots,p-1. \tag{16}$$

Заметим также, что скалярное произведение (14) переходит в обычное (т.е. при $k \equiv 1$) при замене переменных

$$\eta(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)}. \tag{17}$$

Сингулярный случай отличается от регулярного заменой $\Omega = [0,l]$ на $\Omega = \mathbf{R}$ и отказом от краевых условий (15) и (16).

7. Покажем, что $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L. Ввиду (12) для этого достаточно показать, что в сингулярном случае $\tilde{z}(x) \in \hat{H}^2(\mathbf{R})$.

Проверим, что $\tilde{z}(x) \in \hat{L}_2(\mathbf{R})$. Действительно, функция $\tilde{w}(x)$ как решение уравнения (9) ограничена и симметрична относительно некоторой точки x_0 (т.е. четна при не ограничивающем общности предположении $x_0 = 0$), а ее производная меняет знак только в этой точке. Поэтому, если $\tilde{w}(x) \to a$, при $|x| \to \infty$. то $\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{z}(x)|\,dx = 2|\int_{x_0}^{+\infty}\tilde{z}(x)\,dx| = 2|a - \tilde{w}(x_0)|$, так что $\tilde{z}(x) \in L_1(\mathbf{R})$, а, стало быть, $\tilde{z}(x) \in L_2(\mathbf{R})$.

Дифференцируя (9) по x, получаем

$$\partial^2_{xx}\tilde{z}(x) + f'_w(\tilde{w}(x))\tilde{z}(x) = 0,$$

откуда с учетом (2) и (4) получаем $\partial^2_{xx}\tilde{z} \in \hat{L}_2(\mathbf{R})$, что в совокупности с уже доказанным дает нам требуемое включение.

8. Рассмотрим теперь на Ω эрмитову форму

$$H[u,v] = \int_\Omega (\partial_x u\partial_x v - \hat{q}(x)uv)\,dx, \tag{18}$$

с областью определения $\hat{H}^1(\Omega)$, которая является замкнутым расширением формы $\langle -Lu, v\rangle$ с областью определения $\hat{H}^2(\Omega)$. (см. [4] гл. 8), $\hat{q}(x) = \frac{q(x)}{k(x)}$.

В сингулярном случае имеет место следующая цепочка вытекающих последовательно друг из друга асимптотик (здесь вторая импликация следует из (9)):

$$(|x| \to \infty) \Rightarrow (\tilde{w}(x) \to a) \Rightarrow (\partial^2_{xx}\tilde{w}(x) \to -f(a)) \Rightarrow (q \to q_\infty), \tag{19}$$

где
$$q_\infty = -G'_w(a)f(a) + b'_w(a) = G(a)f'_w(a). \tag{20}$$

Из (19) следует, что форма (18) ограничена снизу (в сингулярном случае; в регулярном это проверяется тривиальным образом), так что спектр оператора L ограничен сверху.

При некотором подходящем ρ форма $H_\rho[u,v] = H[u,v] + \rho\langle u,v\rangle$ является положительно определенной. Пусть $\beta_\rho(x) = -\hat{q}(x) + \rho$ – соответствующей ей потенциал. Покажем, что $\tilde{z}(x)$ не может доставлять минимум функционалу $H_\rho[u] = \frac{H_\rho[u,u]}{\langle u,u\rangle}$ в классе функций $u \in \hat{H}^1(\Omega)$. Без ограничения общности будем считать, что $\|\tilde{z}\| = 1$. Имеем $H_\rho[\tilde{z}] = \int_\Omega \tilde{z}_x^2(x)\,dx + \int_\Omega \beta_\rho(x)\tilde{z}^2(x).\,dx$.

Функция $|\tilde{z}(x)|$ также нормирована: $\||\tilde{z}(x)|\| = 1$ и принадлежит $\hat{H}^1(\Omega)$, причем $H_\rho[|\tilde{z}|] = H_\rho[\tilde{z}]$. Рассмотрим ее в окрестности точки $x_0 : \tilde{z}(x_0) = 0$ (в регулярном случае мы можем считать $x_0 \neq 0, l$, поскольку мы можем произвольным образом выбирать систему отсчета по x).

Пусть $x_1 < x_0 < x_2$, $|x_0 - x_{1,2}| < \varepsilon$, $|\tilde{z}(x_1)| = |\tilde{z}(x_2)| = \delta > 0$, $|\tilde{z}(x)| < \delta$ внутри (x_1, x_2).

В силу неравенства Коши - Буняковского
$$\delta^2 = \tilde{z}^2(x_2) = \left(\int_{x_0}^{x_2} \tilde{z}_x(x)\,dx\right)^2 \le (x_2 - x_0)\int_{x_0}^{x_2} \tilde{z}_x^2(x)\,dx.$$

Пусть $M = \sup_x \beta_\rho(x)$. Тогда
$$\delta^2 \int_{x_0}^{x_2} \beta_\rho(x)\,dx \le M(x_2 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_2} \tilde{z}_x^2(x)\,dx. \tag{21}$$

Аналогичное неравенство получаем для интегралов в пределах от x_1 до x_0:
$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_0} \beta_\rho(x)\,dx \le M(x_1 - x_0)^2 \int_{x_1}^{x_0} \tilde{z}_x^2(x)\,dx. \tag{22}$$

Складывая (21) и (22), получаем
$$\delta^2 \int_{x_1}^{x_2} \beta_\rho(x)\,dx \le M\varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \tilde{z}_x^2(x)\,dx. \tag{23}$$

Выбирая ε таким, чтобы $M\varepsilon^2 < \frac{1}{2}$, определим $z_1(x)$ так, что $z_1(x) = \delta$ при $x_1 < x < x_2$ и $z_1 = |\tilde{z}(x)|$ при остальных x.

Поскольку $\|z_1\| > \|\tilde{z}\|$, то с учетом (23) получаем $H_\rho[z_1] < H_\rho[\tilde{z}]$, т.е. $\tilde{z}(x)$ не доставляет минимума функционалу $H_\rho[u]$ в классе функций из $\hat{H}^1(\Omega)$.

То же можно сказать и о минимуме функционала $H_0[u] = H_\rho[u] - \rho$, причем поскольку $H_0[\tilde{z}] = 0$ в силу того, что $\tilde{z} \in \ker L$ (см. п. 7), то минимум последнего функционала отрицателен. Кроме того, поскольку $\hat{H}^2(\Omega)$ плотно в $\hat{H}^1(\Omega)$ и функционал $H_0[u]$ на $\hat{H}^2(\Omega)$ совпадает с функционалом $\frac{\langle -Lu,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$, то найдется $z_2 \in \hat{H}^2(\Omega)$ такое, что
$$\langle Lz_2, z_2\rangle > 0. \tag{24}$$

Заметим, что единственное свойство, использованное при доказательстве неэкстремальности функции $\tilde{z}(x)$ для функционала H_0 заключалось в ее обращении в нуль в некоторой точке x_0 (это следует, например, из того, что она является решением уравнения (10) в условиях 1) или 2) п. 5). Те же рассуждения позволяют установить, что размерность пространства функций из $\hat{H}^1(\Omega)$, доставляющих минимум функционалу H_0, не может превышать единицу, ибо в противном случае всегда найдется подходящая линейная комбинация, обращающаяся в нуль.

9. Поскольку оператор L самосопряжен в $\hat{L}_2(\Omega)$, то спектр сосредоточен на вещественной оси и, как уже отмечалось в п. 8, ограничен сверху. В регулярном случае этот спектр является дискретным, в сингулярном дискретна его часть, принадлежащая положительной полуоси.

Действительно, поскольку $q_\infty \le 0$, (это следует из (20) с учетом того, что $f'_w(a) = \Pi''(a) \le 0$, где последнее неравенство является следствием положительности функции $C - \Pi(w)$, обсуждавшейся в п. 5), то применение теоремы 8.10 [4] к разбиению оператора $-L = A - B$ с $A = -k(x)\partial^2_{xx} + q_+(x)$, $B = q_-(x)$, где $q_\pm(x) \ge 0$ таковы, что $-q(x) = q_+(x) - q_-(x)$, $q_-(x) \to 0$, при $|x| \to \infty$ (возможность такого разбиения обуславливается доказанной выше неположительностью q_∞), позволяет получить указанное утверждение (см. по этому поводу также доказательство теоремы 8.13 там же).

10. Пусть λ_0 – верхняя граница спектра оператора L. Спектральное разложение оператора L имеет вид $L = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda\, dE_\lambda$, где dE_λ – разложение единицы для оператора L (см. [5], XII.2). Для любой функции $z \in \hat{H}^2(\Omega)$ имеем

$$\langle Lz, z\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda\, d\langle E_\lambda z, z\rangle \le \lambda_0 \langle z, z\rangle. \tag{25}$$

При $\lambda_0 \le 0$ мы получили бы $\langle Lz, z\rangle \le 0$ в противоречии с (24). Поэтому с учетом п. 9 существует собственное значение $\lambda_0 > 0$, являющееся верхней границей спектра. Пусть $\phi_0(x)$ – соответствующая ему собственная функция оператора L. Она, как это следует из п. 8, доставляет максимум функционалу $H_0[z]$, равный λ_0. Если бы существовала другая, неколлинеарная ϕ_0 функция ψ_0, являющаяся собственной для L с тем же собственным значением, то этим же свойством обладала бы любая их линейная комбинация, что противоречит отмеченной в конце п. 8 не более чем одномерности пространства функций, доставляющих минимум функционалу H_0. Поэтому собственное значение λ_0 оператора L является простым. Из этой простоты в частности следует знакопостоянство функции ϕ_0 и ее четность при четной $\tilde{u}(x)$. Пусть λ_1 – следующее за λ_0 по величине собственное значение оператора L. Поскольку $\tilde{z}(x) \in \ker L$, то

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_0. \tag{26}$$

Для функций $z_1 \in \hat{H}^2(\Omega)$ таких, что $\langle z_1, \phi_0 \rangle = 0$ имеем

$$\langle Lz_1, z_1\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda\, d\langle E_\lambda z_1, z_1\rangle = \lambda_0\langle (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})z_1, z_1\rangle + \int_{-\infty}^{\lambda_1} \lambda\, d\langle E_\lambda z_1, z_1\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\lambda_1} \lambda\, d\langle E_\lambda z_1, z_1\rangle \le \lambda_1 (\int_{-\infty}^{\lambda_1} d\langle E_\lambda z_1, z_1\rangle + \langle (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})z_1, z_1\rangle)$$
$$= \lambda_1 \int_{-\infty}^{\lambda_0} d\langle E_\lambda z_1, z_1\rangle = \lambda_1 \langle z_1, z_1\rangle, \quad (27)$$

ибо $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0}$ есть оператор проектирования на ϕ_0, обращающийся в нуль на определенных выше z_1.

11. В этом пункте будет проведено формальное доказательство неустойчивости на основе неравенств (25) – (27). Вопросы, связанные с обоснованием приводимых здесь формальных выкладок, будут обсуждаться в следующих пунктах.

Пусть $w(x,t) = \tilde{w}(x) + v(x,t)$. Вычитая из (8) соотношение (11) получим

$$\partial_t v = Lv + R(v)v, \quad (28)$$

где

$$R(v) = J_G(v)\partial^2_{xx}\tilde{w} + J_b(v) + (G'(\tilde{w}) + J_G(v))\partial^2_{xx} v,$$

а оператор $J_f : C(\Omega) \to C(\Omega)$ с вещественной функцией f определяется формулой

$$[J_f(v)](x) = \int_0^1 [f'(\tilde{w}(x) + \xi v(x)) - f'(\tilde{w}(x))]\, d\xi.$$

Если функция f является непрерывно дифференцируемой, то отображение $J_f(v)$, как нетрудно видеть, непрерывно и обращается в нуль при $v = 0$.

Положим теперь

$$\alpha(t) = \langle v(x,t), \phi_0(x)\rangle,\ \bar{v}(x,t) = v(x,t) - \alpha(t)\phi_0(x). \quad (29)$$

Здесь мы для определенности считаем $\phi_0(x)$ нормированной в $\hat{L}_2(\Omega)$.

Поскольку $\langle \bar{v}, \phi_0\rangle = 0$, то выполнены неравенства (25) и (27) с $z_1 = \bar{v}(x,t)$, $z = v(x,t)$, при любом $t \ge 0$. Подставляя (29) в (28) получим

$$\partial_t \bar{v} + \partial_t \alpha\phi_0 = L(\bar{v} + \alpha\phi_0) + [J_G(v)\partial^2_{xx}\tilde{w} + J_b(v) + (G'(\tilde{w}) + J_G(v))\partial^2_{xx} v]v. \quad (30)$$

Умножая (30) скалярно на $\alpha\phi_0$ с учетом того, что $L\phi_0 = \lambda_0\phi_0$, получим

$$\frac{1}{2}\partial_t(\alpha^2) = \lambda\alpha^2 + Q_1, \quad (31)$$

где $Q_1 = \langle \alpha\phi_0, R(v)v\rangle$.

Здесь мы воспользовались также нормированностью ϕ_0, самосопряженностью L в $\hat{L}_2(\Omega)$ и тем, что $\langle \alpha\phi_0, \partial_t\bar{v}\rangle = \langle \alpha\phi_0, \partial_t\bar{v}\rangle + \partial_t\alpha\langle \phi_0, \bar{v}\rangle = \partial_t\langle \alpha\phi_0, \bar{v}\rangle = 0$.

Аналогично, умножая (30) скалярно на $\bar{v}$, получим

$$\frac{1}{2}\partial_t\langle\bar{v},\bar{v}\rangle = \langle L\bar{v},\bar{v}\rangle + Q_2, \tag{32}$$

где $Q_2 = \langle\bar{v}, R(v)v\rangle$.

Имеем $Q_1 - Q_2 = \langle\alpha\phi_0, R(v)(\alpha\phi_0+\bar{v})\rangle - \langle v, R(v)(\alpha\phi_0+\bar{v})\rangle = \alpha^2\langle\phi_0, R(v)\phi_0\rangle - \langle\bar{v}, R(v)\bar{v}\rangle$.

Предположим, что

$$|R(v)| < \delta. \tag{33}$$

Поскольку тогда $|\langle\phi_0, R(v)\phi_0\rangle| < \delta$, то с учетом (27), вычитая из (31) соотношение (32), получим

$$\frac{1}{2}\partial_t(\alpha^2 - \langle\bar{v},\bar{v}\rangle) \geq (\lambda_0-\delta)\alpha^2 - (\lambda_1+\delta)\langle\bar{v},\bar{v}\rangle \geq A(\alpha^2 - \langle\bar{v},\bar{v}\rangle), \tag{34}$$

где $A \in [\lambda_1+\delta, \lambda_0-\delta]$. С учетом (26) имеем $A > 0$.

Полагая $v(x,0) = \varepsilon_0\phi_0(x)$ из (34) получаем

$$\alpha^2(t) \geq \varepsilon_0^2\exp(2At). \tag{35}$$

При условии (33) предположение об устойчивости

$$|v(x,t)| < \varepsilon \tag{36}$$

противоречит неравенству (35), поскольку, если $\phi_0(x) \in L_1(\Omega)$, то (см.(14))

$$|\alpha(t)| = |\langle\phi_0, v\rangle| \leq \sup_x |v(x,t)| \int_\Omega \frac{|\phi_0(x)|}{k(x)}\,dx \leq C\varepsilon.$$

Указанная принадлежность будет доказана в следующем пункте.

Что касается условия (33), то оно следует из (36) при подходящем выборе ε. Действительно, в силу ограниченности $\tilde{w}(x)$ и равенства (9) получаем ограниченность $\partial^2_{xx}\tilde{w}(x)$. С учетом гладкости $D(u)$ и соотношений (2), (7) получаем ограниченность $G'(\tilde{w})$. С учетом непрерывности в нуле операторов J_G и J_b для доказательства (33) достаточно установить оценку

$$\sup_x |\partial^2_{xx}v(x,t)| < \delta \tag{37}$$

при условии (36) для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это будет проделано в п. 13.

Наконец, в этом пункте мы использовали принадлежность $v(x,t) \in \hat{H}^2(\Omega)$ (в том месте, которое касалось выполнения неравенства (27)). Некоторые усилия здесь могут потребоваться только в сингулярном случае. Им посвящен п. 14.

12. Покажем, что $\phi_0(x) \in L_1(\Omega)$.

Доказательство требуется, очевидно, только для сингулярного случая при $\Omega = \mathbf{R}$. Для этого достаточно показать, что $|\phi_0(x)|$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$. Для определенности будем считать, что $x \to +\infty$ и что в этом случае $\tilde{w}(x) \to a - 0$ (т.е. приближается к a снизу). Остальные случаи получаются аналогично.

Поскольку $q_\infty \leq 0$ (см. начало п. 9), то мы можем переписать равенство $L\phi_0 = \lambda_0\phi_0$ в виде (см. (13)):

$$\partial^2_{xx}\phi_0(x) - [\kappa^2 + s(x)]\phi_0(x) = 0,$$

где $\kappa^2 = \frac{(\lambda_0 - q_\infty)}{k(\infty)} > 0$, $s(x) = \frac{-q(x)+q_\infty+(\lambda_0-q_\infty)(1-\frac{k(x)}{k(\infty)})}{k(x)}$, так что $s(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Отсюда получаем (см., например, [6] гл. X, 11), что при $x \to \infty$ выполнено $x^{-1}\ln|\phi_0(x)| \to -\kappa$, т.е. $\phi(x)$ убывает экспоненциально ($\sim \exp(-\kappa x)$) на бесконечности (следует учесть также, что $\phi_0(x) \in L_2(\mathbf{R})$).

13. Покажем, что условие (36) обеспечивает выполнение неравенства (37) с функцией $\delta = \delta(\varepsilon)$, непрерывной при $\varepsilon = 0$; $\delta(0) = 0$.

Согласно [7], теор. 2.2, мы можем задать оценку нормы Гельдера для решения уравнения (28), записанного в виде, при котором член из $R(v)v$, содержащий $\partial^2_{xx}v$, относится к первому слагаемому, как внутри некоторого ограниченного цилиндра $Q_1 \in \Omega \times \mathbf{R}_+$, так и вплоть до его границы, выражающуюся исключительно через его C-норму внутри некоторой параболической (т.е. по x) окрестности $Q_0 \supset Q_1$, его гельдерову норму на основании цилиндра, показатель этой нормы, размерность задачи, постоянные параболичности уравнения (28), а также свойства гладкости его коэффициентов. При этом мы считаем, что $v(x,0) = \varepsilon_0\phi_0(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, ибо в силу $\phi_0 \in \ker(L - \lambda_0)$ и (13) гладкость ϕ_0 на единицу превышает гладкость коэффициентов уравнения (1). Выбор ε_0 можно ограничить при этом сверху некоторой постоянной, задав таким образом априорную оценку гельдеровой нормы решения при условии (36).

После получения такой априорной оценки мы можем считать, что $v(x,t)$ является решением линейного параболического уравнения с коэффициентами, получаемыми из исходных путем подстановки этого решения вместо нелинейных вхождений неизвестной. При этом гельдеровы оценки получаемых коэффициентов будут очевидным образом ограничены. Далее к этому линейному параболическому уравнению можно применять оценки шаудеровского типа (см. теоремы 5 и 6 из Ш. 2 [8]), позволяющие получать априорную информацию об ограниченности гельдеровой нормы функции $\partial^2_{xx}v(x,t)$ внутри некоторого открытого цилиндра $Q_2 \subset Q_1$, причем эта норма может оцениваться сверху C-нормой функции $v(x,t)$ в Q_1 (при $t \geq t_0 > 0$) или C-нормой функции $v(x,0)$ (вблизи основания цилиндра Q_1, т.е. при $t \leq t_0$).

Если считать соотношения между Q_0, Q_1, Q_2 фиксированными (например, если считать, что каждый из этих цилиндров является ρ_0-окрестностью по x следующего за ним по номеру ($\rho_0 > 0$), то оценочные коэффициенты в обоих (квазилинейном и линейном) случаях (в линейном имеется в виду коэффициенты упомянутых линейных зависимостей) можно считать для внутренних (при $t \geq t_0 > 0$) оценок не зависящими от (x, t), а для оценок вплоть до границы (при $t \leq t_0$) проводить рассмотрения для ограниченных цилиндров $Q_{0,1,2} \cap (t \leq t_0)$. Мы можем выбирать такие цилиндры стандартным образом независимо от x в силу инвариантности области Ω и перечисленных выше параметров, определяющих оценочные постоянные, относительно сдвигов вдоль x. Сшивание (по t) внутренних и пограничных оценок позволяет установить гельдеровы оценки сначала для v (в квазилинейном случае), а затем и $\partial^2_{xx} v$ (в линейном) суммой оценочных функций, построенных для внутренних и пограничных оценок, уже во всем множестве $\Omega \times \mathbf{R}_+$. Задаваясь изначально величиной δ мы подбираем затем ε и ε_0 таким образом, чтобы было выполнено (37). Возможность такого выбора обуславливается получаемой оценкой правой части в (37) величиной $C(\sup_{x,t} |v(x,t)| + \sup_x |\partial^2_{xx} v(x, 0)|_\alpha)$ и обеспечивает справедливость сформулированного в начале настоящего пункта утверждения.

14. В этом пункте мы покажем, что для решения уравнения (28) имеет место включение

$$v(x, t) \in \hat{H}^2(\mathbf{R}) \tag{38}$$

при $t > 0$, если оно справедливо при $t = 0$. Для нужд п. 11 этого достаточно, т.к. там выбиралось $v(x, 0) = \varepsilon_0 \phi_0(x)$, удовлетворяющее (38).

Поскольку $w(x, t) = \tilde{w}(x) + v(x, t)$, а для $\tilde{w}(x)$ включение (38) имеет место (см. п. 7), то достаточно доказать (38) для $w(x, t)$ при $t > 0$, если это верно для $t = 0$. Но w является решением уравнения (8), которое можно рассматривать как квазилинейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве $\hat{L}_2(\mathbf{R})$. Если мы покажем, что к этому уравнению применима теорема 6.3 [9], в которой в качестве области определения генераторов выбираем $X_1 = \hat{H}^2(\mathbf{R})$, то из нее интересующее нас утверждение будет следовать в силу единственности обобщенного решения задачи Коши для линейного параболического уравнения (теорема Ш.5.2 [3]), являющегося одновременно классическим решением исходной задачи, т.е. совпадающим с $w(x, t)$.

Проверим выполнимость условий теоремы 6.3 [9]. В случае $G = \mathrm{const} > 0$ неограниченный член в правой части уравнения (8) обращается в лапласиан, резольвентные свойства которого хорошо известны (см., например, гл. 8 [4]) и которые для всего пространства могут быть элементарно получены применением преобразований Фурье.

Резольвентные свойства для самосопряженного оператора вида $\partial_\xi(\kappa(\xi)\partial_\xi \cdot)$ с гельдеровой функцией $\kappa(\xi) = \frac{1}{k(x)}$, $\xi = \eta(x)$ (см. (17)), удовлетворяющей свойствам эллиптичности, наследуются от соответствующих свойств оператора Лапласа (с подходящими коэффициентами) в силу возможности представления резольвенты как преобразования Лапласа (в смысле сильного интеграла) от порождаемой оператором полугруппы, задаваемой, как известно, операторами свертки с фундаментальным решением, с учетом возможности оценивания этих фундаментальных решений соответствующими фундаментальными решениями для оператора Лапласа [10]. Заметим, что в данном случае оценочные коэффициенты зависят исключительно от оценочных и гельдеровой постоянных для κ.

В общем случае для $G(w)$ из (8) мы в качестве рассматриваемого в теореме промежуточного пространства будем выбирать $V = \hat{H}^1(\mathbf{R})$ и, задаваясь произвольным элементом $\tilde{y} \in V$ и некоторой ограниченной его V-окрестностью $V_{\tilde{y}}$, делать замену переменной $\xi = \eta(x)$, в соответствии с (17), но в которой для вычисления функции $k(x)$ вместо $\tilde{w}(x)$ будет выбираться $y = y(x) \in V_{\tilde{y}}$. Для получаемой при этом из (17) переменной ξ неограниченный оператор в правой части в (8) приобретает вид, рассмотренный выше с $\kappa = \kappa_y$, причем гельдеров и оценочные коэффициенты функции $\kappa_y(\xi)$ не зависят (по теореме вложения) от конкретного выбора элемента $y \in V_{\tilde{y}}$. (Ограниченность области по ξ в теореме вложения не принципиальна, поскольку мы можем ее инвариантно смещать вдоль ξ). Поскольку резольвенты, построенные относительно ξ и x подобны, то свойства их норм и спектров совпадают. Поэтому, возвращаясь к x, получаем выполнение условий, накладываемых в теореме 6.3 [9] на резольвенту неограниченного оператора в каждой точке $y \in V$. Остальные условия теоремы проверяются элементарно.

На этом завершается доказательство сформулированной в п. 3 теоремы.

Литература

1. Разжевайкин В.Н., *Неустойчивость стационарных неоднородных решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения и ее экологические применения*, Ж. вычисл. матем. и математич. физ., **20** (1980), No 5, с. 1328–1333.
2. Разжевайкин В.Н., *Неустойчивость непостоянных стационарных решений уравнений реакции - плотностно зависящей диффузии в выпуклой области*, Дифференциальные уравнения, **32** (1996), No 2, с. 280–282.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.; Наука, (1967), 736 с.
4. Мизохата С., *Теория уравнений с частными производными*, Пер. с яп., М., Мир, (1977), 504 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т., *Линейные операторы. т. 1I. Спектральная теория*, Пер. с англ. М., Мир, (1966), 1064 с.
6.. Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Пер. с англ., М., Мир, (1970), 720 с.
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности*, Успехи Матем. наук, **41** (1986), вып. 5 (251), с. 59–84.
8. Фридман А., *Уравнения с частными производными параболического типа*, М., Мир, (1968), 428 с.
9. Amann H., *Quasilinear evolution equations and parabolic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), No 1, p. 191–227.
10. Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д., *Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения*, Успехи Матем. наук, **39** (1984), вып. 3 (237), с. 107–156.

Москва, 119991, ГСП-1, Вавилова, 40, ВЦ РАН
E-mail address: razz@ccas.ru