С. В. Курочкин, Топологические методы локализации собственных значений краевых задач, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1995, том 35, номер 8, 1165–1174

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 35, 1995 № 8

УДК 519.624

 С. В. КУРОЧКИН

(*Москва*)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ [1)]

Предложены методы определения количества собственных значений несамосопряженной и двухпараметрической самосопряженной краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, расположенных в заданной области. Методы основаны на вычислении топологических инвариантов отображений многообразий Грассмана, порождаемых исходной задачей.

Введение

Предметом изучения в данной статье является задача численного отыскания собственных значений (с. з.) обыкновенного дифференциального оператора $L(\zeta)$ с произвольным аналитическим вхождением спектрального параметра ζ, т. е. таких ζ, что уравнение

(1) $$L(\zeta)\, u = 0$$

имеет ненулевое решение $u(x)$, удовлетворяющее заданным краевым условиям. Хорошо известно, что это нелинейная по ζ задача (в том числе и в случае, когда $L(\zeta)\, u = Lu - \zeta u$ и термин «с. з.» понимается в классическом смысле) и она может быть сведена к решению нелинейного уравнения

(2) $$F(\zeta) = 0, \quad F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Существуют различные способы такого сведения. Здесь мы ограничимся рамками подхода, основанного на переносе граничных условий посредством вспомогательных дифференциальных уравнений (без дискретизации исходной задачи).

В случае, когда известно хорошее начальное приближение к искомому с. з., хорошо работают методы типа Ньютона (см., например, [1]; некоторые варианты требуют также приближенного знания собственной функции) и задачу в такой постановке, по-видимому, можно считать достаточно исследованной. В случае же, когда начальное приближение неизвестно и когда исходная задача не может быть получена движением по параметру от некоторой решенной ранее задачи, положение иное. Имеющийся опыт решения задач такого типа, в том числе задач с особенностями и содержащих малые параметры (см., в частности, [2],

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01475-а), а также Международного научного фонда совместно с Правительством РФ (грант J8K100).

[3]), показывает, что получающееся в уравнении (2) отображение F, как правило, имеет очень большую константу Липшица, что крайне затрудняет глобальный поиск корней. Методы, основанные на принципе аргумента (см., например, [4]), в ряде случаев позволяют решить вопрос; однако они имеют ряд существенных ограничений (см. об этом ниже). В § 1 данной работы предложен метод решения задачи глобального поиска с. з., основанный на использовании некоторой дополнительной (по сравнению с уравнением (2)) информации, возникающей в ходе решения задачи. Дополнительных вычислений при этом не требуется. В § 2 рассмотрена самосопряженная задача на с. з. с двумя спектральными параметрами и предложен метод глобального поиска с. з., основанный на сходной идее. Основные результаты, относящиеся к однопараметрическому случаю, анонсированы в [5].

§ 1. Несамосопряженная однопараметрическая задача

Рассмотрим краевую задачу

(1.1) $\quad y'(x) = A(x, \zeta)\, y(x), \quad a \le x \le b,$

(1.2а) $\quad \varphi_a y(a) = 0,$

(1.2б) $\quad \varphi_b y(b) = 0.$

Здесь комплексная $(n \times n)$-матрица A непрерывно зависит от x и комплексного параметра ζ, причем зависимость от ζ предполагается аналитической; φ_a и φ_b — комплексные $[(n-k) \times n]$- и $(k \times n)$-матрицы полного ранга, $0 < k < n$. Поставим задачу нахождения суммарного числа N_U с. з. задачи (1.1), (1.2) внутри заданной области U в плоскости спектрального параметра ζ. Пусть Γ — простой замкнутый контур в $\mathbb{C}$, ограничивающий область U, $\overline{U} = U \cap \Gamma$; пусть для $x \in [a,b]$ матрица $A(x, \zeta)$ голоморфна по ζ в некоторой окрестности $\overline{U}$. Для данного $x \in [a,b]$ и $\zeta \in \overline{U}$ значения решений (1.1), удовлетворяющих условию (1.2а), образуют k-мерное подпространство в $\mathbb{C}^n$, которое можно рассматривать как точку грассманова многообразия $\mathrm{CG}(n, k)$ (см. [6]). Таким образом определено отображение $g : [a,b] \times \overline{U} \mapsto \mathrm{CG}(n, k)$. Значения отображения g можно устойчиво вычислять, используя методы дифференциальной прогонки (при том, что отдельные решения (1.1) могут сильно расти и «слипаться» друг с другом). Из теорем о зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра следует, что при фиксированном $x \in [a,b]$ отображение $g(x, \cdot) : \overline{U} \mapsto \mathrm{CG}(n, k)$ голоморфно.

Рассмотрим сначала случай $n = 2$, $k = 1$. Это сделано из-за особенной наглядности получаемых конструкций, а также ввиду его практической важности. Затем будет сказано, какие изменения и дополнения необходимо сделать в общем случае. Будем предполагать, что контур Γ гладкий и что будут выполнены все возникающие по ходу условия трансверсальности, или общего положения (см., например, [7]). Так, два компактных подмногообразия размерностей k_1, k_2 в n-мерном многообразии, находящиеся в общем положении, при $k_1 + k_2 < n$ не пересекаются, а при $k_1 + k_2 = n$ пересекаются в конечном числе точек. Имея в виду численное решение, эти условия не следует считать ограничениями общности, так как задача приводится в общее положение сколь угодно малым изменением входных данных.

При $n = 2$, $k = 1$ многообразие $CG(n, k)$ диффеоморфно S^2, причем будем считать S^2 ориентированным ориентацией, порождаемой структурой комплексного аналитического многообразия $CG(2,1)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ прямой круговой конус K, имеющий вершину p, боковую поверхность Q и в основании диск D. Окружность $D \cap Q$ обозначим через S. Пусть $\chi: D \mapsto \overline{U}$ — какое-либо биголоморфное отображение (для численного решения не придется строить χ, будет использоваться только самый факт его существования). Построим отображение h: $K \mapsto S^2$ следующим образом. Если $q = p$, то $h(q) = g(a, \zeta)$, где $\zeta \in \overline{U}$ произвольно (точка $h(p)$ соответствует краевому условию φ_a). Если $q \in D$, то положим $h(q) = g(b, \chi(q))$. Наконец, если $q = (1 - \theta)p + \theta r$, где $r \in D$, то $h(q) = g((1 - \theta)a + \theta b, \chi(r))$. Обозначим через w точку S^2, соответствующую краевому условию φ_b.

Предложение 1. *Степень отображения $h|_Q: Q \to S^2$ над w равна степени отображения $h|_D: D \to S^2$ над w.*

Доказательство. Очевидно, $h|_Q$ и $h|_D$ могут быть соединены гомотопией, связанной на S. Пользуясь предположениями трансверсальности, можно устроить гомотопию таким образом, чтобы сначала отображение изменялось в малой окрестности точки p, образ которой не содержит w, а оставшаяся часть гомотопии была гладкой. Затем применяется стандартное доказательство инвариантности степени при гомотопиях (см. [6]).

Предложение 2. *Степень отображения $h|_D: D \to S^2$ над w равна N_U.*

Доказательство. Число $\zeta \in U$ является с. з. тогда и только тогда, когда $h|_D(\chi^{-1}(\zeta)) = w$. Далее, отображение $h|_D$ голоморфно (см. выше) и поэтому сохраняет ориентацию в регулярных точках. Следовательно, при подсчете степени все с. з. засчитываются со знаком плюс.

Предложения 1 и 2 показывают, что искомое число N_U может быть определено по данным прогонки краевого условия (1.2a) для значений ζ, принадлежащих только границе области U.

Численный метод. Разбиваем контур Γ точками z_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, на мелкие куски (выбор z_i можно делать не заранее, а адаптивно). Полагаем последовательно $\zeta = z_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Используя какой-либо вариант метода дифференциальной прогонки, перегоняем левое краевое условие в точку b, иначе говоря, строим отображение

$$f_i: [0,1] \mapsto S^2, \quad f_i(\theta) = h[(1 - \theta)p + \theta\chi^{-1}(z_i)].$$

По ходу дела вычисляем $\rho(f_i(\theta), w)$ в какой-либо естественной метрике ρ на S^2 и находим величину $d_i = \inf_{\theta \in [0,1]} \rho(f_i(\theta), w)$. Те z_i, для которых d_i не является малым, оставляем без внимания. При уменьшении d_i следим за несколькими (достаточно двух) значениями θ вблизи минимума и определяем, в каком направлении кривая на сфере, являющаяся образом f_i, «заметает» точку w.

Соответственно, запоминаем число +1 или −1. При обходе всего контура сумма полученных таким образом чисел даст искомое число с. з.

Перейдем к случаю произвольных n и k, $0 < k < n$. Пусть краевому условию (1.2б) соответствует точка $w \in CG(n, n-k)$. Конус K, диффеоморфизм χ и отображение $h: K \to CG(n, k)$ строятся аналогично. Рассмотрим «шлейф» (см. [8]) точки w:

$$F_w = \{u \in CG(n, k) : \dim(u \cap w) > 0\}.$$

Кроме того, пусть $F_w' = \{u \in F_w : \dim(u \cap w) > 1\}$; F_w — подмногообразие $CG(n, k)$ комплексной коразмерности 1 с особенностью F_w'. Считаем, что F_w ориентировано комплексной структурой. Число $\zeta \in U$ является с. з. тогда и только тогда, когда $h|_D(\chi^{-1}(\zeta)) \in F_w$.

Предложение 3. *Индексы пересечения пар* $(h|_Q, F_w)$ *и* $(h|_D, F_w)$ *равны.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 с таким замечанием: из подсчета размерностей всех участвующих многообразий следует, что по соображениям трансверсальности гомотопию $H: D \times [0, 1] \mapsto G(n, k)$, соединяющую $h|_Q$ и $h|_D$ и связанную на S, можно выбрать так, чтобы $H(p \times [0,1]) \cap F_w = \varnothing$ и $\operatorname{Im} H \cap F_w' = \varnothing$. Таким образом можно избежать рассмотрения особенностей многообразий Q и F_w.

Предложение 4. *Индекс пересечения пары* $(h|_D, F_w)$ *равен числу с. з. внутри* Γ.

Доказывается аналогично предложению 2.

При численном использовании данного метода возникает необходимость, во-первых, определять степень близости пути прогонки условия (1.2а) к шлейфу условия (1.2б) и, во-вторых, обнаруживать точку пересечения и определять ее знак. По сравнению со случаем $n = 2$ здесь возникают дополнительные численные трудности. Как правило, методы прогонки используют представление элемента $u \in CG(n, k)$ в виде $(n \times k)$-матрицы M_u, столбцы которой образуют базис в u (или же $[n \times (n-k)]$-матрицу базиса в $u^{\perp}$). При этом матрица $M_u^* M_u$ хорошо обусловлена (в некоторых вариантах близка к единичной). Использование определителя матрицы

$$R(x, \zeta) = (M_w \mid M_{g(x,\zeta)}) \tag{1.3}$$

формально решает указанные вопросы, но на практике применимо только при небольших n, так как уже при $n \sim 10$ он принимает очень близкие к нулю значения для произвольных x и ζ и практически не несет информации.

Для преодоления этих трудностей можно предложить следующий способ. Решая для очередного z_i уравнения прогонки, можно на каждом шаге интегрирования по x получать матрицу $R(x, z_i)$. Проделаем над ее столбцами процесс исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Для матрицы M_w, с которой процесс каждый раз начинается, это можно сделать один раз заранее. Абсолютная величина остающегося в последнем столбце единственного ненулевого элемента может быть использована для оценки величины d_i. Если по этим показателям некоторая малая окрестность точки (x_0, z_0) в $[a,b] \times \Gamma$ подозревается на наличие в ней точки пересечения, то нужно, «заморозив» расположение главных элементов, следить за тем, как элемент последнего столбца заметает нуль. Можно доказать, что независимо от того, как именно были расположены главные элементы, таким образом будет получен знак этой точки пересечения. На описанные действия требуется существенно меньше арифметических действий, чем на само решение уравнений прогонки. Запоминать какие-либо числовые массивы не нужно.

В предложенном методе для нахождения N_U используются траектории переноса условия (1.2а) для значений ζ, принадлежащих контуру. С точки зрения возможной применимости для этой же цели принципа аргумента интересно выяснить, определяется ли N_U только лишь результатом переноса условия (1.2а) в точку $x = 1$ для $\zeta \in \Gamma$. Следующее предложение дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Предложение 5. *Задача восстановления N_U по $h\,|_S$ некорректна.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ нужно предъявить две системы вида (1.1) с одинаковыми краевыми условиями (1.2) и область U так, чтобы эти краевые задачи имели в U разное число с. з., но соответствующие отображения $h\,|_S$ различались (в равномерной норме) менее чем на ε. Пример построим для $n = 2$, $k = 1$. Определим $A_1(x, \zeta)$ так: A_1 не зависит от x, имеет с. з. $+1$ и -1 и соответствующие собственные векторы $(\zeta, 1)^T$ и $(1,0)^T$. Матрица $A_2(x, \zeta)$ определяется аналогично, с.з. те же, собственные векторы $(\zeta^2 - 1, \zeta)^T$ и $(\zeta, 1)^T$. Отрезок интегрирования $[0, X]$. Краевые условия $\alpha y_1(0) - y_2(0) = 0$, $y_1(X) = 0$ (здесь $y = (y_1, y_2)^T$); $U = \{\zeta \in C\colon |\zeta| < R\}$, $R = \alpha^{-1/2}$. Нужный результат достигается при достаточно малом α и достаточно большом X ($\alpha \sim \varepsilon^2$, $X \sim \ln(1/\varepsilon)$).

Изложенный метод можно использовать и для нахождения отдельных с. з. Очевидная возможность состоит в том, чтобы делить область U на все более мелкие куски. Можно, однако, предложить другой способ, требующий существенно меньше вычислений. Рассмотрим множество $h^{-1}(w)$ в случае $n = 2$, $k = 1$ или же $h^{-1}(F_w)$ в общем случае. Считая, что w не является критическим значением для h (см. выше о предположениях трансверсальности), получаем, что это одномерное подмногообразие в K, край которого содержится в крае K (см., например, [7]). Следовательно, каждая из его компонент принадлежит к одному из следующих типов: 1) замкнутая кривая, целиком лежащая внутри K; 2) дуга, оба конца которой принадлежат Q; 3) дуга, один конец которой лежит в Q, а другой в D; 4) дуга с обоими концами в D.

Предложение 6. *Среди случаев, перечисленных выше, случай 4) невозможен.*

Доказательство (от противного). Пусть γ — компонента $h^{-1}(w)$ типа 4). В одном из ее концов q_0 возьмем положительно ориентированный репер e_1, e_2, e_3 так, чтобы e_1 был касательным к γ вектором, направленным вверх, а e_2, e_3 лежали в плоскости D. Этот репер можно гладко перенести вдоль γ таким образом, чтобы $e_1(q)$, $q \in \gamma$, оставался касательным к γ, а в конечной точке

q_1 векторы $e_2(q_1)$ и $e_3(q_1)$ опять оказались в плоскости D. Поскольку ранг отображения h в любой точке $q \in \Gamma$ равен двум и $e_1(q) \in \operatorname{Ker} h'(q)$, то детерминант $h'(q)\,|_{\operatorname{span}(e_2(q),\, e_3(q))} \neq 0$ и, следовательно, сохраняет знак вдоль γ. Это противоречит тому, что пары $(e_2(q_0),\ e_3(q_0))$ и $(e_2(q_1),\ e_3(q_1))$ по-разному ориентированы в плоскости D, и в то же время, в силу голоморфности отображения $h\,|_D$, оно имеет положительный якобиан в обоих концах q_0, q_1. Доказательство в случае произвольных n,k аналогично.

Из доказанного следует вывод: каждая точка множества $h^{-1}(w) \cap D$ (которое — с точностью до диффеоморфизма χ — есть множество с. з.) имеет «дубликат» на боковой поверхности конуса (см. выше случай 3)). Эти дубликаты и есть точки пересечения, которые выявляет описанная процедура обхода по контуру Γ (при этом, вообще говоря, будут обнаруживаться также «фальшивые» точки, соответствующие случаю 2), которым не соответствует никакое с. з.). После этого искомые с. з. можно найти продвижением по одномерным путям из их дубликатов; такие методы развиты в теории нелинейных уравнений (см. [9]).

В заключение этого параграфа естественно сравнить изложенный метод с методами, основанными на применении принципа аргумента к определителю матрицы $R(1, \zeta)$ из (1.3). В силу предложения 5, последние заведомо неприменимы, если используется метод прогонки, имеющий дело с подпространством $g(x, \zeta)$ как таковым, без вычисления какой-либо дополнительной информации (сюда относятся методы прогонки, основанные на уравнении Риккати, см., например, [10]). Если в выбранном методе прогонки такая информация вычисляется, например если $M_{g(x,\zeta)}$ представляется как ортонормированный базис в $g(x, \zeta)$, то в некоторых случаях принцип аргумента применим (вопрос о применимости нужно решать для каждой прогонки отдельно). Из-за большей размерности переносимого объекта такие способы требуют большего объема вычислений. Как уже отмечалось, при больших n, k нахождение $\det\,[R(1, \zeta)]$ (и даже только его аргумента) связано с вычислительными трудностями. Наконец, в отличие от метода, изложенного здесь, методы, основанные на принципе аргумента, не могут предъявить одномерные пути, ведущие от границы области к отдельным с. з. внутри нее.

Изложенный метод был проверен на исследованной ранее задаче о внешних электрических колебаниях идеально проводящей сферы (см. [11]), которая сводится к краевой задаче для несамосопряженного комплексного уравнения 2-го порядка. Расчеты показали, что для локализации с. з. (которая требует лишь установления качественных фактов наличия точек пересечения) вполне достаточно грубого разбиения — порядка 100 точек z_i на контуре среднего размера.

§ 2. Самосопряженная двухпараметрическая задача

Рассмотрим систему двух уравнений

(2.1) $$(p_i(x_i)\, y_i'(x_i))' + q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)\, y_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

с краевыми условиями

(2.2a) $$p_i(0)\, y_i'(0) \sin \alpha_i - y_i(0) \cos \alpha_i = 0,$$

(2.2б) $\quad p_i(1)\,y_i'(1)\sin\beta_i - y_i(1)\cos\beta_i = 0.$

Здесь $x_i \in [0, 1]$; $(\lambda_1, \lambda_2) \in W \subset \mathbb{R}^2$; q_i — вещественные, p_i — положительные вещественные функции, p_i, q_i непрерывно зависят от своих аргументов и, кроме того, q_i непрерывно дифференцируемы по λ_j, $i, j = 1, 2$; $0 \le \alpha_i < \pi$, $0 < \beta_i \le \pi$ — заданные числа. Пара (λ_1, λ_2) называется с. з., если каждое из уравнений (2.1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее соответствующим условиям (2.2).

Для каждого из уравнений (2.1) многообразие краевых условий есть $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$. В этом случае наилучшим способом переноса граничного условия является использование универсального накрытия $\mathbb{R}^1 \to S^1$ посредством преобразования Прюфера $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/py')$ (см. [12]). Эта процедура обладает нужными свойствами устойчивости и для найденного с. з. дает число нулей соответствующей с. ф. без вычисления ее самой. В физической литературе этот метод принято называть методом фазовых функций (см. [13]). В рассматриваемой задаче из (2.1) и (2.2а) получаем уравнения

$$\vartheta_i' = p_i^{-1}(x_i)\cos^2\vartheta_i + q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)\sin^2\vartheta_i \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$\vartheta_i(0) = \alpha_i, \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Пусть $\vartheta_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)$ — решения (2.3), удовлетворяющие (2.4) при заданных λ_1, λ_2. Пара (λ_1, λ_2) есть с. з. тогда и только тогда, когда $\vartheta_i(1, \lambda_1, \lambda_2) = \beta_i + k_i\pi$, где k_i — неотрицательные целые числа. Вводя отображение

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad F(\lambda_1, \lambda_2) = (\vartheta_1(1, \lambda_1, \lambda_2),\ \vartheta_2(1, \lambda_1, \lambda_2)),$$

сводим исходную задачу к задаче нахождения прообразов относительно отображения F точек решетки

$$M = \{(\beta_1 + k_1\pi, \beta_2 + k_2\pi) : k_i = 0, 1, 2, \dots;\ i = 1, 2\}.$$

Предложение 7. *Пусть для фиксированных* λ_1, λ_2 *и для всех* $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$ *выполнено*

$$\det\left(\frac{\partial q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_j}\right)_{i,j=1,2} \ne 0. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\partial F(\lambda_1, \lambda_2)/\partial(\lambda_1, \lambda_2) \ne 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из непрерывности функций $\partial q_i/\partial\lambda_j$ и связности квадрата $[0,1] \times [0,1]$ следует, что $\det(\partial q_i/\partial\lambda_j)$ имеет один и тот же знак для всех $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$. Предположим для определенности, что $\det(\partial q_i/\partial\lambda_j) > 0$. Из теорем о зависимости решений о. д. у. от параметра для уравнения (2.3) следует, что

$$\frac{\partial \vartheta_i(1)}{\partial \lambda_j} = \int_0^1 \exp\left[\int_s^1 a_i(t, \lambda_1, \lambda_2)\, dt\right] \sin^2 \vartheta_i(s_i, \lambda_1, \lambda_2) \frac{\partial q_i(s_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_j} ds_i,$$

$i, j = 1, 2$, где

$$a_i(t, \lambda_1, \lambda_2) = 2\cos \vartheta_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2) \sin \vartheta_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)\, [q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2) - p_i^{-1}(x_i)].$$

Тогда

$$\frac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} = \det\left[\frac{\partial \vartheta_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_j}\right]_{i,j=1,2} = \tag{2.7}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 A(s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2) \sin^2 \vartheta_1(s_1, \lambda_1, \lambda_2) \sin^2 \vartheta_2(s_2, \lambda_1, \lambda_2) \times$$

$$\times \det\left(\frac{\partial q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_j}\right)_{i,j=1,2} ds_1 ds_2,$$

где

$$A(s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2) = \exp\left[\int_{s_1}^1 a_1(t, \lambda_1, \lambda_2)\, dt \int_{s_2}^1 a_2(t, \lambda_1, \lambda_2)\, dt\right]$$

является положительной функцией. Из уравнений (2.3) видно, что $\sin \vartheta_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2)$ не может быть равен нулю на множестве значений x_i положительной меры. Следовательно, подынтегральная функция в правой части (2.7) почти всюду положительна, откуда следует (2.6).

Замечание. Условие (2.5) есть прямое обобщение на случай нелинейного вхождения спектральных параметров известного [14] условия

$$\det[q_{ij}(x_i)] \neq 0 \quad \forall x_i, \quad q_i(x_i, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_j q_{ij}(x_i)\lambda_j.$$

Пусть в области W имеется простой замкнутый контур Γ, ограничивающий область U. Следующее предположение показывает, что число с. з. задачи (2.1)—(2.2), расположенных в U, может быть определено по данным прогонки краевых условий для значений (λ_1, λ_2), принадлежащих Γ.

Предложение 8. *Пусть для всех* $(\lambda_1, \lambda_2) \in U \cup \Gamma$ *и* $(x_1, x_2) \in I^2$ *выполнено условие* (2.5) *(или же непосредственно выполнено условие* (2.6)). *Тогда число с. з. задачи* (2.1)—(2.2), *лежащих в* U, *равно числу точек решетки* M, *охватываемых контуром* Γ, *засчитываемых с кратностью, равной числу оборотов. Таким образом, число с. з., для которых собственные функции имеют, соответственно,* m_1 *и* m_2 *нулей, равно индексу пути* $F(\Gamma)$ *относительно точки* $(\beta_1 + m_1\pi, \beta_2 + m_2\pi)$, *умноженному на* $\operatorname{sign}\ [\partial F(\lambda_1, \lambda_2)/\partial(\lambda_1, \lambda_2)]$.

Доказательство получается применением стандартных топологических фактов с учетом (2.6) (см. [6]).

При численной реализации метода нужно, выбирая на контуре Γ точки $(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, замечать моменты, когда $F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)})$ пересекает прямые вида

$$(2.8)\qquad \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi_1 = \beta_1 + m\pi\},$$

$$(2.9)\qquad \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi_2 = \beta_2 + m\pi\},\quad m = 0, 1, \ldots .$$

После этого останется решить простую комбинаторную задачу. Возможны различные способы уменьшить объем вычислений, например следить только за пересечением прямых (2.8) (для этого придется переносить условия только для первого из уравнений (2.1)) и уже в точках пересечения вычислять ϑ_2.

Изложенный метод следующим образом соотносится с методом, предложенным в [15] (см. также [16]) для задач такого же типа. Данный метод направлен на определения числа с. з. в заданной области; нахождение же их хотя и может быть проделано делением области на более мелкие части, представляется слишком трудоемким. Метод [15] позволяет вычислять с. з. С другой стороны, данный метод применим в более общей ситуации, так как, в отличие от [15], [16], никаких свойств монотонности $F(\lambda_1, \lambda_2)$ по λ_1, λ_2 и даже однолистности F не требуется. По-видимому, можно предположить следующую схему вычислений: на начальном этапе применяется данный метод; когда с. з. локализовано настолько, что в полученной окрестности элементы матрицы $\partial q_i/\partial \lambda_j$ меняются не очень сильно, применяется метод [15]; на заключительном этапе применяется какой-либо быстросходящийся метод типа Ньютона.

Предложенный метод может применяться для двухпараметрической задачи на с. з. более общего вида, чем (2.1)—(2.3), а именно когда вместо уравнений 2-го порядка рассматриваются линейные гамильтоновы системы о. д. у. (см. [17]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Bramley S., Dieci L., Russel R. D.* Numerical solution of eigenvalue problems for linear boundary value ODEs//J. Comput. Phys. 1991. V. 94. № 2. P. 382—402.
2. *Блатов А. С., Курочкин С. В., Ульянова В. И.* Численное исследование гидродинамической устойчивости течений в океанах и морях//Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
3. *Блатов А. С., Курочкин С. В., Соколов С. Ю.* Исследование гидродинамической устойчивости морских течений в шельфовой зоне и над резкими неоднородностями рельефа дна//Моделирование гидрофиз. процессов и полей. М.: Наука, 1989. С. 150—158.
4. *Pego R. L., Smereka P., Veinstein M. I.* Oscillatory instability of traveling waves for KdV-Burgers equation//Physica. 1993. D 67. P. 45—65.
5. *Курочкин С. В.* Метод нахождения собственных значений несамосопряженной краевой задачи//Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 442—443.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
7. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
8. *Арнольд В. И.* Теоремы Штурма и симплектическая геометрия//Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. Вып. 4. С. 1—10.
9. *Watson L.* Globally convergent homotopy methods//Appl. Math. Comput. 1989. V. 31. P. 369—396.
10. *Babuska I., Majer V.* The factorization method for the numerical solution of two point boundary value problems for linear ODEs//SIAM J. Numer. Analys. 1987. V. 24. № 6. P. 1301—1334.
11. *Абрамов А. А., Вайнштейн Л. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б.* Численные исследования свободных электрических осесимметричных колебаний идеально проводящего вытянутого сфероида//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 4. С. 535—553.
12. *Абрамов А. А., Ульянова В. И.* О решении уравнений для определения уровней энергии ионизированной молекулы водорода//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 351—354.

13. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
14. *Sleeman B. D.* Singular linear differential operators with many parameters//Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1973. V. 71. P. 199—232.
15. *Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В.* Вычисление угловых волновых функций Ламе решением вспомогательных дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 813—830.
16. *Левитина Т. В.* Об условиях применимости одного алгоритма решения двухпараметрических самосопряженных краевых задач//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 5. С. 689—697.
17. *Абрамов А. А.* Метод решения некоторых многопараметрических задач на собственные значения, возникающих при использовании метода Фурье.//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1524—1527.

Поступила в редакцию 23.05.94
Переработанный вариант 30.11.94