УДК 519.624.2

СИНГУЛЯРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРЕМИЯМИ: АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ[1)]

© 2012 г. Т. А. Белкина*, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин****

*(*117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН;*

***119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)*

e-mail: tbel@cemi.rssi.ru; nadja@ccas.ru; kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 14.03.2012 г.

Даются корректная постановка и математический анализ сингулярной краевой задачи для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка, с вольтерровым и невольтерровым интегральными операторами. Уравнение определено на $\mathbb{R}_+$, обладает слабой особенностью в нуле и сильной особенностью на бесконечности и зависит от нескольких положительных параметров. При естественных ограничениях на коэффициенты уравнения доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи с заданными предельными условиями в особых точках, даны асимптотические представления решения и алгоритм его численного нахождения. Проведены расчеты и дана их интерпретация. Задача возникает при исследовании вероятности неразорения страховой компании за бесконечное время (как функции ее начального капитала) в динамической модели страхования – модификации классической модели Крамéра–Лундберга со случайным процессом поступления страховых взносов (премий) и при определенной стратегии инвестирования капитала на финансовом рынке. Дан сравнительный анализ результатов с результатами для модели с детерминированными премиями. Библ. 32. Фиг. 9.

Ключевые слова и фразы: динамические модели страхования; модель Крамéра–Лундберга со стохастическими премиями; вероятность неразорения страховой компании как функция ее начального капитала; линейное интегродифференциальных уравнений второго порядка на полуоси; сингулярная краевая задача с ограничениями; сопутствующие сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений; существование, единственность и поведение решения; алгоритм численного нахождения решения.

1. ВВЕДЕНИЕ: ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ИНВЕСТИЦИИ В РИСКОВЫЕ АКТИВЫ

Рассматриваемая в данной работе сингулярная краевая задача (КрЗ) с ограничениями для линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ) второго порядка, которая в целом ставится и изучается впервые, возникает при исследовании проблемы платежеспособности в одной динамической модели страхования, предполагающей инвестирование капитала на финансовом рынке (см. [1]). В основе указанной модели лежит модификация классической модели Крамéра–Лундберга (КЛ-модели) коллективного риска (описание динамических процессов коллективного риска см., например, в [2, гл. 7–9).

В классической КЛ-модели процесс, описывающий изменение капитала (процесс риска), складывается из двух процессов – детерминированного процесса поступления премий и сложного пуассоновского процесса страховых выплат (исков). Если отказаться от упрощающего предположения о детерминированности процесса поступления премий, наиболее естественно считать, что он также является сложным пуассоновским процессом, причем с параметрами, отличными от параметров процесса страховых выплат. Следуя [3], соответствующую модель, которую коротко опишем ниже, будем называть КЛ-моделью со стохастическими премиями.

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00767-а и 11-01-00219-а).

При инвестировании капитала на финансовом рынке на изменение капитала (помимо указанных двух факторов) влияют, по крайней мере, еще два фактора – изменение цен рыночных активов и возможность принятия тех или иных инвестиционных решений. Далее будем рассматривать только стратегии инвестиций с постоянной структурой, когда некоторая фиксированная доля капитала вкладывается в рисковый актив (акции, цена которых моделируется геометрическим броуновским движением), а оставшаяся часть капитала вкладывается в безрисковый актив (банковский счет при постоянной процентной ставке). При этом если исходный процесс риска описывается классической КЛ-моделью, то соответствующую модель с погружением в финансовый рынок будем называть моделью I. Если же исходный процесс риска описывается КЛ-моделью со стохастическими премиями, то соответствующую модель с инвестициями будем называть моделью II.

Одним из центральных вопросов в динамических моделях страхования является определение или оценка вероятности неразорения, являющейся традиционной детерминированной характеристикой платежеспособности. В большинстве рассматриваемых моделей динамика капитала страховой компании описывается однородным марковским процессом с непрерывным временем, в частности, при инвестировании капитала в рисковые активы этот процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). В таких процессах для вероятности неразорения как функции начального капитала (НК) при определенных предположениях относительно свойств этой функции можно получить ИДУ, используя аппарат производящих операторов (см, например, [4] и цитированную там литературу).

ИДУ определены на $\mathbb{R}_+$, и неотрицательные на $\mathbb{R}_+$ решения этих ИДУ, не превосходящие единицы, с заданными условиями на левом конце и условием стремления решения к единице на бесконечности, если таковые существуют, действительно определяют искомую вероятность, что может быть доказано с привлечением вероятностных методов (см. подробнее [5] и цитированную там литературу). В частности, в [5] обоснованы, в указанном смысле, постановки задач для рассматриваемых в данной работе моделей I и II.

Ниже прежде всего дается описание модели II, которая является основным предметом исследования данной работы; для последующего сравнения приводится также описание модели I и формулируются полученные для нее ранее основные результаты.

Далее, в частности, используются обозначения: $\mathbf{P}(A)$ – вероятность события A; $\mathbf{E}X$ – математическое ожидание случайной величины X. Остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

1.1. Модель Крамéра–Лундберга со стохастическими премиями; сингулярное ИДУ на полуоси для модели с инвестициями

Опишем кратко КЛ-модель со стохастическими премиями (подробнее см. [1], [3] и [2], разд. 9.5).

Пусть процесс риска в непрерывном времени имеет вид

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \ge 0. \tag{1.1}$$

Здесь R_t – величина капитала страховой компании в момент времени t, u – величина НК; первая сумма в правой части – совокупный страховой взнос к моменту времени t, $N_1(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ ($\mathbf{E}N_1(t) = \lambda_1 t$, $N_1(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число премий, внесенных клиентами страховой компании за временнóй промежуток $(0, t]$, C_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(y)$ ($G(0) = 0$, $\mathbf{E}C_1 = n < \infty$), которые определяют размеры премий и предполагаются независимыми от процесса $N_1(t)$ (C_i – взнос с номером i в момент i-го скачка процесса $N_1(t)$); вторая сумма – совокупные страховые выплаты, $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$; $\lambda \le \lambda_1$), определяющий для любого $t > 0$ число исков, предъявленных клиентами страховой компании за временнóй промежуток $(0, t]$, Z_j – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$), которые определяют размеры предъявленных исков и считаются независимыми от процесса $N(t)$ (Z_j – выплата по иску с номером j в момент j-го скачка процесса $N(t)$). В целом, процессы суммарных премий и суммарных страховых выплат также предполагаются независимыми.

Замечание 1. Независимость процессов суммарных премий и суммарных страховых выплат является упрощающим предположением по сравнению с более общей ситуацией, описанной, например, в [2, разд. 9.5], где считается, что $N(t) \leq N_1(t)$ для любого $t \geq 0$, т.е. общее число исков не может быть больше общего числа премий. Но если предполагать, что до нулевого момента времени компания может иметь предысторию по накоплению премий и исков, то это требование заменяется более слабым условием на ожидаемые количества исков в единицу времени: $\lambda \leq \lambda_1$.

Для дальнейшего нам понадобится определение величины (так называемой относительной “нагрузки безопасности”), характеризующей ожидаемый “удельный доход” страховой компании в единицу времени (для классической КЛ-модели см. далее определение 2).

Определение 1. Нагрузкой (коэффициентом) безопасности для процесса риска (1.1) называется величина

$$\rho_2 = (\lambda_1 n - \lambda m)/(m\lambda). \tag{1.2}$$

Для описания модели II рассмотрим теперь ситуацию, когда страховая компания с процессом риска (1.1) непрерывно инвестирует некоторую постоянную долю α $(0 < \alpha \leq 1)$ своего капитала в акции, изменение цены которых описывается СДУ:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t), \quad t \geq 0.$$

Здесь S_t — цена акции в момент времени t, μ — ожидаемая доходность акции, $0 < \sigma$ — параметр изменчивости (волатильности) указанного дохода, $\{w_t\}$ — стандартный винеровский процесс, или броуновское движение (процесс S_t называют геометрическим броуновским движением). При этом будем предполагать, что оставшаяся доля капитала инвестируется в безрисковый актив — банковский счет при процентной ставке r, $0 < r < \mu$, эволюция которого описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \geq 0,$$

где B_t — величина банковского счета в момент времени t.

В этом случае динамика капитала (результирующий процесс риска) описывается начальной задачей для СДУ:

$$dX_t = [(\alpha\mu + (1-\alpha)r)dt + \alpha\sigma dw_t]X_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = u. \tag{1.3}$$

Здесь X_t — стоимость портфеля в момент времени t (подробнее о постановке (1.3) см., например, [4] и цитированную там литературу).

В качестве меры платежеспособности компании будем рассматривать вероятность неразорения $\varphi(u)$ (как функцию НК u) на бесконечном интервале времени:

$$\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_t \geq 0, t > 0\},$$

где $X_0 = u$, $u \geq 0$; при $u < 0$ полагаем $\varphi(u) \equiv 0$.

Заметим, что СДУ в (1.3) при замене параметров

$$a = \alpha\mu + (1-\alpha)r > 0, \quad b = \alpha\sigma > 0 \tag{1.4}$$

можно рассматривать как уравнение динамики капитала, полностью инвестируемого в акции с ожидаемой доходностью a и волатильностью b, что позволяет без ограничения общности всюду далее рассматривать именно такую стратегию поведения компании на финансовом рынке, если не оговорено особо.

Уравнение для вероятности неразорения $\varphi(u)$ процесса риска (1.3) было получено в [1]. С учетом указанного замечания и обозначений (1.4) оно имеет вид

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda\left[\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-x)dF(x)\right] - \lambda_1\left[\varphi(u) - \int_0^\infty \varphi(u+y)dG(y)\right] = 0, \quad 0 < u < \infty. \tag{1.5}$$

В случае экспоненциальных распределений размеров премий и исков, т.е. когда

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad m > 0, \tag{1.6}$$

$$G(y) = 1 - \exp(-y/n), \quad n > 0, \tag{1.7}$$

ИДУ (1.5) принимает вид

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{1.8}$$

Здесь J_m и $J_{1,n}$ – вольтерров и невольтерров интегральные операторы соответственно,

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(u-x)\exp(-x/m)dx = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(s)\exp(-(u-s)/m)ds, \tag{1.9}$$

$$(J_{1,n}\varphi)(u) = \frac{1}{n}\int_0^\infty \varphi(u+y)\exp(-y/n)dy = \frac{1}{n}\int_u^\infty \varphi(s)\exp(-(s-u)/n)ds, \tag{1.10}$$

где $J_m, J_{1,n} : C[0,\infty) \longrightarrow C[0,\infty)$, $C[0,\infty)$ – линейное пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций. При этом формулу (1.10), удобную для доказательств некоторых утверждений, можно также рассматривать как преобразование невольтеррова оператора с опережающим аргументом в сингулярный вольтерров оператор (по поводу определений вольтерровых операторов для классов систем функционально-дифференциальных уравнений (включающих ИДУ как частный случай), в том числе нелинейных и сингулярных, см., например, [6], [7] и цитированную там литературу).

В данной работе ставится сингулярная КрЗ на $\mathbb{R}_+$ для ИДУ (1.8) с (1.6), (1.7), содержащего вольтерров и невольтерров интегральные операторы, дается полный теоретический анализ этой КрЗ с ограничениями, предлагается численный метод ее решения и приводятся результаты расчетов.

Дается также сравнение результатов исследований и проведенных расчетов с результатами, полученными ранее для аналогичной, но более простой задачи, возникающей при описании модели I с исходным процессом риска, описываемым классической КЛ-моделью; в этом случае ИДУ содержит только вольтерров интегральный оператор (см. [8]–[10] и цитированную там литературу). Ниже приводится сингулярная задача для линейного ИДУ относительно вероятности неразорения, соответствующая модели I и коротко формулируются основные результаты, полученные для нее в [8], [9].

1.2. Классическая модель Крамéра–Лундберга; сингулярная задача на полуоси для модели с инвестициями и результаты ее исследования

В классическом процессе риска сложный пуассоновский процесс поступления премий заменяется детерминированным процессом с постоянной интенсивностью $c > 0$, т.е. вместо (1.1) рассматривается процесс

$$R_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \ge 0. \tag{1.11}$$

Следуя, например, [11, с. 289] (см. также [12]), получаем классическое определение нагрузки безопасности для этого процесса риска (ср. с определением 1).

Определение 2. Нагрузкой безопасности для процесса риска (1.11) называется величина

$$\rho_1 = (c - m\lambda)/(m\lambda) = c/(m\lambda) - 1. \tag{1.12}$$

Перейдем к модели I при тех же предположениях относительно структуры инвестиционного портфеля, что и для модели II и предположении (1.6) об экспоненциальном распределении размеров исков. Тогда для вероятности неразорения $\varphi(u)$ получим следующую сингулярную задачу для ИДУ (см. [8], [9]):

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.13}$$

$$\left|\lim_{u\to+0}\varphi(u)\right| < \infty, \quad \left|\lim_{u\to+0}\varphi'(u)\right| < \infty, \quad \lim_{u\to+0}[c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0, \tag{1.14}$$

$$0 \le \varphi(u) \le 1, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.15}$$

$$\lim_{u \to \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \to \infty} \varphi'(u) = 0. \tag{1.16}$$

Здесь используется обозначение (1.9) для вольтеррова интегрального оператора J_m, $J_m : C[0, \infty) \longrightarrow C[0, \infty)$, и, если не оговорено особо, все параметры a, b^2, c, λ, m – действительные положительные числа.

Третье из предельных условий в (1.14) есть следствие первых двух и самого ИДУ (1.13), для решений которого условия в нуле (1.14) влекут выполнение требования $\lim_{u \to +0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение этого ИДУ при $u \longrightarrow +0$: любое решение сингулярной задачи без начальных данных (1.13), (1.14) должно удовлетворять ИДУ (1.13) вплоть до особой точки $u = 0$.

"Укороченная задача" (1.13)–(1.15) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (1.16).

Далее используем эквивалентность условий (1.14) параметризованным предельным условиям

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \to +0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c, \tag{1.17}$$

где C_0 – параметр, подлежащий определению, причем для искомого решения должно быть $0 < C_0 < 1$.

Отметим также, что в исследованиях как модели I, так и модели II важным является выполнение неравенства

$$2a/b^2 > 1, \tag{1.18}$$

которое принято называть условием "надежности портфеля активов".

Сформулируем основные следствия из результатов [8], [9].

Лемма (см. [8], [9]). *Пусть в ИДУ* (1.13) *параметры* a, b, c, λ, m *– фиксированные числа, где* $c > 0$, $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Тогда: 1) *при любом фиксированном значении параметра* C_0 ($C_0 \in \mathbb{R}$) *сингулярная "интегродифференциальная" начальная задача* (1.13), (1.17) *эквивалентна сингулярной "дифференциальной" задаче Коши (ЗК) вида*

$$(b^2/2)u^2\varphi'''(u) + [c + (b^2 + a)u + b^2u^2/(2m)]\varphi''(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{1.19}$$

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \to +0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c, \quad \lim_{u \to +0} \varphi''(u) = [m(\lambda - a) - c]\lambda C_0/(mc^2); \tag{1.20}$$

2) *решение* $\varphi(u, C_0)$ *сингулярной ЗК* (1.19), (1.20) (*эквивалентной начальной задаче* (1.13), (1.17)) *существует, единственно и при малых и представимо асимптотическим рядом*

$$\varphi(u, C_0) \sim C_0\left[1 + \frac{\lambda}{c}\left(u + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^k/k\right)\right], \quad u \sim +0, \tag{1.21}$$

где постоянные коэффициенты D_k *не зависят от* C_0 *и определяются формальной подстановкой ряда* (1.21) *в ОДУ* (1.19), *а именно по рекуррентным формулам:*

$$D_2 = -[(a - \lambda)/c + 1/m], \tag{1.22}$$

$$D_3 = -[D_2(b^2 + 2a - \lambda + c/m) + a/m]/(2c), \tag{1.23}$$

$$D_k = -\{D_{k-1}[(k-1)(k-2)b^2/2 + (k-1)a - \lambda + c/m] + D_{k-2}[(k-3)b^2/2 + a]/m\}/[c(k-1)], \quad k = 4, 5, \ldots; \tag{1.24}$$

3) *все решения ОДУ* (1.19) (*начальной задачи* (1.13), (1.17) *для ИДУ*) *тогда и только тогда имеют конечные пределы при* $u \longrightarrow \infty$, *когда выполняется условие* (1.18).

Теорема (см. [8], [9]). *Пусть в ИДУ* (1.13) *все параметры* a, b^2, c, λ, m *– фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие* (1.18).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *существует, и притом единственное, решение* $\varphi(u)$ *сингулярной линейной задачи* (1.13)–(1.16), *оно является бесконечно дифференцируемой монотонно возрастающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией*;

2) *решение* $\varphi(u)$ *может быть получено как решение сингулярной начальной задачи с параметром* (1.13), (1.17) (*эквивалентной сингулярной ЗК с параметром* (1.19), (1.20)), *где параметр* $C_0 > 0$ *выбирается из требований* (1.16) *как условия нормировки решения на бесконечности, а ограничения* (1.15) *выполняются для такого решения автоматически*;

3) *если выполнено условие*

$$m(a - \lambda) + c > 0, \tag{1.25}$$

то решение $\varphi(u)$ — *вогнутая на* $\mathbb{R}_+$ *функция, а если справедливо*

$$m(a - \lambda) + c \le 0, \tag{1.26}$$

то $\varphi(u)$ *выпукла на некотором отрезке* $[0, \hat{u}\,]$, *где* $0 < \hat{u}$ — *точка перегиба; условие* (1.25), *в частности, выполнено при положительной нагрузке безопасности* (1.12), *т.е. при выполнении неравенства*

$$c - \lambda m > 0; \tag{1.27}$$

4) *при малых и для решения* $\varphi(u)$ *справедливо асимптотическое представление* (1.21), *где* $C_0 : 0 < < C_0 < 1$;

5) *при больших и для решения* $\varphi(u)$ *справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1 - 2a/b^2}[1 + o(1)], \quad u \longrightarrow \infty, \tag{1.28}$$

где $K = C_0\tilde{K} > 0$ (*значения* $C_0 > 0$ *и* $\tilde{K} > 0$ *не могут быть найдены методами локального анализа*).

Определение 3. При невыполнении условия (1.27), т.е. при $\rho_1 \le 0$, величину

$$i_{r,\,\mathrm{I}} = ma + c - m\lambda \tag{1.29}$$

называем *показателем* (индексом) рискованности модели I наиболее рискованная ситуация возникает, когда $i_{r,\,I} \le 0$, т.е. справедливо неравенство (1.26), а значения НК малы.

Замечание 2 (алгоритм решения задачи (1.13)–(1.16)). Приведенные выше утверждения позволяют находить решение задачи (1.13)–(1.16) из решения вспомогательной сингулярной ЗК (1.19), (1.20) с параметром C_0, значение которого определяется из требований (1.16) как условия нормировки решения на бесконечности.

Практически это можно осуществить, например, следующим образом. Полагая $\psi(u) = \varphi'(u)$, рассмотрим вспомогательную сингулярную ЗК:

$$(b^2/2)u^2\psi''(u) + [c + (b^2 + a)u + b^2u^2/(2m)]\psi'(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\psi(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{1.30}$$

$$\lim_{u \to +0}\psi(u) = 1, \quad \lim_{u \to +0}\psi'(u) = [m(\lambda - a) - c]/(mc). \tag{1.31}$$

Решение $\psi(u)$ этой задачи существует, единственно и при малых u представимо асимптотическим рядом

$$\psi(u) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^{k-1}, \quad \psi'(u) \sim \sum_{k=2}^{\infty})(k-1)D_k u^{k-2}, \quad u \sim +0, \tag{1.32}$$

где коэффициенты D_k определены в (1.22)–(1.24). Разложения (1.32) используем для приближенного переноса предельных условий (1.31) в конечную точку $u_0 > 0$. Решение $\varphi(u)$ исходной задачи (1.13)–(1.16) находим, используя соотношение

$$\varphi(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(s)ds\right]\left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds\right]^{-1}, \tag{1.33}$$

где $\psi(u)$ – решение задачи (1.30), (1.31).

Результаты расчетов по модели I см. в [8]–[10] и в данной работе.

Сравнение результатов вычислений для моделей I и II будем проводить в разд. 6 при следующих условиях.

Условия сравнения моделей I и II: 1) задаваемые значения параметров a, b^2, λ, m для модели II те же, что и для модели I; 2) значения c для модели I и λ_1 и n для модели II связаны соотношением

$$\lambda_1 n = c, \tag{1.34}$$

т.е. ожидаемые размеры премий в единицу времени одинаковы в обеих моделях.

Предварительно сравним точные решения для КЛ-моделей при выполнении равенства (1.34).

1.3. Сравнение точных решений для моделей без инвестиций

1.3.1. Точное решение для классической КЛ-модели

При $a = b = 0$ получаем из (1.13)–(1.16) “вырожденную” сингулярную задачу для ИДУ первого порядка:

$$c\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad 0 \le u < \infty, \tag{1.35}$$

$$c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{1.36}$$

Эта задача, где все параметры – положительные числа и выполнено условие (1.27) положительности нагрузки безопасности, отвечает классической КЛ-модели с экспоненциальным распределением размера требований. Как известно (см., например, [12, ch. 1] и [11, с. 229–230]), для этой модели вероятность неразорения $\varphi_1(u)$ (как решение ИДУ (1.35)) выражается точной формулой:

$$\varphi_1(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c}\exp\left(-\frac{c-\lambda m}{mc}u\right), \quad 0 \le u < \infty. \tag{1.37}$$

Нетрудно заметить, что эта функция есть решение задачи (1.35), (1.36), или эквивалентной параметризованной задачи для ОДУ второго порядка:

$$\varphi''(u) + [(c - m\lambda)/(mc)]\varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{1.38}$$

$$\varphi(0) = C_0, \quad \varphi'(0) = \lambda C_0/c, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \tag{1.39}$$

что влечет $C_0 = (c - m\lambda)/c$, $0 < C_0 < 1$ (см. также обсуждение этого случая в [9]).

Замечание 3. Для задач (1.35), (1.36) и (1.38), (1.39) величина $c = \lambda m$ является критическим значением параметра бифуркации: при $c \le \lambda m$ эти задачи решений не имеют (для вероятности неразорения в классической КЛ-модели известно, что при $c \le \lambda m$ будет $\varphi(u) \equiv 0$ (см., например, [12]), что отвечает тривиальному решению ИДУ (1.35) (ОДУ (1.38)), а условие нормировки на бесконечности относится только к нетривиальным решениям). Для соответствующей модели с инвестициями (модели I), как следует из приведенных выше результатов из [8], [9], неравенство $\varphi(u) > 0$ на $\mathbb{R}_+$ выполняется даже при неположительной величине показателя рискованности, т.е. при $i_{r,\mathrm{I}} \le 0$, где $i_{r,\mathrm{I}}$ определено в (1.29).

1.3.2. Точное решение для КЛ-модели со стохастическими премиями

При $a = b = 0$ ИДУ (1.8) вырождается в интегральное уравнение (ИУ):

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda(J_m\varphi)(u) + \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(u), \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{1.40}$$

Это ИУ было получено и исследовано в [3] (ИДУ (1.8) в [3] не изучалось). Показано, что при положительной нагрузке безопасности (1.2), т.е. при выполнении неравенства

$$\lambda_1 n - \lambda m > 0, \tag{1.41}$$

вероятность неразорения $\varphi_2(u)$ (как положительное на $\mathbb{R}_+$ решение ИУ (1.40), не превосходящее единицы) выражается точной формулой (см. также [2, разд. 9.5]):

$$\varphi_2(u) = 1 - \frac{\lambda(n+m)}{n(\lambda+\lambda_1)}\exp\left(-\frac{\lambda_1 n - \lambda m}{mn(\lambda+\lambda_1)}u\right), \quad 0 \le u < \infty. \tag{1.42}$$

Решение (1.42) будет также следует из результатов данной работы.

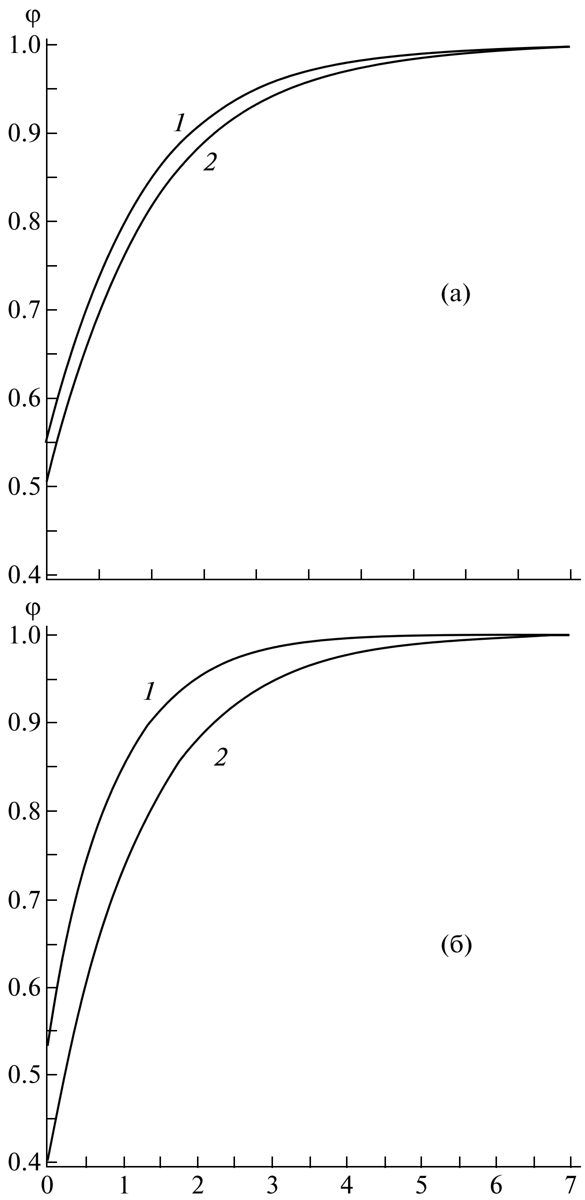
1.3.3. Сравнение точных решений для КЛ-моделей

Сравнивая формулы (1.37) и (1.42), нетрудно заметить, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть параметры* λ, m, c, λ_1, n *– фиксированные положительные числа, и пусть выполняются соотношения*

$$c = \lambda_1 n > \lambda m, \tag{1.43}$$

что, в частности, для нагрузок безопасности (1.2), (1.12) *влечет* $\rho_1 = \rho_2 > 0$.



Фиг. 1.

Тогда справедливо неравенство

$$\varphi_2(u) < \varphi_1(u) \quad \text{для любого конечного} \quad u \geq 0. \tag{1.44}$$

Кроме того, если при фиксированном $c > 0$ *будет* $n \longrightarrow 0$, $\lambda_1 = c/n \longrightarrow \infty$ (*или* $n \longrightarrow \infty$, $\lambda_1 = c/n \longrightarrow 0$), *то* $\varphi_2(u) \longrightarrow \varphi_1(u)$ (*соответственно* $\varphi_2(u) \longrightarrow 0$) *для любого* $u \in \mathbb{R}_+$.

Это утверждение проиллюстрировано на фиг. 1, где цифрой *1* помечены графики решений (1.37), а цифрой *2* – графики решений (1.42)). Для всех случаев зафиксированы значения $\lambda = 0.09$, $m = 0.5$ и $c = 0.1$. Для остальных параметров и полученных величин справедливо: 1) для фиг. 1а: $\lambda_1 = 1.0$, $n = 0.1$; $\varphi_1(0) = 0.55$, $\varphi_1'(0) = 0.495$, $\varphi_2(0) \approx 0.50459$, $\varphi_2'(0) \approx 0.49996$; максимум разности $\varphi_1(u) - \varphi_2(u)$ достигается в точке $u = 0$ и примерно равен 0.045413; 2) для фиг. 1б: $\lambda_1 = 0.25$, $n = 0.4$; $\varphi_1(0)$ и $\varphi_1'(0)$ те же, что для фиг. 1а, $\varphi_2(0) \approx 0.404412$, $\varphi_2'(0) \approx 0.481726$; максимум величины $\varphi_1(u) - \varphi_2(u)$ достигается в точке $u \approx 0.09$ и примерно равен 0.146189.

Отметим еще раз, что основной целью данной работы является постановка и исследование сингулярной задачи для ИДУ (1.8), отвечающей модели II. При этом следует ожидать, что результаты расчетов по моделям I и II будут сближаться при выполнении равенства (1.34) (ожидаемые размеры премий в единицу времени равны) и неравенств: $\lambda_1 \gg \lambda$ (страховые взносы осуществляются гораздо чаще, чем происходят страховые выплаты) и $m \gg n$ (размеры выплат существенно больше, чем размеры взносов). При этом отметим, что при рассмотрении моделей I и II положительность нагрузок безопасности (1.12), (1.12) в соответствующих КЛ-моделях предполагаться, вообще говоря, не будет.

Предварительно сделаем два замечания о сопутствующих задачах и проблемах, которые представляют самостоятельный интерес в теории риска, но которые в данной работе не рассматриваются: 1) проблемы оптимального управления инвестициями – для модели I обзор результатов по этой теме см., например, в [4], дополнительные результаты см. в [8]; для модели II см. в этом направлении [13]; 2) “вырожденные” задачи для модели II, когда в ИДУ (1.8) один или несколько параметров принимают нулевые значения (за исключением случая полного отсутствия инвестиций, указанного выше в п. 3.2); для модели I вырожденные задачи подробно изучены в [10]; особо отметим, что если $c = 0$ в ИДУ (1.13), а $\lambda_1 = 0$ в ИДУ (1.8), то обе модели совпадают (этот случай, коротко описанный в [10], отвечает уже не страхованию, а модели “благотворительного фонда”; более детальное изучение этого случая и сравнение вырожденных случаев для моделей I и II предполагается осуществить в дальнейшем).

2. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Рассматривается определенное на неотрицательной вещественной полуоси линейное ИДУ второго порядка (1.8), т.е. ИДУ

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Здесь, если не оговорено особо, a, b^2, λ, λ_1, m, n – действительные положительные числа, J_m и $J_{1,n}$ – вольтерров и невольтерров интегральные операторы, определенные в (1.9) и (1.10) соответственно.

Требуется найти неотрицательное неубывающее на $\mathbb{R}_+$ решение ИДУ (2.1), удовлетворяющее условиям

$$\left|\lim_{u \to +0}\varphi(u)\right| < \infty, \quad \lim_{u \to +0}[u\varphi'(u)] = 0, \tag{2.2}$$

$$(\lambda + \lambda_1)\lim_{u \to +0}\varphi(u) = \lambda_1(J_{1,n}\varphi)(0) = \frac{\lambda_1}{n}\int_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)dy, \tag{2.3}$$

$$0 \le \varphi(u) \le 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.4}$$

$$\lim_{u \to +\infty}\varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \to +\infty}\varphi'(u) = 0. \tag{2.5}$$

ИДУ (2.1) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, удовлетворяющее условиям (2.2)–(2.4). Нетривиальное решение выделяется требованием (2.5).

Предельные условия (2.2) и нелокальное соотношение (2.3) влекут за собой выполнение условия $\lim_{u \to +0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.1) при $u \longrightarrow +0$ (решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи (2.1)–(2.5), если таковое существует, должно удовлетворять ИДУ (2.1) вплоть до особой точки $u = 0$). Заметим, что к нелокальному условию (2.3) приводит наличие невольтеррового оператора (1.10).

Для дальнейшего предельные условия (2.2) перепишем в эквивалентном параметризованном виде:

$$\lim_{u \to +0}\varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \to 0+}[u\varphi'(u)] = 0, \tag{2.6}$$

где C_0 – параметр, значение которого подлежит определению, причем для искомого решения задачи (2.1)–(2.5) должно быть $0 \le C_0 \le 1$.

2.2. Единственность решения и его двусторонние оценки

Некоторые утверждения для решения рассматриваемой задачи могут быть получены априори.

Лемма 1. *Пусть в* (2.1) *будет*: b^2, λ, λ_1, m, n *— действительные положительные числа, а число* a *любого знака* ($a \in \mathbb{R}$), *и пусть при фиксированных значениях этих параметров существует решение* $\varphi(u)$ *сингулярной линейной КрЗ с ограничениями* (2.1)–(2.5). *Тогда такое решение единственно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\tilde{\varphi}(u)$ – другое решение задачи (2.1)–(2.5). Тогда возможны два варианта: вариант I, когда

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) = \lim_{u \to +0} \tilde{\varphi}(u), \tag{2.7}$$

и вариант II, когда

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) \neq \lim_{u \to +0} \tilde{\varphi}(u). \tag{2.8}$$

Рассмотрим случай выполнения (2.7). Тогда, в силу линейности задачи, должно существовать нетривиальное решение $\hat{\varphi}(u)$ ИДУ (2.1) такое, что

$$\lim_{u \to +0} \hat{\varphi}(u) = \lim_{u \to \infty} \hat{\varphi}(u) = 0.$$

Пусть $0 < \hat{u}$ – точка максимума этого решения: $\hat{\varphi}(\hat{u}) = \max_{u \in (0,\infty)} \hat{\varphi}(u) > 0$ (если $\hat{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на $\mathbb{R}_+$, то рассмотрим $-\hat{\varphi}(u)$). Тогда должно быть $\hat{\varphi}'(\hat{u}) = 0$, $\hat{\varphi}''(\hat{u}) \le 0$. Но из (2.1) получаем противоречие:

$$(b^2/2)\hat{u}^2\hat{\varphi}''(\hat{u}) = \lambda[\hat{\varphi}(\hat{u}) - (J_m\hat{\varphi})(\hat{u})] + \lambda_1[\hat{\varphi}(\hat{u}) - (J_{1,n}\hat{\varphi})(\hat{u})] \ge \lambda\hat{\varphi}(\hat{u})\exp(-\hat{u}/m) > 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим случай выполнения (2.8). Тогда, как нетрудно проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\hat{\varphi}(u) = c_1\varphi(u) + c_2\tilde{\varphi}(u)$, что $\hat{\varphi}(u) \not\equiv 1$ и является решением ИДУ (2.1), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u \to +0} \hat{\varphi}(u) = \lim_{u \to \infty} \hat{\varphi}(u) = 1.$$

Если существует $u \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\hat{\varphi}(u) > 1$, то рассуждаем так же, как для варианта I. Если предположить, что $\hat{\varphi}(u) \le 1$ $\forall u > 0$, то получим неравенство

$$(J_{1,n}\hat{\varphi})(0) = \frac{1}{n}\int_0^\infty \hat{\varphi}(y)\exp(-y/n)dy < 1.$$

Отсюда, учитывая предельное равенство $\lim_{u \to +0}\hat{\varphi}(u) = 1$, получаем противоречие: условие (2.3) не выполняется.

Лемма 2. *Пусть в* (2.1) *будет*: b^2, λ, λ_1, m, n *— действительные положительные числа, а число* a *любого знака* ($a \in \mathbb{R}$), *и пусть при фиксированных значениях этих параметров существует решение* $\varphi(u)$ *сингулярной линейной КрЗ* (*без ограничений*) (2.1)–(2.3), (2.5). *Тогдя для такого решения выполняются ограничения* (2.4).

Доказательство. 1) Докажем выполнение ограничения $\varphi(u) < 1$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$. Для этого сначала покажем, что при $u \longrightarrow +0$ функция $\varphi(u)$ не может принимать наибольшее положительное значение. Предположим противное: $\varphi(u) \le C_0$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$, где $\lim_{u \to +0}\varphi(u) = C_0 > 0$. Но из (2.3) получаем противоречие: $(\lambda + \lambda_1)C_0 \le \lambda_1 C_0$, откуда вытекает $C_0 \le 0$.

Пусть теперь в какой-то конечной точке $u > 0$ будет $\varphi(u) \ge 1$. Тогда функция $\varphi(u)$ должна иметь максимум на $\mathbb{R}_+$, превосходящий 1. Но, совершенно аналогично доказательству неравенства (2.9) в лемме 1, в точке максимума получим противоречие.

2) Аналогично доказывается, что $\varphi(u)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $u \longrightarrow +0$ и не может иметь отрицательный минимум на $\mathbb{R}_+$.

Замечание 4. Нелокальное условие (2.3) в [1], [14] не зафиксировано. Это связано с тем, что вся задача (2.1)–(2.5) в целом ранее вообще не ставилась и не изучалась, и, как следствие, леммы 1 и 2 приводятся впервые.

2.3. Предварительные замечания

По соображениям, которые будут ясны из дальнейшего, будем различать два случая

$$\textbf{Случай I}: \quad 0 < a < \lambda + \lambda_1; \tag{2.10}$$

$$\textbf{Случай II}: \quad a \ge \lambda + \lambda_1 > 0. \tag{2.11}$$

Как будет показано в разд. 3, для случая I предельные условия (2.2) эквивалентны условиям

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) \quad \text{и} \quad \lim_{u \to +0} \varphi'(u), \quad \text{существуют и конечны.} \tag{2.12}$$

Эти условия перепишем в эквивалентном параметризованном виде:

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \to +0} \varphi'(u) = D_1, \tag{2.13}$$

где C_0, D_1 – параметры, значения которых подлежат определению, причем для искомого решения задачи (2.1)–(2.5) в случае I (т.е. при выполнении (2.10)) должно быть

$$0 \le C_0 \le 1, \quad D_1 \ge 0.$$

Для случая II (т.е. при выполнении (2.11)) следует учитывать более общие предельные граничные условия (2.2), которые позволяют производным от решений ИДУ (2.1) быть неограниченными при $u \longrightarrow +0$, причем важно, что первая производная может иметь только интегрируемую в нуле особенность.

Отметим, что при рассматриваемой экономической интерпретации изучаемой модели (как модели страхования с инвестициями) более естественным является случай I.

Замечание 5. Нетрудно проверить, что при $a = b = 0$ и выполнении неравенства (1.41) (положительность нагрузки безопасности) точное решение ИУ (1.40), имеющее вид (1.42), удовлетворяет всем требованиям (2.2)–(2.5), где в (2.13) будет

$$C_0 = 1 - \lambda(n+m)/[n(\lambda+\lambda_1)], \quad D_1 = \lambda(n+m)(\lambda_1 n - \lambda m)/[mn^2(\lambda+\lambda_1)^2],$$

причем в силу (1.41) справедливо $0 < C_0 < 1$, $D_1 > 0$.

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СОПУТСТВУЮЩИМ СИНГУЛЯРНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОДУ

3.1. Сведение ИДУ к ОДУ четвертого порядка, определенному на полуоси

Для дальнейших исследований, следуя [1], [14], сведем ИДУ (2.1) к ОДУ, используя дополнительное дифференцирование и учитывая равенства

$$(J_m\varphi)'(u) = [\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m, \quad (J_{1,n}\varphi)'(u) = [(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n, \tag{3.1}$$

которые следуют из (1.9), (1.10):

$$(J_m\varphi)'(u) = \left(\frac{1}{m}\exp(-u/m)\int_0^u \varphi(s)\exp(s/m)ds\right)' = -(J_m\varphi)(u)/m + \varphi(u)/m;$$

$$(J_{1,n}\varphi)'(u) = \left(\frac{1}{n}\exp(u/n)\int_u^\infty \varphi(s)\exp(-s/m)ds\right)' = (J_{1,n}\varphi)(u)/n - \varphi(u)/n.$$

Дифференцируя ИДУ (2.1) последовательно два раза и учитывая (3.1), получаем

$$\begin{gathered}(b^2/2)u^2\varphi'''(u) + (b^2 + a)u\varphi''(u) + (a - \lambda - \lambda_1)\varphi'(u) + \\ + \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m + \lambda_1[(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n = 0, \quad 0 < u < \infty,\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}(b^2/2)u^2\varphi''''(u) + (2b^2 + a)u\varphi'''(u) + (b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1)\varphi''(u) + (\lambda/m - \lambda_1/n)\varphi'(u) - \\ - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)]/m^2 - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)]/n^2 = 0, \quad 0 < u < \infty.\end{gathered} \tag{3.3}$$

С целью убрать интегральные слагаемые, прибавим к ИДУ (3.2) исходное ИДУ (2.1), умноженное на $-1/(mn)$, и ИДУ (3.3), умноженное на $(n-m)/(mn)$. Получим линейное ОДУ четвертого порядка вида

$$u^2\varphi''''(u) + (a_1 + a_2u)u\varphi'''(u) + (a_3 + a_4u + a_5u^2)\varphi''(u) + (a_6 + a_7u)\varphi'(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} a_1 = 2(2 + a/b^2), \quad a_2 = (n-m)/(mn), \quad a_3 = 2[1 + (2a - \lambda - \lambda_1)/b^2], \\ a_4 = 2(1 + a/b^2)(n-m)/(mn), \quad a_5 = -1/(mn), \\ a_6 = 2[a(n-m) + \lambda m - \lambda_1 n]/(b^2mn), \quad a_7 = -2a/(b^2mn). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Из требования вырождения ОДУ (3.4) при $u \longrightarrow +0$ получаем:

1) для случая I, учитывая условия (2.12), – выполнение соотношений

$$\lim_{u\to+0}[a_3\varphi''(u) + a_6\varphi'(u)] = 0, \quad \lim_{u\to+0}[u\varphi'''(u)] = 0, \tag{3.6}$$

что влечет за собой, в частности, конечность величины $\lim_{u\to+0}\varphi''(u)$ и предельное соотношение

$$\lim_{u\to+0}[mn(b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1)\varphi''(u) + (a(n-m) + \lambda m - \lambda_1 n)\varphi'(u)] = 0; \tag{3.7}$$

2) для случая II, учитывая более общие условия (2.2), – выполнение соотношений

$$\lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = \lim_{u\to+0}[u^3\varphi'''(u)] = 0. \tag{3.8}$$

3.2. Постановка сингулярных КрЗ для ОДУ, необходимые и достаточные условия эквивалентности этих задач исходной задаче для ИДУ

Понизим порядок ОДУ (3.4), полагая $\varphi'(u) = \psi(u)$, и запишем полученное для $\psi(u)$ линейное ОДУ третьего порядка с регулярной особенностью в нуле в каноническом виде:

$$u^3\psi'''(u) + (a_1 + a_2u)u^2\psi''(u) + (a_3 + a_4u + a_5u^2)u\psi'(u) + (a_6u + a_7u^2)\psi(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.9}$$

ОДУ (3.9) обладает регулярной (слабой) особенностью при $u \longrightarrow +0$ и иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1 при $u \longrightarrow \infty$ (по поводу классификации особых точек типа полюса для систем линейных ОДУ см., например, [15]–[19], дополняющие друг друга).

3.2.1. Случай I

При выполнении требования (2.10), учитывая условия (3.6), (2.5) и вид ОДУ (3.9), получаем предельные граничные условия в особых граничных точках в виде

$$\left|\lim_{u\to+0}\psi(u)\right| < \infty, \quad \lim_{u\to+0}p[u\psi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\psi''(u)] = 0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi'(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi''(u) = 0. \tag{3.11}$$

Сингулярная КрЗ (3.9)–(3.11) всегда имеет тривиальное решение $\psi \equiv 0$. Нас будет интересовать существование нетривиального решения этой задачи, выделяемого условиями нормировки (см. далее лемму 3 и следствие 1).

Условия (3.10), отвечающие наиболее общей постановке предельных условий в регулярной особой точке, перепишем в эквивалентном параметризованном виде:

$$\lim_{u\to+0}\psi(u) = D_1, \quad \lim_{u\to+0}[u\psi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\psi''(u)] = 0. \tag{3.12}$$

Здесь D_1 – параметр, значение которого подлежит определению, причем для искомого решения должно быть $D_1 \geq 0$.

Замечание 6. Учитывая соотношения (3.6), можно было бы предельные условия (3.12) заменить более сильными требованиями

$$\lim_{u \to +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \to +0} \psi'(u) = -D_1 a_6/a_3, \quad \lim_{u \to +0} [u\psi''(u)] = 0. \tag{3.13}$$

Однако достаточно выполнения более слабых условий (3.12), а условия (3.13) будут выполняться автоматически.

Далее, заметим, что всякое решение ИДУ (2.1) должно удовлетворять ОДУ (3.4). Обратное неверно: ОДУ (3.4) имеет континуум решений $\varphi(u) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, которые не являются решениями (2.1). Справедлива

Лемма 3. *Пусть относительно параметров* b^2, λ, λ_1, m, n, *а выполнены предположения леммы* 1, *и пусть* $\psi(u)$ *— нетривиальное решение сингулярной линейной КрЗ* (3.9)–(3.11), *причем такое, что*

$$\int_0^{\infty} |\psi(s)| ds < \infty.$$

Тогда для функции $\varphi(u)$, *определенной равенством*

$$\varphi(u) = C_0 + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0, \tag{3.14}$$

где C_0 *— параметр, справедливо следующее утверждение: функция* $\varphi(u)$ *тогда и только тогда является решением ИДУ* (2.1), *когда выполняется условие* (2.3) *или, что эквивалентно, для* C_0 *справедливо равенство*

$$C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda} \int_0^{\infty} \psi(y) \exp(-y/n) dy. \tag{3.15}$$

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, а равенство (3.15) следует из (2.3) с учетом соотношения

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^y \psi(s) ds \right) \exp(-y/n) dy = \int_0^{\infty} \psi(y) \exp(-y/n) dy.$$

Пусть теперь $\psi(u)$ – решение КрЗ (3.9)–(3.11), $\psi \in L_1(0, \infty)$. Пусть $\varphi(u)$ определена по формулам (3.14), (3.15). Тогда $\varphi(u)$ удовлетворяет ОДУ (3.4), условию (2.3) и предельным граничным условиям

$$\left| \lim_{u \to +0} \varphi(u) \right| < \infty, \quad \left| \lim_{u \to +0} \varphi'(u) \right| < \infty, \quad \lim_{u \to +0} [u\varphi''(u)] = \lim_{u \to +0} [u^2 \varphi'''(u)] = 0, \tag{3.16}$$

$$\left| \lim_{u \to \infty} \varphi(u) \right| < \infty, \quad \lim_{u \to \infty} \varphi'(u) = \lim_{u \to \infty} \varphi''(u) = \lim_{u \to \infty} \varphi'''(u) = 0. \tag{3.17}$$

Обозначим левую часть (2.1) с этой функцией $\varphi(u)$ через $g(u)$ и покажем, что $g(u) \equiv 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (3.4), запишем его в виде

$$g''(u) + \frac{(n-m)}{mn} g'(u) - \frac{1}{mn} g(u) = 0, \quad 0 < u < \infty. \tag{3.18}$$

Общее решение ОДУ (3.18) имеет вид

$$g(u) = c_1 \exp(-u/m) + c_2 \exp(u/n), \quad u \geq 0, \tag{3.19}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Учитывая определение $g(u)$ и предельные условия (3.17), получаем $\lim_{u \to \infty} [g(u)/u^2] = 0$, что в (3.19) влечет $c_2 = 0$. Наконец, учитывая условия (3.16) и (2.3), получаем, что $g(0) = 0$, что в (3.19) влечет за собой $c_1 = 0$.

Замечая, что решение $\psi(u)$ КрЗ (3.9)–(3.11) определено с точностью до нормирующего множителя, и учитывая условие (2.5), окончательно получаем

Следствие 1. В предположениях леммы 3 функция $\varphi(u)$, определенная в (3.14), тогда и только тогда является решением задачи (2.1)–(2.3), (2.5), когда выполняются условие (3.15) и условие

$$C_0 + \int_0^\infty \psi(s)ds = 1,$$

что приводит к условию нормировки для $\psi(u)$

$$\int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda)\exp(-s/n)]\psi(s)ds = 1. \tag{3.20}$$

Замечание 7. При $a = b = 0$ из (2.1)–(2.3), (2.5) получим вырожденную задачу для ИУ (1.40), которая эквивалентна КрЗ на полуоси для ОДУ второго порядка с нелокальным условием в нуле:

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda m - \lambda_1 n}{mn(\lambda + \lambda_1)}\varphi'(u), \quad (\lambda + \lambda_1)\varphi(0) = \frac{\lambda_1}{n}\int_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)dy, \quad \lim_{u \to \infty}\varphi(u) = 1.$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условия (1.41) эта задача имеет единственное решение и оно выражается точной формулой (1.42), причем ограничения (2.4) выполняются для него "автоматически".

3.2.2. Случай II

При выполнении, требования (2.11) из (3.8) получаем для $\psi(u)$ более общие предельные граничные условия при $u \longrightarrow +0$:

$$\lim_{u \to +0}[u\psi(u)] = \lim_{u \to +0}[u^2\psi'(u)] = \lim_{u \to +0}[u^3\psi''(u)] = 0. \tag{3.21}$$

Нетрудно проверить, что для решения $\psi(u)$ КрЗ (3.9), (3.21), (3.11) справедливы утверждения, леммы 3 и следствия 1, где в доказательстве леммы 3 условия (3.16) надо заменить условиями

$$\left|\lim_{u \to +0}\varphi(u)\right| < \infty, \quad \lim_{u \to +0}[u\varphi'(u)] = \lim_{u \to +0}[u^2\varphi''(u)] = \lim_{u \to +0}[u^3\varphi'''(u)] = 0. \tag{3.22}$$

В результате будем изучать линейные сингулярные КрЗ (3.9)–(3.11) и (3.9), (3.21), (3.11) с условием нормировки решения (3.20).

Прежде всего следует изучить особые точки ОДУ (3.9) и свести сингулярные КрЗ к эквивалентным КрЗ на конечном интервале без особенностей. Для переноса предельных граничных условий из особых точек будем использовать результаты теории устойчивых начальных многообразий решений, или многообразий условной устойчивости по Ляпунову (см., например, [20]–[23]), учитывая при этом понятие допустимых граничных условий в особых точках типа полюса (см., например, [24], [25]).

4. АНАЛИЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК ОДУ И СВЕДЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К РЕГУЛЯРНЫМ

4.1. Перенос граничных условий из регулярной особой точки $u = 0$

Прежде всего рассмотрим вопрос о том, почему следует различать два случая (2.10) и (2.11). Для этого рассмотрим ОДУ (3.9). Это ОДУ обладает регулярной (слабой) особенностью при $u = 0$. Полагая, как обычно, $\psi(u) = u^{\mu}[1 + o(1)]$, $\psi'(u) = \mu u^{\mu - 1}[1 + o(1)]$, $\psi''(u) = \mu(\mu - 1)u^{\mu - 2}[1 + o(1)]$, $\psi'''(u) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)u^{\mu - 3}[1 + o(1)]$, $u \longrightarrow +0$, получаем для показателя μ характеристическое уравнение

$$\mu(\mu - 1)(\mu - 2) + a_1\mu(\mu - 1) + a_3\mu = 0,$$

откуда вытекает $\mu_1 = 0$, а μ_2 и μ_3 удовлетворяют уравнению

$$\mu^2 - \mu(3 - a_1) + 2 + a_3 - a_1 = 0.$$

Отсюда, учитывая обозначения (3.5), получаем

$$\begin{gathered}\mu_2+\mu_3 = -1-2a/b^2<0,\\ \mu_2\mu_3 = 2(a-\lambda-\lambda_1)/b^2<0\ (\geq 0)\quad \text{при}\quad a<\lambda+\lambda_1\quad (\text{при}\ a\geq\lambda+\lambda_1);\\ \mu_2 = -\frac{1}{2}-\frac{a}{b^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{b^2}\right)^2+\frac{2(\lambda+\lambda_1-a)}{b^2}},\end{gathered}\tag{4.1}$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2}-\frac{a}{b^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{b^2}\right)^2+\frac{2(\lambda+\lambda_1-a)}{b^2}};\tag{4.2}$$

последние формулы также удобно записать в виде

$$\mu_2+1 = 1/2-a/b^2+\sqrt{(1/2-a/b^2)^2+2(\lambda+\lambda_1)/b^2},$$

$$\mu_3+1 = 1/2-a/b^2+\sqrt{(1/2-a/b^2)^2+2(\lambda+\lambda_1)/b^2}.$$

Тогда поведение решений ОДУ (3.9) в окрестности особой точки $u = 0$ зависит от выполнения условий (2.10) или (2.11):

1) при выполнении неравенств (2.10) для характеристических показателей μ_j ($j = 1, 2, 3$) справедливы соотношения

$$\mu_1 = 0,\quad \mu_2>0,\quad \mu_3<-1,\tag{4.3}$$

причем при выполнении условия

$$\lambda+\lambda_1>b^2+2a\tag{4.4}$$

будет

$$\mu_2>1,\tag{4.5}$$

а при выполнении неравенств

$$0<a<\lambda+\lambda_1\leq b^2+2a\tag{4.6}$$

имеем

$$0<\mu_2\leq 1,\tag{4.7}$$

где равенство единицы достигается при выполнении равенства в (4.6);

2) при выполнении ограничений (2.11) получаем:

$$\mu_1 = 0,\quad -1<\mu_2\leq 0,\quad \mu_3<-1,\tag{4.8}$$

где равенство нулю для μ_2 достигается при выполнении равенства в (2.11), т.е. при

$$a = \lambda+\lambda_1,\tag{4.9}$$

когда характеристический показатель $\mu_2 = 0$ отвечает неограниченному в нуле решению ОДУ (3.9), ведущему себя по порядку как $O(\ln(u))$ при $u \longrightarrow +0$.

Отсюда видно, что равенство (4.9) определяет критическое значение параметра бифуркации a: при выполнении (2.10) ОДУ (3.9) обладает двухпараметрическим семейством ограниченных в нуле решений, а при выполнении (2.11) – однопараметрическим. В случае выполнения (2.11) необходимое двухпараметрическое семейство решений выделяется другими допустимыми предельными условиями (3.21).

Замечание 8. В [1] и [3] анализ поведения решений ОДУ (3.9) при $u \longrightarrow +0$ вообще не проводился; случай $a>\lambda+\lambda_1$ частично рассматривался в [14], о чем дополнительно будет указано далее.

4.1.1. Случай I: сингулярная задача без начальных данных (3.9), (3.10) и ее двухпараметрическое семейство решений

При выполнении (2.10) рассмотрим ОДУ (3.9) с условиями (3.10). В силу (4.3) эта сингулярная задача без начальных данных (3.9), (3.10) обладает двухпараметрическим семейством решений, значения которых порождают в фазовом пространстве ОДУ (3.9) двумерное линейное подпространство, зависящее от u как от параметра. Такое подпространство задается в виде одного линейного соотношения в $\mathbb{R}^3$:

$$\Theta(u)z(u) = 0, \quad u > 0, \tag{4.10}$$

где $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{т}}$ (индекс $^{\mathrm{т}}$ вверху здесь и далее означает транспонирование),

$$z_1(u) = \psi(u), \quad z_2(u) = u\psi'(u), \quad z_3(u) = u^2\psi''(u), \tag{4.11}$$

$$\Theta(u) = \Theta_0 + O(u), \quad u \longrightarrow +0. \tag{4.12}$$

Для определения элементов главной вектор-строки Θ_0 перейдем от ОДУ (3.9) к системе ОДУ первого порядка в переменных (4.11):

$$uz'(u) = [A_0 + A_1u + A_2u^2]z(u), \quad u > 0.$$

Здесь (3×3)-матрицы A_j $(j = 0, 1, 2)$ представимы в виде

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a_3 & 2 - a_1 \end{pmatrix},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_6 & -a_4 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_7 & -a_5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

где главная матрица A_0 имеет собственные значения (СЗ) μ_k $(k = 1, 2, 3)$: $\mu_1 = 0$, а $\mu_{2,\,3}$ определены в (4.1), (4.2). Тогда, согласно [20], Θ_0 есть левый собственный вектор (СВ) матрицы A_0, отвечающий СЗ $\mu_3 < -1$, (с точностью до неособенного преобразования) получаем

$$\Theta_0 = (0, 1 - \mu_2, 1). \tag{4.14}$$

В результате из (4.10)–(4.12), (4.14) в первом приближении получаем соотношение (4.10) при малых и в виде

$$u^2\psi''(u) + (1 - \mu_2)u\psi'(u) \approx 0, \quad u \sim 0. \tag{4.15}$$

Окончательный вид соотношения (4.10) описывает

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (2.10). *Тогда предельные граничные условия* (3.10) *для решений ОДУ* (3.9) *для достаточно малых и эквивалентны линейному соотношению*

$$u^2\psi''(u) = \alpha(u)u\psi'(u) + \beta(u)\psi(u), \quad 0 < u \le u_0, \tag{4.16}$$

где пара функций $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ *составляет решение сингулярной нелинейной ЗК*

$$u\alpha' = (1 - a_1 - a_2u)\alpha - \alpha^2 - \beta - (a_3 + a_4u + a_5u^2), \quad u > 0, \tag{4.17}$$

$$u\beta' = (2 - a_1 - a_2u)\beta - \alpha\beta - (a_6u + a_7u^2), \quad u > 0, \tag{4.18}$$

$$\lim_{u \to +0} \alpha(u) = \alpha_0 = \mu_2 - 1, \quad \lim_{u \to +0} \beta(u) = 0. \tag{4.19}$$

Решение $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ *сингулярной ЗК* ((4.17)–(4.19) *для достаточно малых и существует, единственно и является голоморфной функцией в точке* $u = 0$:

$$\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k, \quad \beta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k, \quad |u| \le u_0, \quad u_0 > 0, \tag{4.20}$$

где α_0 *определено в* (4.19), *а коэффициенты* α_k, β_k *при* $k > 1$ *определяются из* (4.17), (4.18) *формальной подстановкой разложений* (4.20), *что приводит к рекуррентным формулам*

$$\beta_1 = -\frac{a_6}{\alpha_0 + a_1 - 1}, \quad \alpha_1 = -\frac{\beta_1 + a_2\alpha_0 + a_4}{2\alpha_0 + a_1}; \tag{4.21}$$

$$\beta_2 = -\frac{a_7 + a_2\beta_1 + \alpha_1\beta_1}{\alpha_0 + a_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{\beta_2 + \alpha_1^2 + a_2\alpha_1 + a_5}{2\alpha_0 + a_1 + 1}; \tag{4.22}$$

$$\beta_k = -\frac{a_2\beta_{k-1} + \Sigma_{l=1}^{k-1}\alpha_l\beta_{k-l}}{\alpha_0 + a_1 + k - 2}, \quad \alpha_k = -\frac{\beta_k + \Sigma_{l=1}^{k-1}\alpha_l\alpha_{k-l}}{2\alpha_0 + a_1 + k - 1}, \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{4.23}$$

Доказательство. Дифференцируем соотношение (4.16) и используем ОДУ (3.9) и снова соотношение (4.16). Собирая слагаемые при $u\psi'(u)$ и $\psi(u)$, получаем ОДУ (4.17), (4.18). Предельные граничные условия (4.19) следуют из соотношения (4.15), отвечая также выполнению ОДУ (4.17), (4.18) вплоть до особой точки $u = 0$.

Матрица Якоби $Q(\alpha, \beta, u)$ правой части системы (4.17), (4.18), взятая в точке $\{\alpha, \beta, u\} = \{\alpha_0, 0, 0\}$, имеет вид

$$Q(\alpha_0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - a_1 - 2\alpha_0 & -1 \\ 0 & 2 - a_1 - \alpha_0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

где для СЗ матрицы (4.24) справедливы соотношения

$$1 - a_1 - 2\alpha_0 = -2\mu_2 - 1 - 2a/b^2 = \mu_3 - \mu_2 < 0, \quad 2 - a_1 - \alpha_0 = -1 - \mu_2 - 2a/b^2 = \mu_3 < -1. \tag{4.25}$$

Тогда все решения системы линейных ОДУ, полученной линеаризацией системы (4.17), (4.18) на функции $\{\alpha, \beta, u\} = \{\alpha_0, 0, 0\}$, не ограничены при $u \longrightarrow +0$. Применяя затем теорему 5 из [26], получаем утверждение леммы для нелинейной сингулярной ЗК (4.17)–(4.19).

Осталось доказать справедливость соотношения (4.16) для решений ОДУ (3.9), удовлетворяющих условиям (3.10). В самом деле, все решения ОДУ (4.16), где $\{\alpha, \beta\}$ – решение сингулярной ЗК (4.17)–(4.19), удовлетворяют условиям (3.10), так как характеристические показатели χ_j ($j = 1, 2$) ОДУ (4.16) получаются из уравнения $\chi(\chi - 1) = \chi\alpha_0$, откуда вытекает $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = \alpha_0 + 1 = \mu_2 > 0$.

С другой стороны, пусть $\psi(u)$ – решение ОДУ (3.9), удовлетворяющее условиям (3.10). Введем функцию

$$\eta(u) = u^2\psi''(u) - \alpha(u)u\psi'(u) - \beta(u)\psi(u), \quad u > 0, \tag{4.26}$$

где $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ – решение нелинейной сингулярной ЗК (4.17)–(4.19), описанное выше. Для $\eta(u)$ получим линейную сингулярную ЗК вида

$$u\eta'(u) = [2 - a_1 - a_2u - \alpha(u)]\eta(u), \quad u > 0, \quad \lim_{u \to +0}\eta(u) = 0. \tag{4.27}$$

В правой части ОДУ из (4.27) имеем в точке $u = 0$.

$$2 - a_1 - \alpha_0 = -1 - 2a/b^2 - \mu_2 = \mu_3 < -1.$$

Но тогда у сингулярной ЗК (4.27) нет других решений, кроме $\eta(u) \equiv 0$. Отсюда и из (4.26) получаем выполнение соотношения (4.16).

В результате перенос граничных условий (3.10) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u = u_0 > 0$ осуществляется с помощью соотношения (4.16): в точке $u = u_0$ имеем граничное условие

$$u_0^2\psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \quad (4.28)$$

где приближенные значения $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$ с заданной точностью можно находить с помощью разложений (4.20)–(4.23). При этом в силу формул (4.24), (4.25) в окрестности особой точки $u = 0$ условие (4.28) устойчиво переносится слева направо – в направлении от этой особой точки (подробнее см. изучение этих вопросов в [27] для достаточно общих систем линейных ОДУ с особенностями типа полюса в граничных точках).

Учитывая теперь результаты общей теории линейных ОДУ с регулярной (слабой) особой точкой (см., например, [16], [21], зафиксируем

Следствие 2. Пусть выполнены предположения леммы 4. Тогда для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, p_1, p_2)$ сингулярной задачи без начальных данных (3.9), (3.10) справедливы представления:

1) если $0 < \mu_2$ – нецелое число, то

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1[1 + \psi_1(u)] + p_2u^{\mu_2}[1 + \psi_2(u)], \quad \psi_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.29)$$

где p_1, p_2 – произвольные постоянные, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ – голоморфные в точке $u = 0$ функции;

2) если $0 < \mu_2$ – целое число, то

$$\begin{gathered}\psi(u, p_1, p_2) = p_1\{1 + \psi_1(u) + Au^{\mu_2}\ln(u)[1 + \psi_2(u)]\} + p_2u^{\mu_2}[1 + \psi_2(u)],\\ \psi_j(0) = 0, \quad j = 1, 2,\end{gathered} \quad (4.30)$$

где, как и в (4.29), $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ – голоморфные в нуле функции, а постоянная A зависит от параметров ОДУ (3.9).

Значения решений (4.29) (соответственно, (4.30)) порождают в фазовом пространстве системы (3.9) двумерное подпространство (плоскость в $\mathbb{R}^3$), зависящее от u как от параметра; оно задается в виде соотношения (4.16), где $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ описаны в лемме 4. Тогда разложения в нуле функций $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ в (4.29), (4.30) могут быть получены, в частности, из ОДУ (4.16) с учетом разложений (4.20)–(4.23).

Отметим следующий факт, известный в теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ: вся плоскость (4.16) как целое описывается с помощью аналитических функций, что удобно для ее задания в регулярной точке в качестве граничного условия, в то время как отдельные решения, ее порождающие, имеют более сложное поведение – содержат дробные, в том числе, возможно, иррациональные, степени u (см. (4.29)) и/или логарифмические функции от u (см. (4.30)).

Замечание 9. Если $0 < \mu_2$ – нецелое число, то для единственного (с точностью до множителя) голоморфного в нуле решения $\hat{\psi}_1(u) = 1 + \psi_1(u)$ ОДУ (3.9), входящего в формулу (4.29), справедливо разложение

$$\hat{\psi}_1(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_{k+1}u^k, \quad |u| \le u_0, \quad (4.31)$$

где постоянные коэффициенты D_k $(k \ge 1)$ определяются по рекуррентным формулам

$$D_2 = -a_6/a_3, \quad D_3 = -[D_2(a_4 + a_6) + a_7]/[2(a_1 + a_3)], \quad (4.32)$$

$$D_k = -\frac{D_{k-1}[a_2(k-2)(k-3) + a_4(k-2) + a_6] + D_{k-2}[a_5(k-3) + a_7]}{(k-1)[(k-2)(k-3) + a_1(k-2) + a_3]}, \quad k \ge 4. \quad (4.33)$$

Для (4.29) будем иметь в главном представление

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1\left[1 + \sum_{k=1}^{K} D_{k+1}u^k + O(u^{K+1})\right] + p_2u^{\mu_2}[1 + O(u)], \quad u \longrightarrow +0, \quad (4.34)$$

где $K = [\mu_2] + 1$, $[\mu_2]$ – целая часть числа μ_2.

Если $\mu_2 = K \geq 1$, где K – целое число, то из (4.30) получаем в главном

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1\left[1 + \sum_{k=1}^{K} D_{k+1}u^k + Au^K\ln(u)[1 + O(u)]\right] + p_2u^k[1 + O(u)], \quad u \longrightarrow +0. \tag{4.35}$$

Учитывая эти формулы, получаем

Следствие 3. Пусть выполнены предположения леммы 4 и соотношение (4.4). Тогда для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, p_1, p_2)$ сингулярной задачи без начальных данных (3.9), (3.10), определенного в следствии 2, существует конечный предел

$$\lim_{u \to +0} \psi'(u, p_1, p_2) = p_1 D_2, \tag{4.36}$$

где

$$D_2 = -a_6/a_3 = [a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m]/[mn(b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1)]. \tag{4.37}$$

Верно и обратное: пусть выполнены предположения следствия 2, и пусть для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, p_1, p_2)$ сингулярной задачи без начальных данных (3.9), (3.10), определенного в следствии 2, существует конечный предел (4.36), (4.37). Тогда либо выполняется соотношение (4.4), либо $p_2 = 0$ (или $p_1 = 0$) в (4.29) (соответственно в (4.30)); в противном случае $|\psi'(u, p_1, p_2)| \longrightarrow \infty$ при $u \longrightarrow +0$, оставаясь интегрируемой в нуле функцией.

Знак величины (4.37) (при положительном p_1) будет важен в расчетах (ср. (4.36) с предельным соотношением (3.7)).

4.1.2. Случай II

Пусть выполнено неравенство (2.11). Тогда для характеристических показателей ОДУ (3.9) справедливы неравенства (4.8), где $\mu_2 = 0$ при выполнении равенства (4.9), причем в этом случае кратному нулевому СЗ матрицы (4.13) отвечает жорданова клетка второго порядка.

Для дальнейших сопоставлений рассмотрим сначала вспомогательную здесь задачу (3.9), (3.10).

4.1.2.1. Вспомогательная сингулярная задача без начальных данных (3.9), (3.10) *и ее однопараметрическое семейство решений*

Учитывая характеристические показатели ОДУ (3.9) и снова применяя теорему 5 из [26], получаем, что справедлива

Лемма 5. *Пусть выполнено неравенство* (2.11). *Тогда при каждом фиксированном* D_1 ($D_1 \in \mathbb{R}$) *существует, и притом единственное, решение* $\psi(u, D_1)$ *сингулярной ЗК* (3.9), (3.12). *Это решение есть голоморфная в точке* $u = 0$ *функция*

$$\psi(u, D_1) = D_1\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_{k+1}u^k\right], \quad |u| \leq u_0, \quad u_0 > 0. \tag{4.38}$$

Здесь коэффициенты D_{k+1} ($k \geq 1$) *не зависят от* D_1 *и определяются прямой подстановкой* (4.38) *в ОДУ* (3.9), *т.е. по рекуррентным формулам* (4.32), (4.33).

Замечание 10. Разложение (4.38), (4.32), (4.33) было получено в (14) для случая $a > \lambda + \lambda_1$ с использованием результатов из [26]. Как было указано в замечании 9, это разложение справедливо и при $0 < a < \lambda + \lambda_1$ и нецелом $\mu_2 > 0$, оно определяет функцию $\psi_1(u)$ в (4.29) (см. формулы (4.31)–(4.33)). Заметим, что при выполнении условий леммы 5 знаменатели в формулах (4.32), (4.33) заведомо не обращаются в нуль, так как $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Для формул (4.32), (4.33) то же справедливо и при выполнении условий леммы 4, если $0 < \mu_2$ – нецелое число, на чем останавливаться подробнее не будем.

Однопараметрическое семейство решений (4.38) ОДУ (3.9) порождает в фазовом пространстве одномерное линейное подпространство, которое при малых $u > 0$ задается в виде двух соотношений

$$[\Theta_1 + \tilde{\Theta}_1(u)]z(u) = 0, \quad [\Theta_2 + \tilde{\Theta}_2(u)]z(u) = 0. \tag{4.39}$$

Здесь $|\tilde{\Theta}_j(u)| = O(u)$, $u \longrightarrow +0, j = 1, 2$; при $a > \lambda + \lambda_1$ будет: Θ_1 – левый СВ матрицы A_0, отвечающий СЗ $\mu_2 < 0$, а Θ_2 – левый СВ матрицы A_0, отвечающий СЗ $\mu_3 < -1$,

$$\Theta_1 = (0, 1 - \mu_3, 1), \quad \Theta_2 = (0, 1 - \mu_2, 1); \tag{4.40}$$

при $a = \lambda + \lambda_1$, когда $\mu_2 = 0$, будет: Θ_2 – тот же, что в (4.40) (при $\mu_2 = 0$), а Θ_1 – левый присоединенный вектор A_0, отвечающий нулевому СЗ, так что справедливо

$$\Theta_1 = (1 + 2a/b^2, 1, 0), \quad \Theta_2 = (0, 1, 1). \tag{4.41}$$

Не будем уточнять вид соотношений (4.39), так как в дальнейшем нам это не понадобится. Важно, что при выполнении условия (2.11) предельные граничные условия (3.10) для решений ОДУ (3.9) для достаточно малых $u > 0$ эквивалентны двум линейным соотношениям (4.39), откуда и из (4.40), (4.41) с учетом (4.11) приближенно имеем эти соотношения в следующем виде: при $a > \lambda + \lambda_1$ будет

$$u^2\psi''(u) + (1 - \mu_3)u\psi'(u) \approx 0, \quad u^2\psi''(u) + (1 - \mu_2)u\psi'(u) \approx 0, \quad u \sim +0; \tag{4.42}$$

при $a = \lambda + \lambda_1$ имеем

$$u\psi'(u) + (1 + 2a/b^2)\psi(u) \approx 0, \quad u^2\psi''(u) + u\psi'(u) \approx 0, \quad u \sim +0. \tag{4.43}$$

4.1.2.2. Основная сингулярная ЗК (3.9), (3.21) *и ее двухпараметрическое семейство решений*

Обратимся к основной здесь сингулярной ЗК, указанной в названии. Тогда нетрудно проследить, что остается справедливым утверждение леммы 4 с заменой условий (3.10) условиями (3.21) и предельного условия в нуле для решений ЗК (4.27) условием $\lim_{u \to +0}[u\eta(u)] = 0$.

Аналогом следствия 2 здесь является

Следствие 4. Пусть выполнено неравенство (2.11). Тогда для двухпараметрического семейства решений $\tilde{\psi}(u, p_1, p_2)$ сингулярной ЗК (3.9), (3.21) справедливы следующие утверждения:

1) если $-1 < \mu_2 < 0$, то справедливо представление (4.29), где p_1, p_2 – произвольные постоянные, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ – голоморфные в точке $u = 0$ функции; представление (4.29) выделяет семейство решений ОДУ (3.9), растущих при $u \longrightarrow +0$ не быстрее чем $O(u^{\mu_2})$;

2) если $\mu_2 = 0$, то справедливо представление

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1\{1 + \psi_1(u) + A\ln(u)[1 + \psi_2(u)]\} + p_2[1 + \psi_2(u)], \tag{4.44}$$

где $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ – голоморфные в нуле функции, а значение постоянной A зависит от исходных параметров; представление (4.44) выделяет семейство решений ОДУ (3.9), растущих при $u \longrightarrow +0$ не быстрее чем $O(\ln(u))$.

4.2. Перенос граничных условий из бесконечности в конечную точку

При $u \longrightarrow \infty$ ОДУ (3.9) обладает иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1. Поведение решений этих ОДУ при больших u не зависит от соотношения параметров a и $\lambda + \lambda_1$: при любых положительных значениях a, b^2, m, n и значениях λ и λ_1 любого знака существует двухпараметрическое семейство стремящихся к нулю на бесконечности решений. Это обстоятельство также тесно связано с постановкой возможных предельных условий на левом конце – при $u \longrightarrow +0$.

Сингулярную ЗК (3.9), (3.11) перепишем в виде

$$\psi'''(u) + \left[a_2 + \frac{a_1}{u}\right]\psi''(u) + \left[a_5 + \frac{a_4}{u} + \frac{a_3}{u^2}\right]\psi'(u) + \left[\frac{a_7}{u} + \frac{a_6}{u^2}\right]\psi(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{4.45}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \psi(u) = \lim_{u \to +\infty} \psi'(u) = \lim_{u \to +\infty} \psi''(u) = 0. \tag{4.46}$$

Полагая, как обычно, $\psi(u) = \exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $\psi'(u) = \nu\exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $\psi''(u) = \nu^2\exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $\psi'''(u) = \nu^3\exp(\nu u)[1 + o(1)]$, $u \longrightarrow \infty$, получаем для показателя ν характеристическое уравнение

$$\nu^3 + a_2\nu^2 + a_5\nu = 0,$$

откуда, с учетом обозначений (3.5), получаем характеристические числа для ОДУ (4.45), отвечающие за поведение решений при больших u:

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = -1/m < 0, \quad \nu_2 = 1/n > 0. \tag{4.47}$$

Чтобы полностью разобраться с поведением решений ОДУ (4.45) при $u \longrightarrow \infty$, надо найти первую поправку по теории возмущений (при больших u) к показателю $\nu_0 = 0$. Для этого перейдем к системе первого порядка, полагая

$$y_1(u) = \psi(u), \quad y_2(u) = \psi'(u), \quad y_3(u) = \psi''(u), \quad y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}. \tag{4.48}$$

Из (4.45), (4.46) получим сингулярную ЗК

$$y'(u) = [B_0 + B_1/u + B_2/u^2]y(u), \quad 0 < u < \infty, \quad \lim_{u \to \infty} y(u) = 0. \tag{4.49}$$

Здесь (3×3) – матрицы B_j $(j = 0, 1, 2)$ имеют вид

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_5 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{4.50}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_7 & -a_4 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_6 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Приведем матрицу B_0, которая имеет СЗ (4.47), к диагональному виду: равенство $B_0T_0 = T_0\Lambda_0$, где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/n \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

а B_0 определена в (4.50), дает

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/m & 1/n \\ 0 & 1/m^2 & 1/n^2 \end{pmatrix}, \quad T_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m-n & -mn \\ 0 & -m^2/(m+n) & m^2n/(m+n) \\ 0 & n^2/(m+n) & mn^2/(m+n) \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

Тогда, полагая в (4.49) $y(u) = T_0v(u)$, получаем для $v(u)$ систему ОДУ

$$v'(u) = [\Lambda_0 + \tilde{B}_1/u + \tilde{B}_2/u^2]v(u), \quad 0 < u < \infty, \tag{4.54}$$

где Λ_0 имеет вид (4.52), $\tilde{B}_1 = T_0^{-1}B_1T_0$, $\tilde{B}_2 = T_0^{-1}B_2T_0$, что, с учетом формул (4.51), (4.53), влечет

$$\tilde{B}_1 = 2\begin{pmatrix} -a/b^2 & (m+n)/m & (m+n)/n \\ am/[b^2(m+n)] & -1 & -m/n \\ an/[b^2(m+n)] & -n/m & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} a_6mn & (a_6m - a_3)n & (a_6n + a_3)m \\ -a_6m^2n/(m+n) & (a_3 - a_6m)mn/(m+n) & -(a_3 + a_6n)m^2/(m+n) \\ -a_6mn^2/(m+n) & (a_3 - a_6m)n^2/(m+n) & -(a_3 + a_6n)mn/(m+n) \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

величины a_3 и a_6 определены в (3.5).

Тогда поправка к нулевому СЗ матрицы B_0 при больших u равна $-2a/(ub^2) < 0$. Это легко показать методом асимптотической (квази)диагонализации матриц (см. [21, часть II], [26] и Основную лемму в [28]). А именно, положим в (4.54)

$$v(u) = (E + N/u)w(u), \tag{4.57}$$

где E – единичная (3×3)-матрица, а (3×3)-матрица N пока не определена. Покажем, что ее можно выбрать так, чтобы при больших и для $w(u)$ было справедливо ОДУ

$$w'(u) = [\Lambda_0 + \Lambda_1/u + \Omega(u)/u^2]w(u), \quad u \ge u_\infty, \tag{4.58}$$

где Λ_0 имеет вид (4.52),

$$\Lambda_1 = 2\begin{pmatrix} -a/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.59}$$

т.е. диагональные элементы диагональной матрицы Λ_1 совпадают с диагональными элементами матрицы $\tilde{B}_1$, а матрица $\Omega(u)$ имеет конечный предел при $u \longrightarrow \infty$.

В самом деле, подстановка (4.57) в (4.54) дает

$$w'(u) = (E + N/u)^{-1}[(\Lambda_0 + \tilde{B}_1/u + \tilde{B}_2/u^2)(E + N/u) + N/u^2]w(u), \quad u \ge u_\infty. \tag{4.60}$$

Сопоставив (4.58) и (4.60), видим, что надо построить матрицу $N = (n_{ij})_{i,j = 1, 2, 3}$ так, чтобы при больших u выполнялось равенство

$$(E + N/u)^{-1}[(\Lambda_0 + \tilde{B}_1/u + \tilde{B}_2/u^2)(E + N/u) + N/u^2] = \Lambda_0 + \Lambda_1/u + \Omega(u)/u^2. \tag{4.61}$$

Из (4.61), приравнивая слагаемые при $1/u$, получаем равенство

$$-\Lambda_0N + N\Lambda_0 = \tilde{B}_1 - \Lambda_1.$$

Отсюда и из вида матриц (4.52), (4.55), (4.59) получаем, что n_{11}, n_{22}, n_{33} – любые числа, так что можно положить

$$n_{11} = n_{22} = n_{33} = 0;$$

тогда для других элементов матрицы N однозначно получаем

$$n_{12} = -2(m+n), \quad n_{13} = 2(m+n), \quad n_{21} = 2am^2/[b^2(m+n)],$$

$$n_{23} = -2m^2/(m+n), \quad n_{31} = -2an^2/[b^2(m+n)], \quad n_{32} = -2n^2/(m+n).$$

Для матрицы $\Omega(u)$, после определения матрицы N, получим равенство

$$\Omega(u) = (E + N/u)^{-1}[\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1N + N(E - \Lambda_1) + \tilde{B}_2N/u],$$

что влечет за собой разложение при больших u в сходящийся ряд

$$\Omega(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\Omega^{(k)}/u^k, \quad u \ge u_\infty,$$

где, в частности, $\Omega^{(0)} = \tilde{B}_1N - N\Lambda_1 + \tilde{B}_2 + N$.

Возвращаясь к системе ОДУ (4.58) и используя, например, теорему 8 из [15, гл. II], получаем, что эта система "асимптотически эквивалентна" системе

$$\tilde{w}'(u) = (\Lambda_0 + \Lambda_1/u)\tilde{w}(u), \quad u \gg 1, \tag{4.62}$$

решения которой легко находятся в силу диагональности матриц (4.52), (4.59).

Учитывая вид решений системы ОДУ (4.62) и проведенных преобразований, а также результаты общей теории линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками, получаем, что справедлива

Лемма 6. *Пусть в системе* (3.9) *величины a, b^2, n, m — положительные числа, а значения λ и λ_1 любого знака. Тогда сингулярная ЗК* (3.9), (3.11) *обладает двухпараметрическим семейством решений $\psi(u, q_1, q_2)$, причем при больших и справедливо представление*

$$\psi(u, q_1, q_2) = q_1 u^{-2a/b^2}[1 + \xi_1(u)/u] + q_2 u^{-2}\exp(-u/m)[1 + \xi_2(u)/u]. \tag{4.63}$$

Здесь q_1, q_2 — произвольные постоянные, а функции $\xi_j(u)$ ($j = 1, 2$) имеют конечные пределы при $u \longrightarrow \infty$ и при больших и представимы асимптотическими рядами

$$\xi_j(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(j)}/u^k, \quad j = 1, 2, \tag{4.64}$$

где коэффициенты этих рядов могут быть получены из ОДУ (3.9) *формальной подстановкои всех разложений; если $q_1 \neq 0$, то функция $\psi(u, q_1, q_2)$ тогда и только тогда интегрируема на бесконечности, когда выполняется неравенство* (1.18).

Замечание 11. При выполнении условия (1.18) (надежности портфеля активов) асимптотическое представление в главном $\psi(u, q_1, q_2) = q_1 u^{-2a/b^2}[1 + o(1)] + q_2 u^{-2}\exp(-u/m)[1 + o(1)]$, $u \longrightarrow \infty$, было ранее получено в [1] другим способом — с использованием ВКБ-приближений (см. [16]). То же представление в главном было получено в [14] описанным выше способом, т.е. с использованием результатов [26], [28]. Более детальное описание этого подхода мы приводим для уточнения вида асимптотических представлений и полноты изложения. При этом мы не приводим формул для коэффициентов в асимптотических рядах (4.64), так как в дальнейшем нам это не понадобится.

Значения решений сингулярной ЗК (3.9), (3.11) порождают в фазовом пространстве двумерное линейное подпространство, зависящее от u как от параметра. Такое линейное подпространство задается в виде одного линейного соотношения в $\mathbb{R}^3$:

$$H(u)y(u) = 0, \quad u > 0, \tag{4.65}$$

где $H = (H_1, H_2, H_3)$, вектор y определен в (4.48),

$$H(u) = H_\infty + O(1/u), \quad u \longrightarrow \infty, \tag{4.66}$$

где H_∞ — левый СВ матрицы (4.50), т.е. матрицы B_0 в системе (4.49), отвечающий положительному СЗ $\nu_3 = 1/n$:

$$H_\infty = (0, 1/m, 1). \tag{4.67}$$

Тогда в первом приближении получаем соотношение (4.65) при больших u в виде

$$\psi''(u) + \psi'(u)/m \approx 0, \quad u \gg 1. \tag{4.68}$$

Окончательный вид соотношения (4.65) устанавливает

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения леммы* 6. *Тогда предельные граничные условия* (3.11) *для решении ОДУ* (3.9) *для достаточно больших и эквивалентны линейному соотношению*

$$\psi''(u) = \gamma(u)\psi'(u) + \kappa(u)\psi(u), \quad u \ge u_\infty, \tag{4.69}$$

где пара функций $\{\gamma(u), \kappa(u)\}$ есть решение сингулярной нелинейной ЗК

$$\gamma' = -(a_2 + a_1/u)\gamma - \gamma^2 - \kappa - (a_5 + a_4/u + a_3/u^2), \tag{4.70}$$

$$\kappa' = -(a_2 + a_1/u)\kappa - \gamma\kappa - (a_7/u + a_6/u^2), \quad u_\infty \le u \le \infty, \tag{4.71}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \gamma(u) = \gamma_0 = -1/m, \quad \lim_{u \to +\infty} \kappa(u) = 0. \tag{4.72}$$

Решение $\{\gamma(u), \kappa(u)\}$ *сингулярной ЗК* (4.70)–(4.72) *существует для достаточно больших u, единственно и представимо асимптотическими рядами*

$$\gamma(u) \sim \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k/u^k, \quad \kappa(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k/u^k, \quad u \gg 1, \tag{4.73}$$

где γ_0 *определено в* (4.72), *а коэффициенты* γ_k, κ_k *при* $k \geq 1$ *определяются из* (4.70), (4.71) *формальной подстановкой разложений* (4.73), *что приводит к рекуррентным формулам*

$$\kappa_1 = -a_7/(a_2+\gamma_0), \quad \gamma_1 = -(a_1\gamma_0 + \kappa_1 + a_4)/(a_2 + 2\gamma_0), \tag{4.74}$$

$$\kappa_2 = [\kappa_1(1-a_1-\gamma_1) - a_6]/(a_2+\gamma_0), \quad \gamma_2 = [\gamma_1(1-a_1-\gamma_1) - \kappa_2 - a_3]/(a_2+2\gamma_0), \tag{4.75}$$

$$\kappa_k = \left[(k-1-a_1)\kappa_{k-1} - \sum_{l=1}^{k-1}\gamma_l\kappa_{k-l}\right]/(a_2+\gamma_0), \tag{4.76}$$

$$\gamma_k = \left[\gamma_{k-1}(k-1-a_1) - \kappa_k - \sum_{l=1}^{k-1}\gamma_l\gamma_{k-l}\right]/(a_2+2\gamma_0), \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{4.77}$$

Доказательство. Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 4 с учетом результатов, относящихся к сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ с иррегулярной (сильной) особенностью на бесконечности. А именно, матрица Якоби $Q(\gamma, \kappa, u)$ правой части системы (4.70), (4.71), взятая в точке $\{\gamma, \kappa, u\} = \{\gamma_0, 0, \infty\}$ (точка $\{\gamma_0, 0\}$, является стационарной точкой предельной автономной системы нелинейных ОДУ, получающейся из системы (4.70), (4.71) формальным переходом к пределу при $u \longrightarrow \infty$), имеет вид

$$Q(\gamma_0, 0, \infty) = \begin{pmatrix} -a_2 - 2\gamma_0 & -1 \\ 0 & -a_2-\gamma_0 \end{pmatrix}, \tag{4.78}$$

где для СЗ матрицы (4.78) справедливы соотношения

$$-a_2 - 2\gamma_0 = (m-n)/(mn) + 2/m = (m+n)/(mn) > 0, \quad -a_2 - \gamma_0 = m/(m+n) > 0. \tag{4.79}$$

Тогда все решения системы линейных ОДУ, полученной линеаризацией системы (4.70), (4.71) на функции $\{\gamma, \kappa, u\} = \{\gamma_0, 0, \infty\}$, не ограничены при $u \longrightarrow \infty$. Учитывая затем результаты из [21, часть I, разд. 1] (см. также в [28] теорему 3.7 с учетом следствия 7), получаем утверждение леммы для нелинейной сингулярной ЗК (4.70)–(4.72).

В остальном схема доказательства этой леммы та же, что и леммы 4.

В результате перенос граничных условий (3.11) из бесконечности в конечную точку $u = u_\infty \gg 1$ осуществляется с помощью соотношения (4.69): в точке $u = u_\infty$ имеем граничное условие

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \kappa(u_\infty)\psi(u_\infty), \tag{4.80}$$

где приближенные значения $\gamma(u_\infty)$, $\kappa(u_\infty)$ могут быть найдены с помощью разложений (4.74)–(4.77). При этом в силу формул (4.78), (4.79) при больших u условие (4.80) устойчиво переносится справа налево — в направлении от особой точки $u = \infty$.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ КрЗ ДЛЯ ОДУ И ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КрЗ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ ИДУ

При выполнении условий (2.10) (условий (2.11)) вспомогательная сингулярная линейная КрЗ (3.9)–(3.11) (соответственно, КрЗ (3.9), (3.21), (3.11)), определенная на $\mathbb{R}_+$, эквивалентна следующей однородной линейной КрЗ на конечном интервале $0 < u_0 \leq u \leq u_\infty$ без особенностей:

$$\begin{gathered} u^3\psi'''(u) + [a_1 + a_2u]u^2\psi''(u) + [a_3 + a_4u + a_5u^2]u\psi'(u) + [a_6u + a_7u^2]\psi(u) = 0, \\ u_0 \leq u \leq u_\infty, \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$u_0^2\psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \tag{5.2}$$

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \kappa(u_\infty)\psi(u_\infty). \tag{5.3}$$

Здесь функции $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ определены в лемме 4, а $\gamma(u)$ и $\kappa(u)$ – в лемме 7.

В результате полученная однородная КрЗ (5.1)–(5.3) является недоопределенной по числу граничных условий. Такая КрЗ наряду с тривиальным решением $\psi_0(u) \equiv 0$ всегда имеет нетривиальное решение. В самом деле, соотношение (5.2) для решений ОДУ (5.1) $\forall u \in [u_0, u_\infty]$ порождает в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (ψ, ψ', ψ'') двумерное подпространство – плоскость, проходящую через начало координат. То же относится и к соотношению (5.3). Тогда $\forall u \in [u_0, u_\infty]$ эти две плоскости либо имеют общую линию пересечения, проходящую через начало координат, что порождает однопараметрическое семейство решений КрЗ (5.1)–(5.3) (т.е. единственное решение с точностью до нормирующего множителя), либо эти две плоскости совпадают, что приводит к существованию двухпараметрического семейства решений КрЗ (5.1)–(5.3). Так как сам факт существования решений КрЗ (5.1)–(5.3) не зависит от значений задаваемых положительных параметров b^2, λ, λ_1, m, n, a, то случай слияния плоскостей представляется только как возможное исключение. Более того, при выполнении неравенства (1.18) такое исключение невозможно в силу лемм 1, 3, 6.

Суммируя эти рассуждения и полученные в разд. 3 и 4 результаты, выводим справедливость приведенных ниже теорем.

Теорема 1. *Пусть в ОДУ* (3.9) *будет: коэффициенты* $a_j, j = \overline{1,7}$, *определены по формулам* (3.5), *где*

$$b^2 > 0, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad \lambda > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad 0 < a < \lambda + \lambda_1, \quad 2a/b^2 > 1,$$

а в остальном эти параметры – произвольные числа.

Тогда при фиксированных значениях этих параметров сингулярная КрЗ (3.9)–(3.11) *имеет, и притом единственное (с точностью до нормирующего множителя), нетривиальное решение* $\psi(u)$, $\psi(u) \in L_1(0, \infty)$. *Кроме того, справедливы следующие утверждения:*

1) *сингулярная КрЗ* (3.9)–(3.11), *определенная на* $\mathbb{R}_+$, *эквивалентна регулярной однородной КрЗ* (5.1)–(5.3) *на конечном отрезке* $[u_0, u_\infty]$, *где функции* $\alpha(u)$ *и* $\beta(u)$ *определены в лемме* 4, *функции* $\gamma(u)$ *и* $\kappa(u)$ – *в лемме* 7, *а значения* u_0 *и* u_∞ ($0 < u_0 \ll 1$, $u_\infty \gg 1$), *вообще говоря, могут меняться в некоторых диапазонах, зависящих от параметров задачи (подвижные границы):*

2) *поведение решений сингулярной КрЗ* (3.9)–(3.11) *при* $u \longrightarrow +0$ *определено в следствиях* 2, 3 *и замечании* 9; *в частности,* $|\lim_{u \to +0}\psi'(u)| < \infty$ *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (4.4), *т.е. неравенство*

$$\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a; \tag{5.4}$$

при этом, более точно, если $|\lim_{u \to +0}\psi(u)| = D_1 > 0$, *то*

$$\lim_{u \to +0}\psi'(u) = D_1D_2 = D_1[a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m]/[mn(b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1)] \tag{5.5}$$

(*см. формулу* (4.37)), *откуда получаем* $D_2 < 0$ *при*

$$a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m > 0 \tag{5.6}$$

и $D_2 \geq 0$ *при*

$$a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m \leq 0; \tag{5.7}$$

при $n > m$ *неравенство* (5.6), *в частности, выполняется* (*с учетом ограничений* $0 < a < \lambda + \lambda_1$), *если* $\lambda n < \lambda_1 m$, *а при* $m \geq n$ – *если* $\lambda m < \lambda_1 n$; *при* $n \geq m$ *неравенство* (5.7), *в частности, выполняется, если* $\lambda m \geq \lambda_1 n$, *а при* $m > n$ – *если* $\lambda n \geq \lambda_1 m$;

3) *при нарушении условия* (5.4), *т.е. когда*

$$\lambda + \lambda_1 \leq b^2 + 2a, \tag{5.8}$$

$\psi'(u)$ *становится неограниченной при* $u \longrightarrow +0$, *но интегрируемой в нуле функцией;*

4) *поведение решений сингулярной КрЗ* (3.9)–(3.11) *при* $u \longrightarrow \infty$ *определено в лемме* 6, *а именно, справедливо в главном асимптотическое представление*

$$\psi(u) = q_1 u^{-2a/b^2}[1 + o(1)], \quad u \longrightarrow \infty, \tag{5.9}$$

где $q_1 \neq 0$.

Замечание 12. Утверждение п. 4) теоремы 1 связано с нижеследующим: если предположить, что $q_1 = 0$ в представлении (5.9), то это будет равносильно поиску решений ОДУ (3.9), стремящихся на бесконечности к нулю не медленнее экспоненты. В силу того, что таких решений – однопараметрическое семейство, в точке $u = u_\infty$ будет два однородных граничных условия, что в итоге приведет к существованию только тривиального решения КрЗ (3.9)–(3.11). Мы не будем останавливаться на этом подробнее (ср. также далее с замечанием 13).

Теорема 2. *Пусть в ОДУ* (3.9) *будет: коэффициенты* $a_j, j = \overline{1, 7}$, *определены по формулам* (3.5), *где*

$$b^2 > 0, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad \lambda > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad a \geq \lambda + \lambda_1, \quad 2a/b^2 > 1,$$

а в остальном эти параметры – произвольные числа.

Тогда при фиксированных значениях этих параметров сингулярная КрЗ (3.9), (3.21), (3.11) *имеет, и притом единственное (с точностью до нормирующего множителя), нетривиальное решение* $\psi(u)$, $\psi(u) \in L_1(0, \infty)$. *Кроме того, справедливы следующие утверждения:*

1) *сингулярная КрЗ* (3.9), (3.21), (3.11), *определенная на* $\mathbb{R}_+$, *эквивалентна регулярной однородной КрЗ* (5.1)–(5.3) *на конечном отрезке* $[u_0, u_\infty]$, *где функции* $\alpha(u)$ *и* $\beta(u)$ *определены в лемме* 4, *функции* $\gamma(u)$ *и* $\kappa(u)$ – *в лемме* 7, *а значения* u_0 *и* u_∞ $(0 < u_0 \ll 1, u_\infty \gg 1)$, *вообще говоря, могут меняться в некоторых диапазонах, зависящих от параметров задачи (подвижные границы);*

2) *поведение решений сингулярной КрЗ* (3.9), (3.21), (3.11) *при* $u \longrightarrow +0$ *определено в следствии* 4, *так что* $\psi(u)$ *не ограничена при* $u \longrightarrow +0$, *но остается интегрируемой в нуле функцией;*

3) *поведение решений сингулярной КрЗ* (3.9), (3.21), (3.11) *при* $u \longrightarrow \infty$ *следует из леммы* 6, *а именно, справедливо в главном асимптотическое представление* (5.9), *где* $q_1 \neq 0$.

Замечание 13. Заметим, что если в предположениях теоремы 2 рассмотреть КрЗ (3.9)–(3.11), т.е. заменить в нуле условие (3.21) на условие (3.10), то в силу рассуждений п. 4.1.2.1, получатся два однородных граничных условия в точке $u = u_0$ (см. формулы (4.39)–(4.43)), что в результате приведет к существованию только тривиального решения КрЗ (3.9)–(3.11).

Учитывая эти теоремы, леммы 1, 2, 3, 6, а также то обстоятельство, что решение сингулярной задачи для ИДУ (2.1)–(2.5), если таковое существует, описывает вероятность неразорения (см. [5]), получаем, что справедлива основная

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 (*или теоремы* 2), *и пусть* $\psi(u)$ – *нетривиальное решение вспомогательной сингулярной КрЗ* (3.9)–(3.11) *для ОДУ* (*соответственно, сингулярной КрЗ* (3.9), (3.21), (3.11)), *нормированное требованием* (3.20), *т.е. требованием*

$$\int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda)\exp(-s/n)]\psi(s)ds = 1. \tag{5.10}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *функция* $\psi(u)$ *положительна для каждого конечного значения* $u \in \mathbb{R}_+$, *а функция* $\varphi(u)$, *определенная равенством*

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda)\int_0^\infty \psi(s)\exp(-s/n)ds + \int_0^u \psi(s)ds, \quad u \geq 0, \tag{5.11}$$

есть единственное решение исходной сингулярной КрЗ с ограничениями (2.1)–(2.5) *для ИДУ и является неубывающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией*;

2) *при малых* $u > 0$ *поведение* $\varphi(u)$ *следует из соответствующих утверждений теореме* 1 (*или теоремы* 2) *для* $\psi(u)$ *и формулы* (5.11); *в частности, в предположениях теоремы* 1 *производная* $\varphi'(u)$ *имеет конечный предел при* $u \longrightarrow +0$, *причем при выполнении условия* (5.4) *вторая производная* $\varphi''(u)$ *также имеет конечный предел при* $u \longrightarrow +0$, *а при выполнении условия* (5.8) *вторая производная* $\varphi''(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией; в предположениях теоремы* 2 *производная* $\varphi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией;*

3) *при больших и для решения* $\varphi(u)$ *справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2a/b^2}[1+o(1)], \quad u \longrightarrow \infty, \tag{5.12}$$

где $K > 0$ (*постоянная* K *не может быть найдена методом локального анализа*);

4) *в предположениях теоремы* 1 *и выполнении условий* (5.4), (5.7) *функция* $\psi(u)$ *достигает положительного максимума на отрезке* $[u_0, u_\infty]$, *а функция* $\varphi(u)$ *имеет на нем точку перегиба.*

Отметим здесь, что при выполнении условий теоремы 1 и при положительной нагрузке безопасности, т.е. выполнении неравенства (1.41), условие (5.6) всегда выполняется при $m \geq n$. При нарушении неравенства (1.41), когда в модели без инвестиций $\varphi(u) \equiv 0$, введем

Определение 4. При невыполнении условия (1.41) (относительно нагрузки безопасности для КЛ-модели со стохастическими премиями), но справедливости неравенства (5.4) назовем величину

$$i_{r,\,\mathrm{II}} = a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m \tag{5.13}$$

показателем (индексом) рискованности для модели II.

В пределе, когда $n \longrightarrow 0$, $\lambda_1 n \longrightarrow c$, будет $i_{r,\,\mathrm{II}} \longrightarrow i_{r,\,\mathrm{I}}$, где $i_{r,\,\mathrm{I}}$ – показатель рискованности для модели I, определенный в (1.29).

Наиболее рискованная ситуация во модели II возникает, когда $i_{r,\,\mathrm{II}} \leq 0$, а НК мал. Но даже в этой ситуации в модели с инвестициями получаем, что $\varphi(u) > 0$ на $\mathbb{R}_+$.

6. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ, РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

6.1. Методы решения основной сингулярной задачи для модели II

Как следует из проведенных исследований, основным элементом решения исходной сингулярной КрЗ с ограничениями (2.1)–(2.5) для ИДУ является нахождение нетривиальных решений вспомогательной КрЗ для ОДУ (5.1)–(5.3), определенной на конечном отрезке $[u_0, u_\infty]$ без особенностей и с недостающим числом граничных условий.

Для решения линейных КрЗ на конечном интервале без особенностей, как известно, эффективными являются методы дифференциальной прогонки. Важной для нахождения нетривиальных решений КрЗ (5.1)–(5.3) является работа [27], в которой наряду с кратким обзором вариантов дифференциальной прогонки исследуются вопросы устойчивости вычислений в окрестностях особых точек при решении КрЗ, полученных из сингулярных КрЗ переносом граничных условий из особых точек, в том числе спектральных задач. В частности, КрЗ (5.1)–(5.3) получена из сингулярной КрЗ (3.9)–(3.11) (или из сингулярной КрЗ (3.9), (3.21), (3.11)) описанными в разд. 4 методами локального переноса граничных условий из особых точек, а для нахождения ее нетривиальных решений важны приемы из [27], применяемые для устойчивого нахождения собственных функций. Отличие здесь состоит в том, что ранее такие приемы не применялись для решения однородных КрЗ с недостающим числом краевых условий.

В данной работе предложен и реализован наиболее экономичный способ решения КрЗ (5.1)–(5.3) по числу уравнений прогонки и числу арифметических действий. Он состоит их следующих шагов.

Шаг 1. Фиксируем значения u_0, u_∞ ($0 < u_0 \ll 1$, $u_\infty \gg 1$) и находим приближенные значения $\tilde{\alpha}_0 \approx \alpha(u_0)$, $\tilde{\beta}_0 \approx \beta(u_0)$ в (5.2) с помощью сходящихся рядов (4.20)–(4.23) и приближенные значения $\tilde{\gamma}_\infty \approx \gamma(u_\infty)$, $\tilde{\kappa}_\infty \approx \kappa(u_\infty)$ в (5.3) с помощью асимптотических разложений (4.73)–(4.77) (см. леммы 4 и 7), так что получаем приближенную КрЗ с некоторыми погрешностями в граничных условиях; фиксируем точки отрезка $[u_0, u_\infty]$, где хотим знать значения решения КрЗ (5.1)–(5.3).

Шаг 2. Фиксируем $u = \hat{u} \in (u_0, u_\infty)$ как точку сноса краевых условий, выбирая ее ближе к более слабой особенности, и переносим краевые условия (5.2) и (5.3) в эту точку.

Для переноса условия (5.2) слева направо (от точки $u = u_0$ до точки $u = \hat{u}$) используем соотношение (4.16), где $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ находим численным решением ЗК для системы двух ОДУ (4.17), (4.18) при начальных условиях $\alpha(u_0) = \tilde{\alpha}_0$, $\beta(u_0) = \tilde{\beta}_0$ (при этом запоминаем значения $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ в тех точках отрезка $[u_0, \hat{u}]$, где хотим знать значения решения КрЗ (5.1)–(5.3)); для переноса условия (5.3) справа налево (от точки $u = u_\infty$ до точки $u = \hat{u}$) используем соотношение (4.69), где $\gamma(u)$ и $\kappa(u)$ находим численным решением ЗК для системы двух ОДУ (4.70), (4.71) при начальных условиях $\gamma(u_\infty) = \tilde{\gamma}_\infty$, $\kappa(u_\infty) = \tilde{\kappa}_\infty$ (при этом также запоминаем значения $\gamma(u)$ и $\kappa(u)$ в тех точках отрезка $[\hat{u}, u_\infty]$, где хотим знать значения решения КрЗ (5.1)–(5.3).

Локальная устойчивость вычислений (в окрестностях особых точек) обсуждалась в разд. 4. Для сравнения и контроля глобальной устойчивости вычислений использовался также метод ортогональной дифференциальной прогонки из [29], менее экономичный по числу уравнений и числу арифметических действий, но заведомо устойчивый в целом; оба варианта дали хорошее совпадение по точности результата.

Шаг 3. После осуществления шага 2 получаем в точке $u = \hat{u}$ два линейных соотношения (4.16), (4.69) относительно трех неизвестных величин $\hat{\psi} = \psi(\hat{u})$, $\hat{\psi}' = \psi'(\hat{u})$, $\hat{\psi}'' = \psi''(\hat{u})$. Полагая, например, $\hat{\psi} = 1$ (вспомогательная предварительная нормировка решения), из этой линейной алгебраической системы (ЛАУ) получаем значения решения КрЗ (5.1)–(5.3) и его производных в точке $u = \hat{u}$.

Шаг 4. В точке $u = \hat{u}$ решение дополнительно накладываем неоднородное краевое условие, совместимое с найденным значением и трансверсальное результату переноса краевого условия (5.2) из точки $u = u_0$. А именно, следуя [27], к строке

$$\chi_l(\hat{u}) = (\beta(\hat{u}), \alpha(\hat{u}), -\hat{u}^2)$$

добавляем две строки, составляющие в совокупности с $\chi_l(\hat{u})$ базис в $\mathbb{R}^3$. Если $S_l(\hat{u})$ – матрица из двух указанных строк, то находим величину (вектор-столбец из двух компонент)

$$\hat{b}_l = S_l(\hat{u})(\hat{\psi}, \hat{\psi}', \hat{\psi}'')^{\mathrm{T}}. \tag{6.1}$$

Аналогично находим величины $S_r(\hat{u})$, $\hat{b}_r$, учитывая перенос краевого условия (5.3) из точки $u = u_\infty$.

Шаг 5. Полученное выше неоднородное краевое условие (6.1) порождает для решений ОДУ (5.1) линейное соотношение

$$b_l(u) = S_l(u)(\psi(u), \psi'(u), \psi''(u))^{\mathrm{T}}, \tag{6.2}$$

которое также перепишем в эквивалентном виде

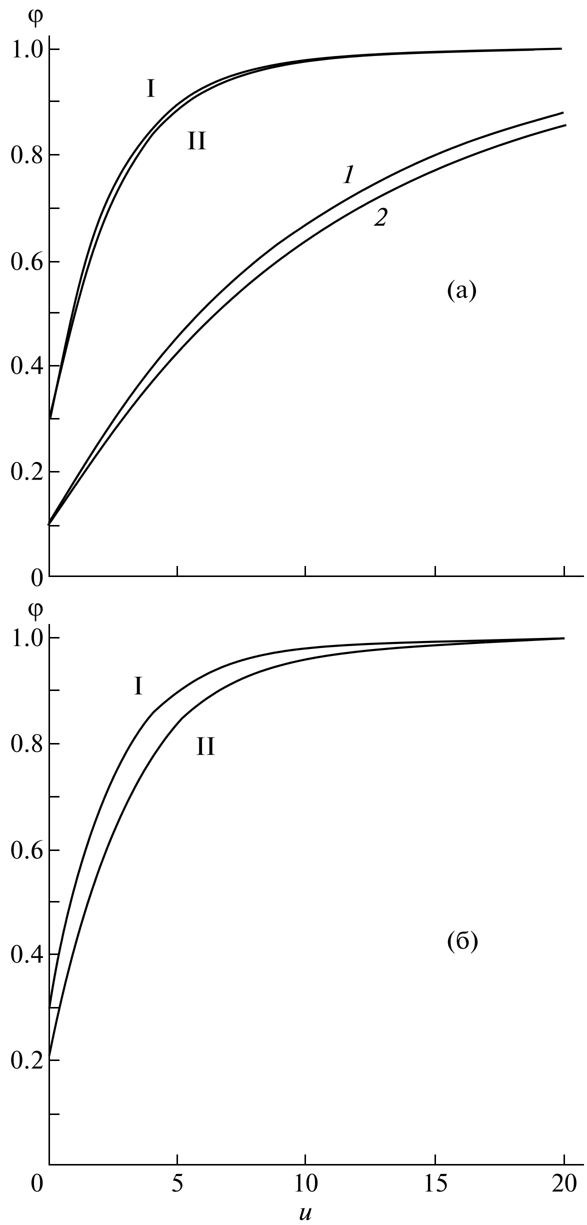
$$(\psi(u), \psi'(u), \psi''(u))^{\mathrm{T}} = Z_l(u)r_l(u) + w_l(u), \tag{6.3}$$

где $Z_l(u)$ и $w_l(u)$ – столбцы из трех компонент, $r_l(u)$ – скалярная функция, причем в точке $u = \hat{u}$ будет

$$S_l(\hat{u})Z_l(\hat{u}) = 0, \quad w_l(\hat{u}) = (S_l^{\mathrm{T}}(\hat{u})S_l(\hat{u}))^{-1}S_l^{\mathrm{T}}(\hat{u})\hat{b}_l, \tag{6.4}$$

а $r_l(\hat{u}) = -(\chi_l(\hat{u})Z_l(\hat{u}))^{-1}\chi_l(\hat{u})w_l(\hat{u})$.

Тогда возможны два подхода, из которых второй является более экономичным по числу уравнений прогонки и осуществляется в данной работе: 1) переносим соотношение (6.2) справа налево от точки $u = \hat{u}$ до точки $u = u_0$ методом ортогональной дифференциальной прогонки из [29] с учетом начальных значений $S_l(\hat{u})$, $\hat{b}_l$, определенных на шаге 4 (см., в частности, (6.1)); в фиксированных точках отрезка $[u_0, \hat{u}]$, в которых хранятся результаты прямой прогонки, при встречной прогонке определяем значения решения КрЗ (5.1)–(5.3), исходя из полученных в этих точках двух соотношений (4.16) и (6.2) (три ЛАУ с тремя неизвестными – значениями ψ, ψ', ψ'' в данной точке); 2) переносим соотношение (6.3) справа налево от точки $u = \hat{u}$ до точки $u = u_0$ методом ортогональной дифференциальной прогонки из [30], гл. IX, с. 581–582] (описание этого варианта прогонки см. также в [27]) с учетом начальных данных, определенных в (6.4); в фиксированных точках отрезка $[u_0, \hat{u}]$, в которых хранятся результаты прямой прогонки, при встречной прогонке определяем значения решения КрЗ (5.1)–(5.3), исходя из полученных в этих точках двух соотношений (4.16) и (6.3) (четыре ЛАУ с четырьмя неизвестными – значениями ψ, ψ', r_l в данной точке).



Фиг. 2.

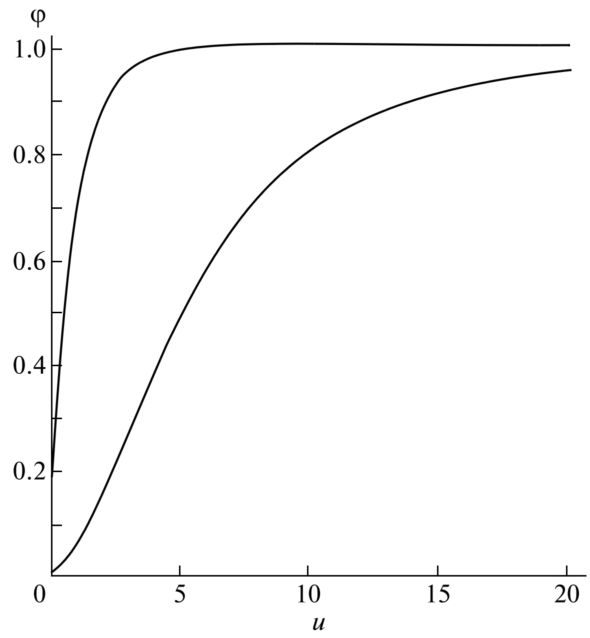
Аналогично осуществляем встречную прогонку (по более экономичному второму варианту) от точки $\hat{u}$ до точки u_∞ и находим значения решения КрЗ (5.1)–(5.3) в точках отрезка $[\hat{u}, u_\infty]$.

Устойчивость решений уравнений встречной прогонки в направлениях к особым точках изучена в [27].

Шаг 6. Окончательно приближенное решение исходной сингулярной КрЗ с ограничениями (2.1)–(2.5) для ИДУ находим по формуле (5.11) численным интегрированием.

6.2. Результаты расчетов, сравнение с результатами расчетов для модели I

Целью расчетов было: 1) подтвердить адекватность разработанных методов и алгоритмов, проиллюстрировать утверждения теорем; 2) сопоставить результаты расчетов с точными решениями для КЛ-моделей и результатами расчетов по модели I, получить выводы, имеющие фи-



Фиг. 3.

нансовую интерпретацию; 3) изучить характер поведения функции вероятности неразорения (ВН) для модели II в зависимости от значений параметров, в том числе свойства выпуклости.

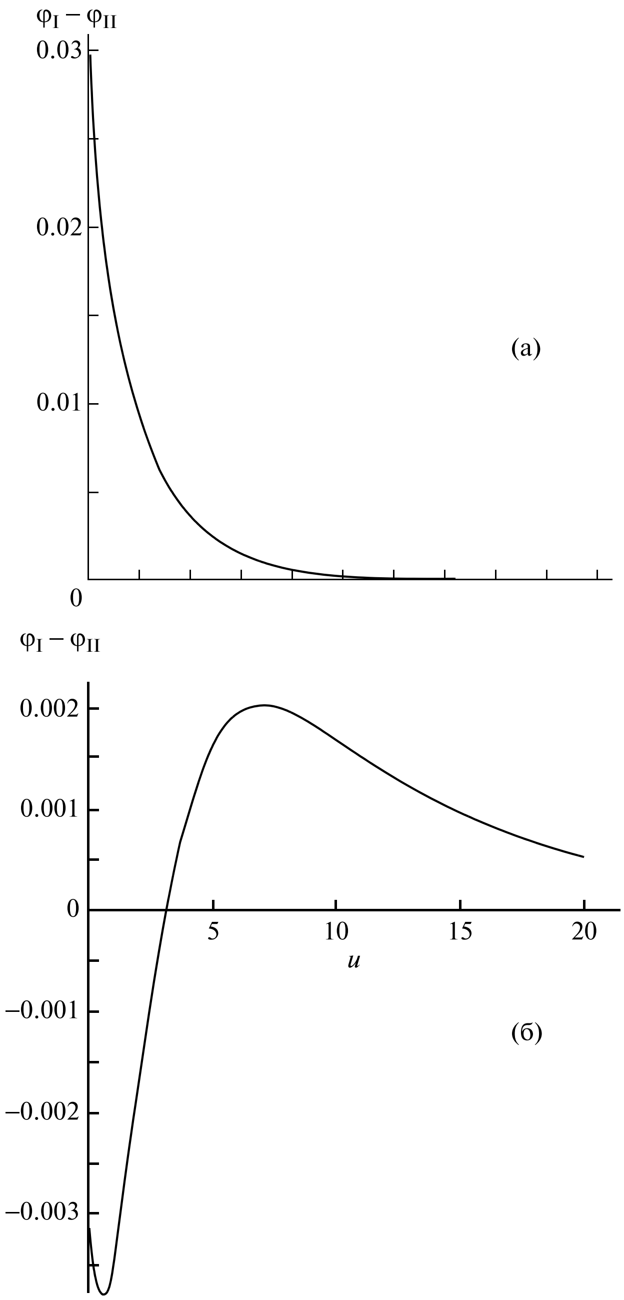
Расчеты осуществлялись в программной среде пакета Maple 14.01[2)] с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приемами контроля количества верных знаков. Далее на диаграммах представлены графики ВН как функции НК при выполнении условий сравнения моделей I и II (см. п. 1.2) и при определенных наборах параметров.

1. Фиг. 2 – сравнение моделей I и II при положительных нагрузках безопасности и выполнении неравенства (2.10) для модели II (здесь и далее графики и полученные величины для модели I помечены цифрой I, для модели II – цифрой II; цифрами *1* и *2* помечены графики точных решений и вычисленных для них величин для КЛ-моделей). Для моделей I и II на фиг. 2 зафиксированы значения $a = 0.02$, $b = 0.1$, $m = 1$, $\lambda = 0.09$ и $c = 0.1$, для КЛ-моделей – те же значения $m = 1$, $\lambda = 0.09$ и $c = 0.1$ при $a = b = 0$. Для модели I и классической КЛ-модели получено: $\varphi_{\rm I}(0) \approx 0.29440$, $\varphi_{\rm I}'(0) \approx 26496$, $\varphi_{\rm I}''(0) \approx -0.07949$; $\varphi_1(0) = 0.1$, $\varphi_1'(0) = 0.09$. Для остальных значений параметров и полученных величин справедливо: а) для фиг. 2а: $n = 0.1$, $\lambda_1 = 1.0$ $(n\lambda_1 = c = 0.1)$; $\varphi_{\rm II}(0) \approx 0.279785$, $\varphi_{\rm II}'(0) \approx 0.25861$, $\varphi_{\rm II}''(0) \approx -0.06963$; $\varphi_2(0) \approx 0.09174$, $\varphi_2'(0) \approx 0.08332$; 2) для фиг. 2б: $n = 0.9$, $\lambda_1 = 1/9$ $(n\lambda_1 = c = 0.1)$; $\varphi_{\rm II}(0) \approx 0.20535$, $\varphi_{\rm II}'(0) \approx 0.215336$, $\varphi_{\rm II}''(0) \approx -0.01900$.

Видно, что графики по модели I выше графиков по модели II и на фиг. 2а – оба графика выше графиков по КЛ-моделям. При этом максимум разности $\varphi_{\rm I}(u) - \varphi_{\rm II}(u)$ для фиг. 2а (для фиг. 2б) достигается при $u \approx 1.0$ (при $u \approx 1.2$) и примерно равен 0.017 (соответственно, 0.115).

2. Фиг. 3 и фиг. 4 – сравнение моделей I и II при отрицательных нагрузках безопасности, выполнении неравенства (2.10) для модели II и положительных (отрицательных) показателях рискованности. На фиг. 3 приведены графики для модели II, результаты расчетов по модели I совпадают с графической точностью с результатами расчетов по модели II, поэтому на фиг. 4 приведены в другом масштабе графики разностей $\varphi_{\rm I}(u) - \varphi_{\rm II}(u)$. Для всех случаев зафиксированы значения: $b = 0.1$, $m = 1$, $\lambda = 0.09$, $c = 0.02$, $n = 0.2$, $\lambda_1 = 0.1$; меняются значения a: 1) $a = 0.1$ для верхнего графика на фиг. 3 и для фиг. 4а, откуда следует положительность показателей рискованности для обеих моделей и нарушение условия (5.4) для модели II, а полученные величины таковы: $\varphi_{\rm I}(0) \approx 0.193696$, $\varphi_{\rm I}'(0) \approx 0.871632$, $\varphi_{\rm I}''(0) \approx -1.307447$; $\varphi_{\rm II}(0) \approx 0.163144$, $\varphi_{\rm II}'(0) \approx 0.965437$,

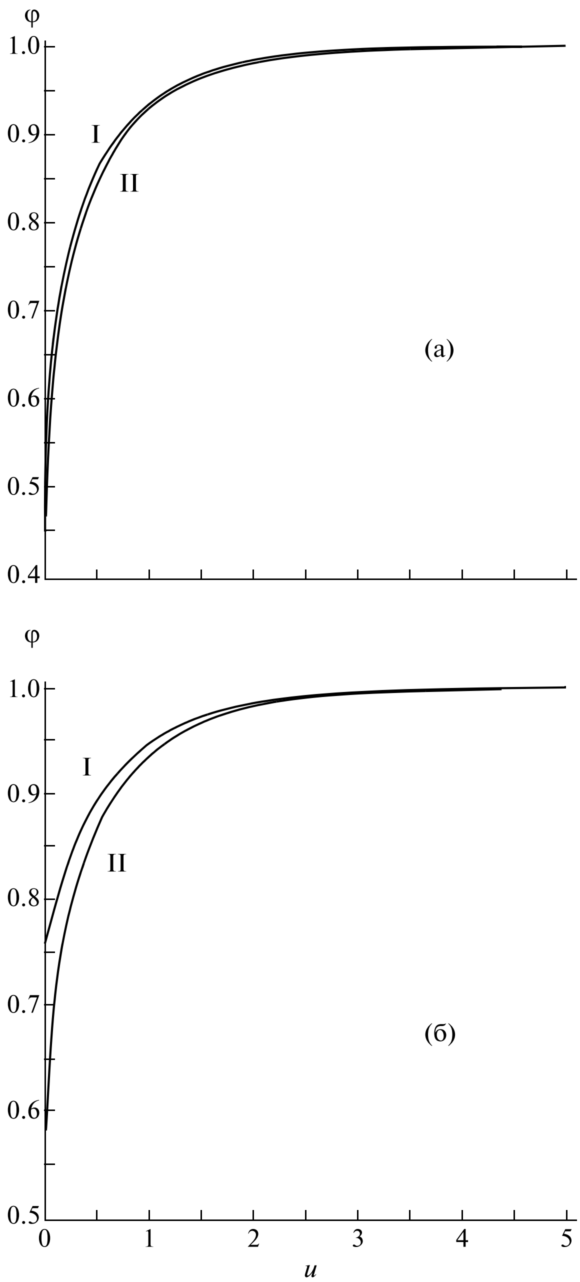
[2)] Лицензия ВЦ РАН.



Фиг. 4.

$\varphi''_{\mathrm{II}}(u) \longrightarrow \infty$ при $u \longrightarrow +0$; 2) $a = 0.02$ для нижнего графика на фиг. 3 и для фиг. 4б, что влечет за собой отрицательность показателей рискованности для обеих моделей и выполнение условия (5.4) для модели II, а полученные величины таковы: $\varphi_{\mathrm{I}}(0) \approx 0.00527$, $\varphi'_{\mathrm{I}}(0) \approx 0.02371$, $\varphi''_{\mathrm{I}}(0) \approx 0.05927$; $\varphi_{\mathrm{II}}(0) \approx 0.00838$, $\varphi'_{\mathrm{II}}(0) \approx 0.02662$, $\varphi''_{\mathrm{II}}(0) \approx 0.051338$.

Видно, что при неположительных нагрузках безопасности выделяются 2 случая: а) при положительных показателях рискованности график модели I также выше графика по модели II (см. фиг. 4а); б) при неположительных показателях рискованности картина более сложная (см. фиг. 4б): при малых НК (в области наибольшего риска) график по модели I ниже графика по модели II; существует точка $u = u_{\mathrm{ins}} > 0$, в которой значения функций для моделей I и II совпадают; при всех $u > u_{\mathrm{ins}}$ график по модели I снова выше графика по модели II; в некоторой точке от-



Фиг. 5.

резка $[0, u_{\text{ins}}]$ разность $\varphi_{\text{I}}(u) - \varphi_{\text{II}}(u)$ достигает отрицательного минимума, а при $u > u_{\text{ins}}$ существует точка, где разность $\varphi_{\text{I}}(u) - \varphi_{\text{II}}(u)$ достигает своего положительного максимума.

Таким образом, в области наиболее высокого риска, т.е. при малых значениях НК, в рассматриваемом случае ВН оказывается больше в модели со стохастическими премиями (в модели II), чем в модели I. Это означает, что дополнительный независимый риск, возникающий при введении случайности в процесс поступления премий (при сохранении их ожидаемых значений в единицу времени), позволят более эффективно компенсировать риск, связанный с выплатами по требованиям, при малых значениях НК. При умеренных и больших значениях НК, т.е. в более стабильной ситуации, модель с детерминированными премиями модель I дает более высокие значения ВН.

Заметим здесь также, что, как известно, значения ВН могут быть малы, а потери от принимаемых решений на основании данных о ВН – велики.

3. Фиг. 5 – сравнение моделей I и II при нарушении условия (2.10) для модели II, т.е. при выполнении неравенства (2.11). Для всех случаев зафиксированы значения $a = 0.2$, $b = 0.1$, $m = 1$, $\lambda = 0.05$, $\lambda_1 = 0.1$. Для фиг. 5а значения дополнительных параметров отвечают отрицательным нагрузкам безопасности: $c = 0.02$, $n = 0.2$; получены величины $\varphi_{\mathrm{I}}(0) \approx 0.583001$, $\varphi_{\mathrm{I}}'(0) \approx 1.457501$, $\varphi_{\mathrm{I}}''(0) \approx -12.388762$; $\varphi_{\mathrm{II}}(0) \approx 0.455938$, $\varphi_{\mathrm{II}}'(0) \longrightarrow \infty$ при $u \longrightarrow +0$, $\varphi_{\mathrm{II}}''(u) \longrightarrow -\infty$ при $u \longrightarrow +0$. Для фиг. 5б значения дополнительных параметров отвечают положительным нагрузкам безопасности: $c = 0.08$, $n = 0.8$; получены величины $\varphi_{\mathrm{I}}(0) \approx 0.756575$, $\varphi_{\mathrm{I}}'(0) \approx 0.472859$, $\varphi_{\mathrm{I}}''(0) \approx -1.359471$; $\varphi_{\mathrm{II}}(0) \approx 0.570519$, $\varphi_{\mathrm{II}}'(u) \longrightarrow \infty$ при $u \longrightarrow +0$, $\varphi_{\mathrm{II}}''(u) \longrightarrow -\infty$ при $u \longrightarrow +0$.

Видно, что графики по модели I выше графиков по модели II: $\varphi_{\mathrm{I}}(u) > \varphi_{\mathrm{II}}(u)$ $\forall u \in [0, u_\infty]$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ВЫВОДЫ И ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Корректная постановка и исследование сингулярной КрЗ с ограничениями (2.1)–(2.5) для ИДУ были осуществлены в данной работе с целью нахождения вероятности неразорения (ВН) в модели страхования со стохастическими премиями и инвестициями капитала в рисковый актив, построения алгоритма вычисления ВН как функции НК и проведения численных расчетов. При этом важно отметить, что доказательство существования решения поставленной КрЗ является также необходимым этапом на пути теоретического обоснования вида функции, определяющей ВН в рассматриваемой модели.

Эвристические рассуждения, основанные на некоторых естественных соображениях и приведенные в [1] (так же, как и непосредственное применение аппарата производящих операторов для марковских процессов), позволяют получить уравнение для ВН как функции НК (в данном случае линейное ИДУ) в предположении, что ВН есть дважды непрерывно дифференцируемая функция НК. Тогда для изучения, например, асимптотики ВН при больших значениях НК с использованием полученного ИДУ необходимо, с одной стороны, доказать, что ВН действительно является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, а с другой стороны, обосновать предельное условие стремления к единице на бесконечности для соответствующего решения этого ИДУ. Это обоснование может быть проделано, например, с использованием верхних оценок для вероятности разорения (ВР), подобных оценке Лундберга в классической модели, показывающей, что при положительной нагрузке безопасности ВР стремится к нулю при стремлении НК к бесконечности. Однако в [1] при исследовании данного вопроса в модели с инвестированием капитала в рисковый актив таких доказательств проделано не было, и в результате полученная там функция как асимптотика решения ИДУ содержит неопределенную аддитивную константу. При этом остается в итоге необоснованным утверждение, что эта функция определяет асимптотику ВН (хотя бы при каком-то значении этой константы).

Подход, используемый в данной работе и основанный на корректной постановке и изучении задачи для ВН на всей неотрицательной полуоси, доказательстве существования ее решения с учетом результатов [5], позволяет избежать указанных выше проблем. В частности, пропадает необходимость доказательства дважды непрерывной дифференцируемости ВН и получения для нее верхних оценок при больших значениях НК (для I модели для обоснования полученной в [31] асимптотики ВН при больших значениях НК использовались и уточнялись оценки из [32], но для модели II аналогичные оценки автором [1] получены не были, они получены им только для КЛ-модели со стохастическими премиями (см.: также [3])). Кроме того, используемый подход позволяет провести численные расчеты для ВН, сравнить результаты этих расчетов для моделей I и II, дать их экономическую интерпретацию.

Адекватность построенных решений и расчетов демонстрирует, в частности, факт близости графиков функций ВН в моделях I и II при часто поступающих премиях малой величины в модели II, если только ожидаемые премии в единицу времени равны для обеих моделей. Этот факт говорит также в пользу возможности приближенного рассмотрения процесса поступления премий как детерминированного процесса в предположении о том, что премии поступают гораздо чаще, чем предъявляются иски, что лежит в основе классической КЛ-модели.

В то же время результаты расчетов позволяют проанализировать, в каких случаях использование классической КЛ-модели в качестве исходного процесса риска может завышать или занижать ВН по сравнению с теми ее значениями, которые дает модель, основанная на процессе риска со стохастическими премиями. В частности, при выполнении условия положительности нагрузки безопасности в исходной модели ВН, вычисленная в соответствии с моделью I, оказывается завышенной на всей неотрицательной полуоси значений НК. При этом для обеих моделей применение инвестиций существенно увеличивает ВН для небольших значений НК по сравнению с соответствующими моделями без инвестиций (классической КЛ-моделью и КЛ-моделью со стохастическими премиями). При отрицательных же значениях нагрузки безопасности, когда в исходных моделях риска разорение наступает с вероятностью единица, применение инвестиций с постоянной структурой портфеля при условии его надежности всегда дает положительные значения ВН. Таким образом, применение инвестиций эффективно компенсирует собственный риск страховщика при высоких значениях этого риска. Этот вывод, сделанный на основе изучения решений задач на всей неотрицательной полуоси (для модели II – в данной работе и для модели I – в [8]–[10]), невозможно было сделать на основании сравнения лишь их асимптотического поведения при больших значениях НК, как в [31], где утверждалось, что "в страховании инвестиции в рисковые активы опасны". Оказывается, что при небольших значениях НК вывод другой: инвестиции в рисковые активы при небольших значениях НК не только не опасны, но и необходимы в целях повышения платежеспособности. Более точно об этом говорят результаты исследования оптимального управления инвестициями в КЛ-модели при наличии ограничений с целью минимизации вероятности разорения, опирающиеся, в частности, на результаты исследования модели I (см. [8]).

Сравнение результатов расчетов для ВН по моделям I и II при неположительных нагрузках безопасности в исходных моделях риска и при одинаковых ожидаемых премиях показало, что выводы зависят от показателей рискованности моделей $i_{r,\,\mathrm{I}}$ и $i_{r,\,\mathrm{II}}$, определенных в (1.29) и (5.13) соответственно. Наиболее рискованным является случай неположительности этого показателя – это случай, когда график вероятности неразорения имеет перегиб (см. подробнее обсуждение этого случая в п. 6.2).

Авторы выражают благодарность А.А. Абрамову за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойков А.В.* Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИ им. В.А. Стеклова РАН, 2003.
2. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.
3. *Бойков А.В.* Модель Крамéра–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47. Вып. 3. С. 549–553.
4. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения // Обозрение прикладной и промышленной математики (секция "Финансовая и страховая математика"). 2009. Т. 16. Вып. 6. С. 961–981.
5. *Белкина Т.А.* Теоремы достаточности для вероятности неразорения в динамических моделях страхования с учетом инвестиций // Анализ и моделирование экономических процессов (под ред. В.З. Беленького). Вып. 8. М.: ЦЭМИ РАН, 2011. С. 61–74.
6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
7. *Konyukhova N.B.* Singular problems for systems of nonlinear functional-differential equations // Int. Sci. J. Spectral and Evolution Problems. 2010. V. 20. P. 199–214.
8. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамéра–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований // Обозрение прикладной и промышленной математики (секция "Финансовая и страховая математика"). 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 3–24.
9. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Сингулярная начальная задача для линейного интегродифференциального уравнения, возникающего в моделях страховой математики // Int. Sci. J. Spectral and Evolution Problems. 2011. V. 21. № 1. P. 40–54.
10. *Belkina T., Konyukhova N., Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models // Springer Proceedings in Mathematics: Proc. Int. Conf. on Differential and Difference Equations and Applications (in honour of Prof. Ravi P. Agarval). Portugal, July 4–8, 2011.
11. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
12. *Grandell J.* Aspects of risk theory. Berlin-New York: Springer, 1991.
13. *Белкина Т.А., Куркина А.О.* Об оптимальном управлении инвестициями в модели Крамéра–Лундберга со стохастическими премиями // Анализ и моделирование экономических процессов (под ред. В.З. Беленького). Вып. 2. М.: ЦЭМИ РАН, 2005. С. 103–114.

14. *Белкина Т.А., Куркина А.О.* Асимптотики вероятности неразорения в динамической модели страхования // Анализ и моделирование экономических процессов (под ред. В.З. Беленького). Вып. 4. М.: ЦЭМИ РАН, 2007. С. 67–82.
15. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
16. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
17. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
18. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнении. М.: Мир, 1968.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
20. *Абрамов А.А.* О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 4. С.733–737.
21. *Биргер Е.С., Ляликова* (*Конюхова*) *Н.Б.* О нахождении для некоторых систем обыкновенных уравнений решений с заданным условием на бесконечности // I: Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 979–990; II: Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 3. С. 446–453.
22. *Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
23. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б., Балла К.* Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Comput. Math. Banach Center Pubis. 1984. V. 13. P. 319–351.
24. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б.* Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
25. *Abramov A.A.*, *Konyukhova N.B.* Transfer of admissible boundary conditions from a smgularpoint for systems of linear ordinary differential equations // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. V. 1. № 4. P. 245–265.
26. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 3. С. 629–645.
27. *Абрамов А.А., Диткин В.В., Конюхова Н.Б. и др.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1155–1173.
28. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
29. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
30. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
31. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous // Finance Stochast. 2002. V. 6. № 2. P. 227–235.
32. *Kalashnikov V., Norberg R.* Rower tailed ruin probabilities in the presence of risky investments // Stoch. Proc. Appl. 2002. V. 98. P. 211–228.