Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 5–29

УДК 517.91/.93

СИНГУЛЯРНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СТРАХОВАНИЯ С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИЙ

© 2014 г. **Т. А. БЕЛКИНА, Н. Б. КОНЮХОВА, С. В. КУРОЧКИН**

Аннотация. Приводятся основные результаты исследования двух математических моделей страхования с учетом поведения страховой компании на финансовом рынке — вложение постоянной доли капитала в рисковый актив (акции) и оставшейся доли — в безрисковый актив (банковский счет); заменой параметров — характеристик акций — такая стратегия сводится к случаю вложения всего капитала в рисковый актив. Первая модель основана на классическом процессе риска Крамéра—Лундберга при экспоненциальном распределении размеров страховых требований (исков); в основе второй модели — модификация классического процесса риска (так называемый процесс риска со случайными премиями) при экспоненциальных распределениях как размеров исков, так и размеров страховых взносов (премий). Для вероятности неразорения страховой компании за бесконечное время (как функции ее начального капитала) возникают сингулярные задачи для линейных интегродифференциальных уравнений (ИДУ) второго порядка, определенных на полубесконечном интервале и обладающих неинтегрируемыми особенностями в нуле и на бесконечности: первая модель приводит к сингулярной начальной задаче с ограничениями для ИДУ с вольтерровым интегральным оператором, вторая — к более сложной краевой задаче с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ с невольтерровым интегральным оператором. Задачи для ИДУ сводятся к эквивалентным сингулярным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Приводятся теоремы существования и единственности решений с описанием их свойств и глобального поведения, даны асимптотические представления решений в окрестностях особых точек. Предложены эффективные алгоритмы численного нахождения решений, приведены результаты расчетов и дана их экономическая интерпретация.

1. Введение

По теме, указанной в заголовке статьи, дается краткий обзор основных результатов авторов (и сопутствующих ранее полученных) в переработанном и дополненном виде: проводится сравнение двух математических моделей страхования при одинаковом поведении страховой компании на финансовом рынке, предполагающем вложение текущего капитала (ТК) компании в рисковый актив — акции, цена которых моделируется геометрическим броуновским движением. (Эти модели охватывают и более общий случай постоянной структуры инвестиций — вложение постоянной доли ТК в рисковый актив (акции), а оставшейся доли — в безрисковый актив (банковский счет при постоянной процентной ставке): этот случай сводится к предыдущему изменением параметров задачи — характеристик акций, что коротко обсуждается далее.)

Модель I основана на классическом процессе риска Крамéра—Лундберга (КЛ) при экспоненциальном распределении размеров страховых требований (исков). В модели КЛ процесс, описывающий изменение капитала, складывается из детерминированного процесса поступления страховых взносов (премий) и сложного пуассоновского процесса страховых выплат (см., например, [25, 32]). В описанной в [16, 17, 24, 36] модифицированной модели КЛ процесс поступления премий также является сложным пуассоновским процессом, причем с параметрами, отличными от параметров процесса страховых выплат (следуя [16, 24, 36], соответствующую модель будем называть моделью КЛ со стохастическими (случайными) премиями). Модель II основана на модели КЛ со случайными премиями при экспоненциальных распределениях как размеров исков, так и размеров премий.

Одним из центральных вопросов в динамических моделях страхования является определение или оценка вероятности неразорения (ВНР), являющейся традиционной детерминированной характеристикой платежеспособности страховой компании. В большинстве рассматриваемых моделей динамика капитала страховой компании описывается однородным марковским процессом с непрерывным временем. В частности, при инвестировании капитала в рисковые активы этот процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением. В таких процессах для ВНР как функции начального капитала (НК) при определенных предположениях относительно свойств этой функции можно получить ИДУ, используя аппарат производящих операторов (см, например, [10,31] и цитированную там литературу). ИДУ определены на $\mathbb{R}_+$, и неотрицательные на $\mathbb{R}_+$ решения этих ИДУ, не превосходящие единицы и стремящиеся к единице на бесконечности, если таковые существуют, действительно определяют искомую вероятность, что может быть доказано с привлечением вероятностных методов (см. подробнее [9] и цитированную там литературу). В частности, в [9] обоснованы, в указанном смысле, задачи для изучаемых в данной работе моделей I и II.

Для каждой из этих моделей ВНР страховой компании за бесконечное время (как функция ее НК) является решением сингулярной задачи для линейного ИДУ второго порядка, определенного на полубесконечном интервале и обладающего неинтегрируемыми особенностями в нуле и на бесконечности (см. [11–13] и библиографию там). Модель I приводит к сингулярной начальной задаче с ограничениями для ИДУ с вольтерровым интегральным оператором и подробно изучена в [11,12]. Модель II приводит к более сложной краевой задаче (КрЗ) с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ с вольтерровым и невольтерровым интегральными операторами; она поставлена и изучена в [13].

В данной работе представлены основные результаты [11–13] (с учетом результатов, ранее полученных другими авторами): даны постановки сингулярных задач для ИДУ и описаны способы их сведения к эквивалентным сингулярным задачам для ОДУ; приведены теоремы существования и единственности решений, даны асимптотические представления решений в окрестностях особых точек и описано глобальное поведение решений поставленных задач; представлены эффективные алгоритмы численного нахождения решений, приведены результаты расчетов и дана их интерпретация (некоторые опечатки и неточности, допущенные в [11–13], здесь исправлены). Для полноты изложения мы приводим краткие доказательства некоторых утверждений, ввиду их важности, или указываем схему таких доказательств.

Далее, в частности, используются обозначения: $\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A; $\mathbf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X. Остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

2. Постановки сингулярных задач с ограничениями для интегродифференциальных уравнений второго порядка

Прежде всего сформулируем здесь две сингулярные задачи для ИДУ, связанные с моделями I и II и подлежащие изучению. Описание самих моделей, приводящих к таким задачам, дано в следующем разделе.

2.1. Задача 1: сингулярная задача для модели I. В модели I для ВНР $\varphi(u)$ (как функции НК u) возникает ИДУ второго порядка с вольтерровым интегральным оператором. ИДУ определено на $\mathbb{R}_+$ и обладает особенностями при $u \to +0$ и $u \to \infty$. Ставится следующая сингулярная задача для этого ИДУ с ограничениями на область значений решения:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\,[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.1}$$

$$\{|\lim_{u\to+0}\varphi(u)|,\ |\lim_{u\to+0}\varphi'(u)|\} < \infty, \qquad \lim_{u\to+0}[c\,\varphi'(u) - \lambda\,\varphi(u)] = 0, \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u) = 0. \tag{2.4}$$

Здесь, если не оговорено особо, все параметры a, b, c, λ и m — действительные положительные числа, J_m — вольтерров интегральный оператор,

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(u-x)\exp\,(-x/m)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(s)\exp\big(-(u-s)/m\big)\,ds, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.5}$$

где $J_m : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$, $C[0,\infty)$ — вещественное линейное пространство непрерывных функций, определенных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$.

Второе предельное условие при $u \to 0$ есть следствие первого и самого ИДУ: условия (2.2) влекут в (2.1) предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.1) при $u \to +0$ (любое решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи без начальных данных (2.1), (2.2) должно удовлетворять ИДУ (2.1) вплоть до особой точки $u = 0$).

«Укороченная» задача (2.1)–(2.3) (сингулярная задача с ограничениями) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (2.4).

2.2. Задача 2: сингулярная задача для модели II. В модели II для ВНР $\varphi(u)$ (как функции НК u) возникает ИДУ второго порядка с вольтерровым и невольтерровым интегральными операторами. ИДУ определено на $\mathbb{R}_+$ и обладает особенностями при $u \to +0$ и $u \to \infty$. Ставится следующая сингулярная нелокальная задача для этого ИДУ с ограничениями на область значений решения:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.6}$$

$$|\lim_{u\to+0}\varphi(u)| < \infty, \qquad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = 0, \tag{2.7}$$

$$(\lambda + \lambda_1)\lim_{u\to+0}\varphi(u) = \frac{\lambda_1}{n}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)\,dy, \tag{2.8}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.9}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to+\infty}\varphi'(u) = 0. \tag{2.10}$$

Здесь, если не оговорено особо, все параметры a, b, λ, λ_1, m и n — действительные положительные числа, J_m — вольтерров интегральный оператор, определенный в (2.5), и $J_{1,n}$ — невольтерров интегральный оператор,

$$(J_{1,n}\varphi)(u) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \varphi(u+y)\exp(-y/n)\,dy = \frac{1}{n}\int\limits_u^\infty \varphi(s)\exp(-(s-u)/n)\,ds, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

где $J_{1,n} : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$.

Второе равенство в (2.11) можно трактовать как преобразование невольтеррового интегрального оператора с отклоняющимся аргументом в сингулярный вольтерров оператор. По крайней мере, суммарный оператор $J_{m,n} : (J_{m,n}\varphi)(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$, есть сингулярный невольтерров[1] оператор.

Предельные условия в нуле (2.7) и нелокальное соотношение (2.8) влекут в (2.6) предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.6) при $u \to +0$ (решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи (2.6)–(2.10), если таковое существует, должно удовлетворять ИДУ (2.6) вплоть до особой точки $u = 0$). Из условий (2.7) также следует, что первая производная от решения, вообще говоря, может быть неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией.

«Укороченная» задача (2.6)–(2.9) (сингулярная задача с ограничениями и нелокальным условием в нуле) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (2.10).

3. Происхождение задач: динамические модели страхования с инвестициями в рисковые активы и вероятность неразорения страховой компании

3.1. Классическая модель теории риска Кра́мера—Лундберга. Классический процесс риска в непрерывном времени (с детерминированным процессом поступления премий с постоянной интенсивностью $c > 0$) имеет вид (см., например, [25, 32]):

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

[1]По поводу определений (не)вольтерровых операторов для классов систем функционально-дифференциальных уравнений (включающих ИДУ как частный случай), в том числе нелинейных и сингулярных, и исследований этих уравнений см., например, [7, 23, 34] и библиографию там.

Здесь R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t; u — величина НК; c — скорость поступления страховых взносов (c — величина премии в единицу времени, ct — совокупный страховой взнос к моменту времени t); сумма в правой части — совокупные страховые выплаты; $N(t)$ — однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число исков, предъявленных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; $Z_1, Z_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$), которые определяют размеры предъявленных исков и не зависят от процесса $N(t)$ (Z_j — выплата по иску с номером j, случайный момент предъявления которого и определяет момент j-го скачка процесса $N(t)$).

Для процесса риска (3.1) приведем классическое определение относительной «нагрузки безопасности» — величины, характеризующей ожидаемый «удельный доход» страховой компании в единицу времени (см., например, [25, 32]).

Определение 3.1. *Нагрузкой* (*коэффициентом*) *безопасности* для процесса риска (3.1) называется величина

$$\rho_1 = (c - \lambda m)/(m\lambda), \tag{3.2}$$

а условие

$$c - \lambda m > 0 \tag{3.3}$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Обозначим $\tau = \inf\{t : R_t < 0\}$ — момент разорения, тогда $\mathbf{P}(\tau < \infty)$ — вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени.

Следующее утверждение является классическим результатом теории риска КЛ (см., например, [32]).

Утверждение 3.1. *При выполнении условия* (3.3) *и существовании константы* $R > 0$ (*«коэффициент Лундберга»*), *такой, что справедливо равенство*

$$\int_0^\infty [1 - F(x)] \exp(Rx) dx = c/\lambda, \tag{3.4}$$

вероятность разорения $\xi(u)$ (*как функция НК*) *допускает оценку*

$$\xi(u) = \boldsymbol{P}(\tau < \infty) \leqslant \exp(-Ru), \qquad u \geqslant 0. \tag{3.5}$$

При этом, если распределение величин страховых выплат экспоненциально,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \qquad m > 0, \qquad x \geqslant 0, \tag{3.6}$$

то $R = (c - \lambda m)/(mc) > 0$, *и ВНР* $\varphi(u) = 1 - \xi(u)$ *задается точной формулой*:

$$\varphi(u) = \varphi_1(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} \exp\left(-\frac{c - \lambda m}{mc}\, u\right), \qquad 0 \leqslant u < \infty. \tag{3.7}$$

Замечание 3.1. Уравнение (3.4) в модели КЛ называется характеристическим уравнением. Оно может быть записано также в виде

$$\lambda[\mathbf{E}\exp(RZ_i) - 1] - cR = 0. \tag{3.8}$$

Если существует положительное решение R этого уравнения, то процесс $\exp(-RR_t)$ является мартингалом, при этом $\mathbf{E}\exp(-RR_t) = \exp(-Ru)$ (в чем можно убедиться непосредственно с учетом (3.8)). Использование этого факта позволяет легко получать оценки для вероятности разорения, в частности, оценку (3.5) и более общие оценки (см., например, [32]).

Замечание 3.2. Интересна история создания теории коллективного риска и теории случайных процессов. Приведем очень краткие сведения об этом (подробнее см., например, [24, 35] и сайт ВШЭ по адресу `www.hse.ru/news/avant/85659995.html`).

Одним из признанных основателей теории коллективного риска является шведский ученый Филип Лундберг (Ernest Filip Oskar Lundberg, 1876–1965). Возникновение математической теории коллективного риска связано с именем выдающегося шведского математика Гаральда Крамéра

(Carl Harald Cramér, 1893–1985). Ссылки на основные публикации этих ученых и описание их результатов можно найти, в частности, в [32].

Днем рождения финансовой математики считается 29 марта 1900 года: в этот день Луи Башелье (L. Bachelier), ученик Анри Пуанкаре, защитил диссертацию под названием «Теория спекуляции» [28], в которой, в частности, обосновал, что эволюция цен активов на финансовом рынке может быть описана некоторым случайным процессом с непрерывными траекториями (который теперь называют винеровским процессом или броуновским движением). По стечению обстоятельств, только спустя много десятилетий Луи Башелье был признан отцом-основателем финансовой математики.

Наряду с винеровским процессом, понятие пуассоновского процесса, введенное Лундбергом при разработке теории коллективного риска, послужило основой для создания современной теории случайных процессов.

3.2. Модель Крамéра—Лундберга со случайными премиями. В этой модели, описанной в [16, 17] (см. также [24, раздел 9.5]), процесс риска в непрерывном времени имеет вид:

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Здесь R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t; u — величина НК; первая сумма в правой части — совокупный страховой взнос к моменту времени t, $N_1(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ ($\mathbf{E}N_1(t) = \lambda_1 t$; $N_1(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число премий, внесенных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; $C_1, C_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(y)$ ($G(0) = 0$, $\mathbf{E}C_1 = n < \infty$), которые определяют размеры премий и предполагаются независимыми от процесса $N_1(t)$ (C_i — взнос с номером i, случайный момент поступления которого и определяет момент i-го скачка процесса $N_1(t)$); вторая сумма — совокупные страховые выплаты — та же, что в (3.1). Процессы суммарных премий и суммарных исков также предполагаются независимыми.

Для процесса риска (3.9) введем определение относительной нагрузки безопасности, по аналогии с определением 3.1 для классической модели КЛ.

Определение 3.2. *Нагрузкой безопасности* для процесса риска (3.9) называется величина

$$\rho_2 = (\lambda_1 n - \lambda m)/(\lambda m), \tag{3.10}$$

а условие

$$\lambda_1 n - \lambda m > 0 \tag{3.11}$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Если размеры исков и премий экспоненциально распределены,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad G(y) = 1 - \exp(-y/n), \quad m, n > 0, \quad x, y \geqslant 0, \tag{3.12}$$

то ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению (ИУ)

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u), \qquad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.13}$$

При выполнении условия (3.11) ВНР $\varphi(u)$ как положительное на $\mathbb{R}_+$ решение ИУ (3.13), не превосходящее единицы, дается точной формулой [16]:

$$\varphi(u) = \varphi_2(u) = 1 - \frac{\lambda\,(n+m)}{n\,(\lambda+\lambda_1)} \exp\left(-\frac{\lambda_1 n - \lambda m}{mn(\lambda+\lambda_1)}\,u\right), \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.14}$$

Замечание 3.3. В модели КЛ со случайными премиями характеристическое уравнение, обеспечивающее мартингальность процесса $\exp(-RR_t)$ и возможность получения оценок для вероятности разорения, в том числе оценки типа (3.5), имеет вид (см. [16, 36])

$$\lambda[\mathbf{E}\exp(RZ_i) - 1] + \lambda_1[\mathbf{E}\exp(-RC_i) - 1] = 0, \tag{3.15}$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda \int_0^\infty \exp(Rx) dF(x) + \lambda_1 \int_0^\infty \exp(-Ry) dG(y) = \lambda + \lambda_1. \tag{3.16}$$

3.3. Модели страхования с инвестициями в рисковые активы. Рассмотрим теперь случай, когда капитал непрерывно инвестируется в акции, динамика цены которых описывается моделью геометрического броуновского движения:

$$dS_t = S_t(a\,dt + b\,dw_t), \qquad t \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Здесь S_t — цена акции в момент времени t, a — ожидаемая доходность акции, $0 < b$ — волатильность, $\{w_t\}$ — стандартный винеровский процесс.

Обозначив через X_t капитал компании на момент времени t, получаем $X_t = \theta_t S_t$, где θ_t — количество акций в портфеле. Тогда изменение капитала во времени описывается соотношением

$$dX_t = \theta_t dS_t + dR_t,$$

где R_t — исходный процесс риска.

Принимая во внимание (3.17), получаем:

$$dX_t = aX_t\,dt + bX_t\,dw_t + dR_t, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.18}$$

При этом в моделях с инвестициями в рисковые активы, в отличие от исходных процессов риска, положительность «нагрузки безопасности», т. е. выполнение условия (3.3) (классическая модель) или условия (3.11) (модель КЛ со стохастическими премиями), не предполагается.

Для динамического процесса (3.18) с исходным процессом риска (3.1) функция ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет следующему линейному ИДУ (см., например, [10, 31] и библиографию там):

$$\lambda \int_0^u \varphi(u-z)\,dF(z) - \lambda\,\varphi(u) + (au+c)\,\varphi'(u) + (b^2/2)\,u^2\,\varphi''(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.19}$$

При этом в особой точке $u = 0$ должно выполняться предельное условие, обеспечивающее вырождение ИДУ (3.19) при $u \to +0$:

$$\lim_{u \to +0} [c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0. \tag{3.20}$$

Из (3.19), в предположении экспоненциального распределения размеров выплат (3.6), получаем ИДУ (2.1) для модели I.

Для динамического процесса (3.18) с исходным процессом риска (3.9) функция ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}_+$ следующему линейному ИДУ, полученному в [17]:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) = \lambda \left[\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-x)\,dF(x)\right] + \lambda_1 \left[\varphi(u) - \int_0^\infty \varphi(u+y) dG(y)\right]. \tag{3.21}$$

При этом в особой точке $u = 0$ должно выполняться предельное нелокальное условие, обеспечивающее вырождение ИДУ (3.21) при $u \to +0$:

$$(\lambda + \lambda_1) \lim_{u \to +0} \varphi(u) = \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(y)\,dG(y) \tag{3.22}$$

(по аналогии с локальным условием (3.20) для модели I). По поводу необходимости условия типа (3.22) см. подробнее в [13] и здесь далее (в [17] это условие для (3.21) не приводится и не обсуждается).

Из (3.21), в предположении экспоненциального распределения (3.12) размеров выплат и размеров премий, получаем ИДУ (2.6) для модели II.

Замечание 3.4. Рассматриваемые модели охватывают и более общие стратегии инвестиций с постоянной структурой, когда в акции (с ожидаемой доходностью μ и волатильностью σ) вкладывается не весь ТК, а только его фиксированная доля α $(0 < \alpha < 1)$, а оставшаяся положительная доля $1 - \alpha$ инвестируется в безрисковый актив — банковский счет при постоянной процентной ставке $r > 0$. Случай $0 < \alpha < 1$ сводится к случаю $\alpha = 1$ простой заменой параметров задачи (характеристик акций), а именно: $a = \alpha\mu + (1-\alpha)r$ и $b = \alpha\sigma$ (подробнее см. [11–13]). В результате достаточно рассмотреть только модели с вложением всего ТК в рисковые активы, что и осуществляется в [11–13] и данной работе.

Сингулярные задачи и отвечающие им модели становятся другими, если некоторые из параметров в рассматриваемых ИДУ обращаются в нуль: при $b = 0$ получаем вырожденные задачи для страховых моделей с вложением всего ТК в безрисковые активы, при $c = 0$ или $\lambda_1 = 0$ — задачи для нестраховых моделей типа благотворительного фонда (отсутствуют страховые взносы). При этом переходы по параметрам от исходных задач к новым являются сингулярными при малых и/или больших значениях НК. Такие задачи и отвечающие им модели, представляющие самостоятельный математический интерес и интерес в теории коллективного риска, в данной работе не рассматриваются (за исключением тех вырожденных задач, которые получаются при $a = b = 0$ и отвечают моделям без инвестиций). Заметим только, что для модели I наиболее полное исследование задачи (2.1)–(2.4), включающее все «вырожденные» случаи, осуществлено в [30].

Замечание 3.5. Для модели I сингулярная задача для ИДУ (2.1), рассматриваемого на всей положительной полуоси (задача 1), впервые была поставлена и полностью исследована в [11, 12, 30]. Однако первый результат для ВНР $\varphi(u)$ как решения ИДУ (2.1) в предположении существования этого решения был получен в [31] и относился к асимптотическому представлению $\varphi(u)$ при больших значениях НК u.

Теорема 3.1 (см. [31]). *Пусть $b > 0$, а размеры выплат имеют экспоненциальное распределение, т. е. выполнено* (3.6). *Тогда*:

1. *Если выполнено «условие надежности акций», а именно, справедливо неравенство*

$$\rho = 2a/b^2 > 1, \tag{3.23}$$

то имеет место асимптотическое представление

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-\rho}[1 + o(1)], \quad u \to \infty, \tag{3.24}$$

с некоторой константой $K > 0$.

2. *Если $\rho < 1$, то $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.*

4. Задача 1: формулировка основных результатов

Сингулярная задача для ИДУ (2.1)–(2.4) с ограничениями на область значений решения может быть представлена в эквивалентном параметризованном виде:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

$$\lim_{u\to+0} \varphi(u) = C_0, \qquad \lim_{u\to+0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c, \tag{4.2}$$

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty} \varphi'(u) = 0, \tag{4.3}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

где C_0 — неизвестный параметр, значение которого подлежит определению.

Ниже сформулированы основные следствия из результатов [11, 12].

4.1. Существование, единственность и поведение решения; сопутствующая сингулярная задача Коши для ОДУ.

Лемма 4.1. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, где $c > 0$, $\lambda > 0$, $m > 0$, а числа $a, b \in \mathbb{R}$ имеют любой знак, и пусть существует решение $\varphi_1(u) = \varphi(u, C_0)$ сингулярной линейной задачи* (4.1)–(4.3) (*без ограничений на область значений решения*) *для некоторого $C_0 \in \mathbb{R}$.*

Тогда такое C_0 единственно, $0 < C_0 < 1$, функция $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ удовлетворяет требованиям (4.4) *и является единственным решением сингулярной линейной задачи с ограничениями* (4.1)–(4.4), *причем $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$, так что $\varphi(u)$ — строго возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция.*

Доказательство. 1. Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ — другое решение задачи (4.1)–(4.3). Тогда возможны два варианта: первый вариант, когда

$$\lim_{u\to+0}\varphi_2(u)=\lim_{u\to+0}\varphi_1(u), \tag{4.5}$$

и второй вариант, когда

$$\lim_{u\to+0}\varphi_2(u)\neq\lim_{u\to+0}\varphi_1(u). \tag{4.6}$$

Для случая выполнения (4.5) рассмотрим разность $\widetilde{\varphi}(u)=\varphi_2(u)-\varphi_1(u)$. Тогда $\widetilde{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (4.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u\to+0}\widetilde{\varphi}(u)=\lim_{u\to\infty}\widetilde{\varphi}(u)=0. \tag{4.7}$$

Если нетривиальное решение задачи (4.1), (4.7) существует и принимает положительные значения на $\mathbb{R}_+$, то оно должно иметь положительный максимум на $\mathbb{R}_+$ (если $\widetilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на $\mathbb{R}_+$, то рассматриваем функцию $-\widetilde{\varphi}(u)$). Пусть $0<\widetilde{u}$ — точка максимума этого решения: $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})=\max\limits_{u\in[0,\infty)}\widetilde{\varphi}(u)>0$. Тогда должно быть $\widetilde{\varphi}'(\widetilde{u})=0$, $\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u})\leqslant 0$. Но из ИДУ (4.1) с учетом формулы (2.5) получаем противоречие:

$$(b^2/2)\widetilde{u}^2\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u})=\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})-\lambda m^{-1}\exp(-\widetilde{u}/m)\int\limits_0^{\widetilde{u}}\widetilde{\varphi}(s)\exp(s/m)\,ds\geqslant$$

$$\geqslant\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\left[1-m^{-1}\exp(-\widetilde{u}/m)\int\limits_0^{\widetilde{u}}\exp(s/m)\,ds\right]=\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\exp(-\widetilde{u}/m)>0. \tag{4.8}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(u)\equiv 0$.

Рассмотрим случай выполнения (4.6). Тогда, как легко проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\widehat{\varphi}(u)=c_1\varphi_1(u)+c_2\varphi_2(u)$, что $\widehat{\varphi}(u)\not\equiv 1$ и является решением ИДУ (4.1), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u\to+0}\widehat{\varphi}(u)=\lim_{u\to\infty}\widehat{\varphi}(u)=1.$$

Если существует $\widehat{u}$ такое, что $\widehat{\varphi}(\widehat{u})>1$, то рассуждаем так же, как в первом варианте. Если предположить, что $\widehat{\varphi}(u)\leqslant 1$ для любого $u\geqslant 0$, то это противоречит условиям (4.2), из которых следует, что $\lim\limits_{u\to+0}\widehat{\varphi}'(u)=\lambda/c>0$. Следовательно, не существует другого решения задачи (4.1)–(4.3), удовлетворяющего условию (4.6).

2. Остальные утверждения аналогично доказываются от противного. □

Далее, ИДУ (4.1) второго порядка можно свести к ОДУ третьего порядка, что является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (4.1) дифференцирование и, учитывая равенство

$$(J_m\varphi)'(u)=[\varphi(u)-(J_m\varphi)(u)]/m, \tag{4.9}$$

убрать в полученном ИДУ третьего порядка интеграл $(J_m\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (4.1).

В результате получим, в частности, что сингулярная начальная задача (4.1), (4.2) для ИДУ перейдет в сингулярную задачу Коши (ЗК) для ОДУ.

Лемма 4.2. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, где* $c>0$, $b\neq 0$, $\lambda\neq 0$, $m>0$, $a\in\mathbb{R}$.

Тогда при любом фиксированном значении параметра $C_0\in\mathbb{R}$ *сингулярная «интегродифференциальная» начальная задача* (4.1), (4.2) *эквивалентна сингулярной «дифференциальной» ЗК вида*:

$$(b^2/2)u^2\varphi'''(u)+\left[c+(b^2+a)u+b^2u^2/(2m)\right]\varphi''(u)+(a-\lambda+c/m+au/m)\,\varphi'(u)=0,\ u>0, \tag{4.10}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u)=C_0,\quad \lim_{u\to+0}\varphi'(u)=\lambda C_0/c,\quad \lim_{u\to+0}\varphi''(u)=[m(\lambda-a)-c)\lambda C_0/(mc^2). \tag{4.11}$$

Доказательство. В одну сторону (от ИДУ (4.1) к ОДУ (4.10)) утверждение очевидно — оно следует из описанного выше способа получения ОДУ (4.10). Третье предельное условие в (4.11) есть следствие первых двух и самого ОДУ (4.10), обеспечивая его вырождение при $u \to +0$.

Пусть теперь $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(u, C_0)$ — решение сингулярной ЗК (4.10), (4.11). Надо доказать, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет ИДУ (4.1).

Обозначим левую часть ИДУ (4.1) с функцией $\widetilde{\varphi}(u)$ через $g(u)$. Надо показать, что $g(u) \equiv 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (4.10), нетрудно убедиться (см. подробнее [12, 30]), что $g(u)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка

$$g'(u) + g(u)/m = 0, \quad u > 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$g(u) = \widetilde{C}\exp(-u/m), \quad u \geqslant 0,$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная. Но, учитывая, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет условиям (4.11), получаем из ИДУ (4.1), что $g(0) = 0$. Это влечет $\widetilde{C} = 0$, т. е. $g(u) \equiv 0$. □

Линейное ОДУ третьего порядка (4.10) обладает иррегулярными (сильными) особенностями[1] ранга 1 при $u \to +0$ и при $u \to \infty$ Для изучения сингулярных ЗК в окрестностях особых точек полученного ОДУ третьего порядка в [11, 12] используются также результаты [15, 21, 22].

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда*:

1. *Решение* $\varphi(u, C_0)$ *сингулярной ЗК* (4.10), (4.11) *для ОДУ* (*соответственно, эквивалентной начальной задачи* (4.1), (4.2) *для ИДУ*) *существует, единственно и при малых и представимо асимптотическим рядом*

$$\varphi(u, C_0) \sim C_0 \left[1 + \frac{\lambda}{c}\left(u + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^k/k\right)\right], \qquad u \sim +0, \tag{4.12}$$

где постоянные коэффициенты D_k *не зависят от* C_0 *и определяются формальной подстановкой ряда* (4.12) *в ОДУ* (4.10), *а именно, по рекуррентным формулам*:

$$D_2 = -[(a-\lambda)/c + 1/m], \tag{4.13}$$

$$D_3 = -[D_2(b^2 + 2a - \lambda + c/m) + a/m]/(2c), \tag{4.14}$$

$$D_k = -\{D_{k-1}[(k-1)(k-2)b^2/2 + (k-1)a - \lambda + c/m] + D_{k-2}[(k-3)b^2/2 + a]/m\}/[c(k-1)], \tag{4.15}$$
$$k = 4, 5, \ldots.$$

2. *Все решения ОДУ* (4.10) (*сингулярной начальной задачи* (4.1), (4.2) *для ИДУ*) *имеют конечные пределы при* $u \to \infty$ *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (3.23) — *«условие надежности акций»*.

Теорема 4.1. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры* a, b^2, c, λ, m — *фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие* (3.23). *Тогда*:

1. *Сингулярная линейная задача с ограничениями* (4.1)–(4.4) *для ИДУ имеет, и при том единственное, решение* $\varphi(u)$, *которое является бесконечно дифференцируемой на* $(0, \infty)$ *строго возрастающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией. При положительных значениях всех параметров в ИДУ* (4.1) *неравенство* (3.23) *является необходимым и достаточным условием существования решения задачи* (4.1)–(4.4).

2. *Решение* $\varphi(u)$ *может быть получено как решение сингулярной начальной задачи с параметром* (4.1), (4.2) *для ИДУ* (*оно же есть решение эквивалентной сингулярной ЗК с параметром* (4.10), (4.11) *для ОДУ*), *где параметр* $C_0 > 0$ *выбирается из требований* (4.3) *как условие нормировки решения на бесконечности, а ограничения* (4.4) *выполняются для такого решения автоматически.*

3. *При малых* $u > 0$ *для решения* $\varphi(u)$ *справедливо асимптотическое представление* (4.12), *где* $0 < C_0 < 1$.

[1] По поводу классификации особых точек типа полюса для систем линейных ОДУ см., например, монографии [14, 18–20, 26], дополняющие друг друга.

4. *При больших u для решения $\varphi(u)$ справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - K\,u^{1-2a/b^2}[1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{4.16}$$

где $K = C_0\widetilde{K} > 0$ (значения $C_0 > 0$ и $\widetilde{K} > 0$ не могут быть найдены методами локального анализа.

5. *При выполнении неравенства $i_{\mathrm{r,I}} \geqslant 0$, где*

$$i_{\mathrm{r,I}} = m(a - \lambda) + c \tag{4.17}$$

определяет «фактор риска» для модели I, решение $\varphi(u)$ — вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция, а если $i_{\mathrm{r,I}} < 0$, то $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \widehat{u}]$, где $0 < \widehat{u}$ — точка перегиба.

Замечание 4.1. Утверждение 5 теоремы 4.1 здесь более точное, чем приведенное в [11, 12, 30], где постулируется без доказательства, что при более сильном неравенстве $i_{r,\mathrm{I}} > 0$ решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (4.1)–(4.4) есть вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция. Это несложное утверждение для малых значений $u > 0$ очевидно и следует из разложения (4.12) и формулы (4.13): $\varphi''(u) < 0$ при малых $u \geqslant 0$. При этом $\varphi''(u)$ не может поменять знак с ростом u. В самом деле, пусть для некоторого $\widetilde{u} > 0$ будет $\varphi''(\widetilde{u}) = 0$. Тогда из (4.10) получим $\varphi'''(\widetilde{u}) < 0$, но при $u > \widetilde{u}$ должно быть $\varphi''(u) > 0$, так что приходим к противоречию.

Кроме того, что не было замечено ранее, при $i_{r,\mathrm{I}} = 0$ решение $\varphi(u)$ остается вогнутой на $\mathbb{R}_+$ функцией. Это следует из формул (4.12)–(4.14), откуда $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) = -am/(2c) < 0$, так что в окрестности нуля величина $\varphi''(u)$ становится отрицательной и, как и выше, не может поменять знак с ростом u. Из тех же формул (4.12)–(4.14) следует, что при $i_{r,\mathrm{I}} < 0$ (а не при $i_{r,\mathrm{I}} \leqslant 0$, как ошибочно указано в [11, 12, 30]) функция $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \widehat{u}]$, где $0 < \widehat{u}$ — точка перегиба.

Замечание 4.2. Интересно заметить, что при $a < 0$ утверждение леммы 4.2 вместе с утверждением 1 леммы 4.3 оказались востребованными в исследованиях [29] модели оптимального управления инвестициями «при наличии ограничений на заимствования, включающих возможность коротких позиций». В этой, вообще говоря, нелинейной модели поведение функции Беллмана при малых значениях аргумента описывается сингулярной линейной ЗК вида (4.10), (4.11), а выполнения условия (3.23) не требуется.

Замечание 4.3. При выполнении условия (3.3) функция (3.7) является точным решением вырожденной задачи, к которой исходная сингулярная задача (2.1)–(2.4) сводится, если формально положить $a = b = 0$, а именно, решением следующей задачи для ИДУ:

$$c\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{4.18}$$

Эта задача эквивалентна ЗК с параметром и условием нормировки решения на бесконечности:

$$c\varphi''(u) + (c/m - \lambda)\,\varphi'(u) = 0, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.19}$$

$$\varphi(0) = C_0, \qquad \varphi'(0) = \lambda C_0/c, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{4.20}$$

Отсюда $C_0 = 1 - \lambda\,m/c$, $0 < C_0 < 1$, $\varphi'(0) > 0$, $\varphi''(0) < 0$, и справедлива формула (3.7), определяющая точное классическое решение для модели КЛ с положительной нагрузкой безопасности.

Замечание 4.4. Для задач (4.18) и (4.19), (4.20) величина $c = \lambda m$ является критическим значением параметра бифуркации: при $c \leqslant \lambda m$ эти задачи решений не имеют[1]. Для модели I, благодаря инвестициям, неравенство $\varphi(u) > 0$ на $\mathbb{R}_+$ выполняется даже при отрицательной величине фактора риска, т. е. при $i_{r,\mathrm{I}} < 0$, где $i_{r,\mathrm{I}}$ определено в (4.17).

[1] Для ВНР $\varphi(u)$ в классической модели КЛ при $c \leqslant \lambda m$ будет $\varphi(u) \equiv 0$ (см., например, [32]), что отвечает тривиальному решению начальной задачи для ИДУ в (4.18) (соответственно, для ОДУ (4.19)), а условие нормировки на бесконечности относится только к нетривиальным решениям.

4.2. Алгоритм численного нахождения решения. Приведенные выше утверждения теоремы 4.1 позволяют численно находить решение задачи (4.1)–(4.4) из решения вспомогательной сингулярной ЗК (4.10), (4.11) с параметром C_0, значение которого определяется из требований (4.3) как условий нормировки решения на бесконечности. Следуя, в частности, улучшенному алгоритму из [13], это можно осуществить следующим образом. В (4.10) полагаем $\psi(u) = \varphi'(u)$ и, учитывая (4.11), рассмотрим вспомогательную сингулярную ЗК:

$$(b^2/2)u^2\psi''(u) + [c + (b^2 + a)u + b^2u^2/(2m)]\psi'(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\psi(u) = 0, \quad u > 0, \quad (4.21)$$

$$\lim_{u\to+0} \psi(u) = 1, \quad \lim_{u\to+0} \psi'(u) = [m(\lambda - a) - c]/(mc) = -i_{r,\mathrm{I}}/(mc). \quad (4.22)$$

Решение $\psi(u)$ этой задачи существует, единственно и при малых $u > 0$ представимо асимптотическим рядом

$$\psi(u) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^{k-1}, \quad \psi'(u) \sim \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)D_k u^{k-2}, \quad u \sim +0, \quad (4.23)$$

где коэффициенты D_k ($k \geqslant 2$) определены в (4.13)–(4.15). Разложения (4.23) используем для приближенного переноса предельных условий (4.22) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u_0 > 0$. Решение $\varphi(u)$ исходной задачи (4.1)–(4.4) находим, используя соотношение

$$\varphi(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(s)ds\right]\left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds\right]^{-1}, \quad (4.24)$$

где $\psi(u)$ — решение задачи (4.21), (4.22).

Результаты расчетов для модели I при различных значениях параметров задачи приведены в [11, 12, 30] и в данной работе.

В заключение этого раздела заметим, что исследование вспомогательной сингулярной ЗК (4.1), (4.2) для ОДУ является также частью решения оптимизационной задачи — об оптимальном управлении инвестициями страховой компании (о решении такой оптимизационной задачи для модели I см. в [11]).

5. Задача 2: формулировка основных результатов

Сингулярную нелокальную задачу с ограничениями (2.6)–(2.10) для ИДУ перепишем в эквивалентном параметризованном виде:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

$$\lim_{u\to+0} \varphi(u) = C_0, \qquad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = 0, \quad (5.2)$$

$$\lim_{u\to+0} \varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda + \lambda_1)}\int_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)\,dy, \quad (5.3)$$

$$\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to+\infty} \varphi'(u) = 0, \quad (5.4)$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+. \quad (5.5)$$

Здесь C_0 — параметр, удовлетворяющий нелокальному условию (5.3).

Далее мы формулируем основные следствия из результатов [13] с некоторыми дополнениями и замечаниями (допущенные в [13] неточности и опечатки здесь исправлены).

5.1. Единственность решения и сопутствующая сингулярная нелокальная задача для ОДУ четвертого порядка.

Лемма 5.1. *Пусть в ИДУ* (5.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, причем* $b^2 > 0$, $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $m > 0$, $n > 0$, *а число* $a \in \mathbb{R}$ *любого знака. Тогда*:

1. *Если существует решение* $\varphi_1(u) = \varphi(u, C_0)$ *сингулярной линейной КрЗ с ограничениями* (5.1)–(5.5) *при некотором* $C_0 \in \mathbb{R}$, *то такое решение единственно.*
2. *Если существует решение* $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ *сингулярной линейной КрЗ* (*без ограничений*) (5.1)–(5.4) *при некотором* $C_0 \in \mathbb{R}$, *то для такого решения выполняются ограничения* (5.5) *и* $0 < C_0 < 1$.

Доказательство. 1. Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ — другое решение задачи (5.1)–(5.5). Тогда возможны два варианта: первый вариант, когда

$$\lim_{u\to+0} \varphi_1(u) = \lim_{u\to+0} \varphi_2(u), \tag{5.6}$$

и второй вариант, когда

$$\lim_{u\to+0} \varphi_1(u) \neq \lim_{u\to+0} \varphi_2(u). \tag{5.7}$$

Для случая выполнения (5.6) рассмотрим разность $\widetilde{\varphi}(u) = \varphi_2(u) - \varphi_1(u)$. Тогда $\widetilde{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (5.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u\to+0} \widetilde{\varphi}(u) = \lim_{u\to\infty} \widetilde{\varphi}(u) = 0. \tag{5.8}$$

Если нетривиальное решение задачи (5.1), (5.8) существует и принимает положительные значения на $\mathbb{R}_+$, то оно должно иметь положительный максимум на $\mathbb{R}_+$ (если $\widetilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на $\mathbb{R}_+$, то рассматриваем функцию $-\widetilde{\varphi}(u)$). Пусть $0 < \widetilde{u}$ — точка максимума этого решения: $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \max\limits_{u\in[0,\infty)} \widetilde{\varphi}(u) > 0$. Тогда должно быть $\widetilde{\varphi}'(\widetilde{u}) = 0$, $\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u}) \leqslant 0$. Но из ИДУ (5.1) с учетом формул (2.5) и (2.11) получаем противоречие:

$$(b^2/2)\widetilde{u}^2\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u}) = \lambda\,[\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) - (J_m\widetilde{\varphi})(\widetilde{u})] + \lambda_1\,[\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) - (J_{1,n}\widetilde{\varphi})(\widetilde{u})] \geqslant \lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\exp(-\widetilde{u}/m) > 0. \tag{5.9}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(u) \equiv 0$.

Рассмотрим случай выполнения (5.7). Тогда, как нетрудно проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\widehat{\varphi}(u) = c_1\varphi_1(u) + c_2\varphi_2(u)$, что $\widehat{\varphi}(u) \not\equiv 1$ и является решением ИДУ (5.1), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u\to+0} \widehat{\varphi}(u) = \lim_{u\to\infty} \widehat{\varphi}(u) = 1.$$

Если существует $u \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\widehat{\varphi}(u) > 1$, то рассуждаем так же, как для первого варианта. Если предположить, что $\widehat{\varphi}(u) \leqslant 1$ $\forall u > 0$, то получим неравенство

$$(J_{1,n}\widehat{\varphi})(0) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}(y)\exp(-y/n)\,dy < 1.$$

Отсюда, учитывая предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0} \widehat{\varphi}(u) = 1$, получим противоречие: условие (5.3) не выполняется. Следовательно, не существует другого решения задачи (5.1)–(5.5), удовлетворяющего условию (5.7).

2. Пусть теперь $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ — решение сингулярной линейной КрЗ без ограничений (5.1)–(5.4) при некотором $C_0 \in \mathbb{R}$. Докажем выполнение ограничения $\varphi(u) < 1$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$. Для этого сначала покажем, что при $u \to +0$ функция $\varphi(u)$ не может принимать наибольшее положительное значение. Предположим противное: $\varphi(u) \leqslant C_0$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$, где $\lim\limits_{u\to+0} \varphi(u) = C_0 > 0$. Но из (5.3) получаем противоречие: $(\lambda + \lambda_1)C_0 \leqslant \lambda_1 C_0$, что влечет $C_0 \leqslant 0$.

Пусть теперь в какой-то конечной точке $u > 0$ будет $\varphi(u) \geqslant 1$. Тогда функция $\varphi(u)$ должна иметь максимум на $\mathbb{R}_+$, превосходящий 1. Но, совершенно аналогично доказательству неравенства (5.9), в точке максимума получим противоречие.

Аналогично доказывается, что $\varphi(u)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $u \to +0$ и не может иметь отрицательный минимум на $\mathbb{R}_+$. □

Далее, ИДУ (5.1) второго порядка можно свести к ОДУ четвертого порядка, что, как и для модели I, является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (5.1) два дополнительных дифференцирования и, учитывая наряду с (4.9) равенство

$$(J_{1,n}\varphi)'(u) = [(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n, \tag{5.10}$$

убрать в полученном ИДУ четвертого порядка интегралы $(J_m\varphi)(u)$ и $(J_{1,n}\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (5.1) и промежуточное вспомогательное ИДУ третьего порядка.

В результате справедлива приведенная ниже лемма 5.2, где введены обозначения:

$$\begin{gathered} a_1 = 2(2 + a/b^2), \quad a_2 = (n-m)/(mn), \quad a_3 = 2\left[1 + (2a - \lambda - \lambda_1)/b^2\right], \\ a_4 = 2(1 + a/b^2)(n-m)/(mn), \qquad a_5 = -1/(mn), \\ a_6 = 2\left[a(n-m) + \lambda m - \lambda_1 n\right]/(b^2 mn), \qquad a_7 = -2a/(b^2 mn). \end{gathered} \tag{5.11}$$

Лемма 5.2. *Пусть для параметров в ИДУ* (5.1) *выполнены условия леммы* 5.1. *Тогда линейная сингулярная КрЗ* (5.1)–(5.4) *для ИДУ* (*без ограничений и с нелокальным условием в нуле*) *эквивалентна следующей линейной сингулярной КрЗ для ОДУ с нелокальным условием в нуле*:

$$u^2\varphi''''(u) + (a_1 + a_2 u)u\varphi'''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2)\varphi''(u) + (a_6 + a_7 u)\varphi'(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.12}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = \lim_{u\to+0}[u^3\varphi'''(u)] = 0, \tag{5.13}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda+\lambda_1)}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\exp\left(-y/n\right)dy, \tag{5.14}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u) = \lim_{u\to\infty}\varphi''(u) = \lim_{u\to\infty}\varphi'''(u) = 0. \tag{5.15}$$

Здесь C_0 — параметр, а значения a_j $(j = \overline{1,7})$ определены в (5.11).

Доказательство. В одну сторону (от ИДУ (5.1) к ОДУ (5.12)) утверждение очевидно — оно следует из описанного выше способа получения ОДУ (5.12). Пусть теперь $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(u, C_0)$ — решение сингулярной КрЗ (5.12)–(5.15). Надо доказать, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет ИДУ (5.1).

Обозначим левую часть (5.1) с этой функцией $\widetilde{\varphi}(u)$ через $g(u)$ и покажем, что $g(u) \equiv 0$. Нетрудно убедиться, учитывая способ получения ОДУ (5.12) (см. подробнее [13]), что $g(u)$ удовлетворяет ОДУ

$$g''(u) + \frac{(n-m)}{mn}\,g'(u) - \frac{1}{mn}\,g(u) = 0, \qquad 0 < u < \infty. \tag{5.16}$$

Общее решение ОДУ (5.16) имеет вид

$$g(u) = c_1\exp\left(-u/m\right) + c_2\exp\left(u/n\right), \qquad u \geqslant 0, \tag{5.17}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Учитывая определение $g(u)$ и предельные условия (5.15), получаем $\lim\limits_{u\to\infty}[g(u)/u^2] = 0$, что в (5.17) влечет $c_2 = 0$. Наконец, учитывая условия (5.13) и (5.14), получаем $g(0) = 0$, что в (5.17) влечет $c_1 = 0$. □

5.2. Вспомогательная сингулярная краевая задача для ОДУ третьего порядка и ее исследование. Полагая $\varphi'(u) = \psi(u)$, понижаем порядок ОДУ (5.12) и получаем для функции $\psi(u)$ вспомогательную линейную сингулярную КрЗ вида:

$$u^3\psi'''(u) + (a_1 + a_2 u)u^2\psi''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2)u\psi'(u) + (a_6 u + a_7 u^2)\psi(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.18}$$

$$\lim_{u\to+0}[u\psi(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\psi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^3\psi''(u)] = 0, \tag{5.19}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi'(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi''(u) = 0. \tag{5.20}$$

ОДУ (5.18) обладает регулярной особенностью при $u \to +0$ и иррегулярной особенностью ранга 1 при $u \to \infty$. Для изучения сингулярных ЗК в окрестностях особых точек этого ОДУ используются, в частности, результаты [15, 21, 22] (подробнее см. [13]).

Сингулярная КрЗ (5.18)–(5.20) всегда имеет тривиальное решение $\psi \equiv 0$. Нас будет интересовать существование нетривиального решения этой задачи, выделяемого условием нормировки, приведенным ниже в лемме 5.3.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия леммы* 5.2, *и пусть* $\psi(u)$ — *нетривиальное решение вспомогательной линейной сингулярной КрЗ* (5.18)–(5.20), *такое, что* $\psi(u) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *и нормировано требованием*

$$\int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda)\exp(-s/n)]\ \psi(s)\,ds = 1. \tag{5.21}$$

Тогда функция $\varphi(u)$, *определенная равенством*

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda)\int_0^\infty \psi(s)\exp(-s/n)\,ds + \int_0^u \psi(s)\,ds, \quad u \geqslant 0, \tag{5.22}$$

является решением как линейной сингулярной КрЗ (5.12)–(5.15) *для ОДУ, так и основной линейной нелокальной сингулярной КрЗ с ограничениями* (5.1)–(5.5) *для ИДУ.*

В результате достаточно доказать существование нетривиального решения $\psi(u)$ вспомогательной линейной сингулярной КрЗ (5.18)–(5.20), удовлетворяющего условиям леммы 5.3, и найти это решение.

Чтобы разобраться с этой вспомогательной КрЗ, прежде всего следует изучить особые точки ОДУ (5.18) и свести сингулярную КрЗ (5.18)–(5.20) к эквивалентной КрЗ на конечном интервале без особенностей. Для переноса предельных граничных условий из особых точек используются результаты теории устойчивых начальных многообразий решений, или многообразий условной устойчивости по Ляпунову (см., например, [2, 3, 6]), причем учитывается понятие допустимых граничных условий в особых точках типа полюса (см., например, [5, 27]).

5.2.1. Перенос предельных условий из особой точки $u = 0$. ОДУ (5.18) обладает регулярной (слабой) особенностью при $u = 0$ с характеристическими показателями μ_j $(j = 0, 1, 2)$:

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = -1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}, \tag{5.23}$$

$$\mu_2 = -1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}. \tag{5.24}$$

Из формул для $\mu_{1,2}$ также следуют равенства

$$\mu_1 + 1 = 1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2},$$

$$\mu_2 + 1 = 1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2}.$$

В результате по крайней мере при $\lambda + \lambda_1 > 0$ справедливо

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 > -1, \qquad \mu_2 < -1. \tag{5.25}$$

Это, в частности, означает, что сингулярная ЗК (5.18), (5.19) обладает двухпараметрическим семейством решений, значения которых порождают в трехмерном фазовом пространстве ОДУ (5.18) (переменных ψ, ψ', ψ'') двумерное линейное подпространство — плоскость, проходящую через начало координат и зависящую от u как от параметра. Эта плоскость задается в $\mathbb{R}^3$ одним линейным соотношением.

Далее, используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (его несложное доказательство см. в [13]):

Лемма 5.4. *Пусть в ОДУ* (5.18) *величины* a_j $(j = \overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11), *где значения параметров* a, b, λ, λ_1, m, n *удовлетворяют предположениям леммы* 5.1. *Тогда предельные условия* (5.19) *для решений ОДУ* (5.18) *при достаточно малых* $u > 0$ *эквивалентны линейному соотношению*

$$u^2\psi''(u) = \alpha(u)u\psi'(u) + \beta(u)\psi(u), \qquad 0 < u \leqslant u_0. \tag{5.26}$$

Здесь пара функций $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ *является решением нелинейной сингулярной ЗК*

$$u\alpha' = (1 - a_1 - a_2u)\alpha - \alpha^2 - \beta - (a_3 + a_4u + a_5u^2), \tag{5.27}$$

$$u\beta' = (2 - a_1 - a_2 u)\beta - \alpha\beta - (a_6 u + a_7 u^2), \qquad u > 0, \tag{5.28}$$

$$\lim_{u\to+0} \alpha(u) = \alpha_0 = \mu_1 - 1, \quad \lim_{u\to+0} \beta(u) = 0, \tag{5.29}$$

где μ_1 определено в (5.23). *Решение $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ сингулярной ЗК* (5.27)–(5.29) *для достаточно малых $u > 0$ существует, единственно и является голоморфной функцией в точке $u = 0$*:

$$\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k, \qquad \beta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k, \qquad |u| \leqslant u_0, \qquad u_0 > 0. \tag{5.30}$$

Здесь α_0 определено в (5.29), *а коэффициенты α_k, β_k при $k \geqslant 1$ определяются из* (5.27), (5.28) *формальной подстановкой разложений* (5.30), *что приводит к рекуррентным формулам*:

$$\beta_1 = -\frac{a_6}{\alpha_0 + a_1 - 1}, \qquad \alpha_1 = -\frac{\beta_1 + a_2\alpha_0 + a_4}{2\alpha_0 + a_1}; \tag{5.31}$$

$$\beta_2 = -\frac{a_7 + a_2\beta_1 + \alpha_1\beta_1}{\alpha_0 + a_1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\beta_2 + \alpha_1^2 + a_2\alpha_1 + a_5}{2\alpha_0 + a_1 + 1}; \tag{5.32}$$

$$\beta_k = -\frac{a_2\beta_{k-1} + \sum\limits_{l=1}^{k-1} \alpha_l \beta_{k-l}}{\alpha_0 + a_1 + k - 2}, \qquad \alpha_k = -\frac{\beta_k + \sum\limits_{l=1}^{k-1} \alpha_l \alpha_{k-l}}{2\alpha_0 + a_1 + k - 1}, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{5.33}$$

В результате перенос граничных условий (5.19) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u = u_0 > 0$ осуществляется с помощью соотношения (5.26): в точке $u = u_0$ имеем граничное условие

$$u_0^2 \psi''(u_0) = \alpha(u_0) u_0 \psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \tag{5.34}$$

где приближенные значения $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$ с заданной точностью можно находить с помощью разложений (5.30)–(5.33). При этом для вычислений важно, что в окрестности особой точки $u = 0$ условие (5.34) устойчиво переносится слева направо — в направлении от этой особой точки[1].

Замечание 5.1. В [13] не было замечено, что утверждение леммы 5.4 остается справедливым и при $a \leqslant 0$, что может представлять интерес при изучении некоторых других моделей страховой и/или финансовой математики (ср. с замечанием 4.2).

Замечание 5.2. Для полноты изложения, учитывая результаты общей теории линейных ОДУ с регулярной (слабой) особой точкой (см., например, [26, § 2]), зафиксируем следующее представление для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, q_0, q_1)$ сингулярной ЗК (5.18), (5.19):

$$\psi(u, q_0, q_1) = q_0\{1 + \psi_1(u) + A u^{\mu_1} \ln(u) [1 + \psi_2(u)]\} + q_1 u^{\mu_1} [1 + \psi_2(u)]. \tag{5.35}$$

(В предположениях леммы 5.4 оно может быть получено для малых $u > 0$ из соотношения (5.26).) Здесь q_0, q_1 — произвольные постоянные, μ_1 определено в (5.23), $\psi_j(u)$ — голоморфные в нуле функции, $\psi_j(0) = 0$ ($j = 1, 2$), а постоянная A зависит от параметров ОДУ (5.18), причем $A = 0$, если μ_1 — нецелое число. Коэффициенты сходящихся рядов по степеням u для функций $\psi_j(u)$ ($j = 1, 2$) могут быть получены из ОДУ (5.26) формальной подстановкой всех разложений.

5.2.2. Перенос предельных условий из бесконечно удаленной особой точки. При $u \to \infty$ ОДУ (5.18) обладает иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1.

Сингулярную ЗК (5.18), (5.20) перепишем в виде

$$\psi'''(u) + \left[a_2 + \frac{a_1}{u}\right]\psi''(u) + \left[a_5 + \frac{a_4}{u} + \frac{a_3}{u^2}\right]\psi'(u) + \left[\frac{a_7}{u} + \frac{a_6}{u^2}\right]\psi(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{5.36}$$

$$\lim_{u\to+\infty} \psi(u) = \lim_{u\to+\infty} \psi'(u) = \lim_{u\to+\infty} \psi''(u) = 0. \tag{5.37}$$

Характеристические показатели ОДУ (5.36), отвечающие за поведение решений при больших u, имеют вид:

$$\nu_0 = 0, \qquad \nu_1 = -1/m < 0, \qquad \nu_2 = 1/n > 0. \tag{5.38}$$

Чтобы полностью разобраться с поведением решений ОДУ (5.36) при $u \to \infty$, надо найти первую поправку по теории возмущений (при больших u) к показателю $\nu_0 = 0$, что подробно осуществлено

[1]См. [13]; подробнее см. в [4] изучение этого вопроса при переносе устойчивых многообразий решений для достаточно общих систем линейных ОДУ с особенностями типа полюса в граничных точках.

в [13] с учетом результатов [15, 21, 22]. Как следствие этого изучения и использования результатов общей теории линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Пусть в ОДУ* (5.18) *величины* a_j $(j=\overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11), *где все параметры* a, b, n, m, λ, λ_1 — *фиксированные действительные числа, причем* $a>0$, $b^2>0$, $n>0$, $m>0$, *а значения* λ *и* λ_1 *любого знака* $(\lambda,\lambda_1\in\mathbb{R})$. *Тогда сингулярная ЗК* (5.18), (5.20) *обладает двухпараметрическим семейством решений* $\psi(u,p_1,p_2)$, *причем при больших* u *справедливо представление*

$$\psi(u,p_1,p_2)=p_1u^{-2a/b^2}[1+\xi_1(u)/u]+p_2u^{-2}\exp(-u/m)[1+\xi_2(u)/u]. \tag{5.39}$$

Здесь p_1, p_2 — *произвольные постоянные, а функции* $\xi_j(u)$ $(j=1,2)$ *имеют конечные пределы при* $u\to\infty$ *и при больших* u *представимы асимптотическими рядами*

$$\xi_j(u)\backsim\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^{(j)}/u^k,\qquad j=1,2, \tag{5.40}$$

где коэффициенты этих рядов могут быть получены из ОДУ (5.18) *формальной подстановкой всех разложений. Все решения семейства* $\psi(u,p_1,p_2)$ *интегрируемы на бесконечности тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (3.23).

Значения решений (5.39) порождают в трехмерном фазовом пространстве ОДУ (5.18) (переменных ψ, ψ', ψ'') двумерное линейное подпространство — плоскость, проходящую через начало координат и зависящую от u как от параметра. Эта плоскость задается в $\mathbb{R}^3$ одним линейным соотношением.

Более точно, снова используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (доказательство см. в [13]).

Лемма 5.6. *Пусть выполнены предположения леммы* 5.5. *Тогда предельные граничные условия* (5.20) *для решений ОДУ* (5.18) *для достаточно больших* u *эквивалентны линейному соотношению*

$$\psi''(u)=\gamma(u)\psi'(u)+\varkappa(u)\psi(u),\qquad u\geqslant u_\infty. \tag{5.41}$$

Здесь пара функций $\{\gamma(u),\varkappa(u)\}$ *есть решение сингулярной нелинейной ЗК*

$$\gamma'=-\left(a_2+a_1/u\right)\gamma-\gamma^2-\varkappa-\left(a_5+a_4/u+a_3/u^2\right), \tag{5.42}$$

$$\varkappa'=-\left(a_2+a_1/u\right)\varkappa-\gamma\varkappa-\left(a_7/u+a_6/u^2\right),\qquad u_\infty\leqslant u<\infty, \tag{5.43}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\gamma(u)=\gamma_0=-1/m,\qquad \lim_{u\to+\infty}\varkappa(u)=0. \tag{5.44}$$

Решение $\{\gamma(u),\varkappa(u)\}$ *сингулярной ЗК* (5.42)–(5.44) *существует для достаточно больших* u, *единственно и представимо асимптотическими рядами*:

$$\gamma(u)\sim\gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/u^k,\qquad \varkappa(u)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k/u^k,\qquad u\gg1. \tag{5.45}$$

Здесь γ_0 *определено в* (5.44), *а коэффициенты* γ_k, $\varkappa_k$ *при* $k\geqslant1$ *определяются из* (5.42), (5.43) *формальной подстановкой разложений* (5.45), *что приводит к рекуррентным формулам*:

$$\varkappa_1=-a_7/(a_2+\gamma_0),\qquad \gamma_1=-(a_1\gamma_0+\varkappa_1+a_4)/(a_2+2\gamma_0), \tag{5.46}$$

$$\varkappa_2=[\varkappa_1(1-a_1-\gamma_1)-a_6]/(a_2+\gamma_0),\quad \gamma_2=[\gamma_1(1-a_1-\gamma_1)-\varkappa_2-a_3]/(a_2+2\gamma_0), \tag{5.47}$$

$$\varkappa_k=\left[(k-1-a_1)\varkappa_{k-1}-\sum_{l=1}^{k-1}\gamma_l\varkappa_{k-l}\right]\Big/(a_2+\gamma_0), \tag{5.48}$$

$$\gamma_k=\left[\gamma_{k-1}(k-1-a_1)-\varkappa_k-\sum_{l=1}^{k-1}\gamma_l\gamma_{k-l}\right]\Big/(a_2+2\gamma_0),\qquad k=3,4,\ldots. \tag{5.49}$$

Тогда, в частности, представление (5.39), (5.40) *для двухпараметрического семейства* $\psi(u,p_1,p_2)$ *решений сингулярной ЗК* (5.36), (5.37) *может быть получено из соотношения* (5.41) *формальной подстановкой всех разложений.*

В результате перенос граничных условий (5.20) из бесконечности в конечную точку $u = u_\infty \gg 1$ осуществляется с помощью соотношения (5.41): в точке $u = u_\infty$ имеем граничное условие

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \varkappa(u_\infty)\psi(u_\infty), \tag{5.50}$$

где приближенные значения $\gamma(u_\infty)$, $\varkappa(u_\infty)$ могут быть найдены с помощью разложений (5.46)–(5.49). Для вычислений важно, что при больших u условие (5.50) устойчиво переносится справа налево — в направлении от особой точки $u = \infty$.

5.2.3. Эквивалентная однородная регулярная краевая задача с недостающим числом граничных условий. Существование нетривиального решения и его свойства.

Лемма 5.7. *Пусть в ОДУ* (5.18) *будет*: *коэффициенты* a_j $(j = \overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11)*, где все величины* a, b^2, n, m, λ, λ_1 — *положительные числа. Тогда вспомогательная сингулярная линейная КрЗ* (5.18)–(5.20)*, определенная на* $\mathbb{R}_+$*, эквивалентна следующей однородной линейной КрЗ на конечном интервале* $0 < u_0 \leqslant u \leqslant u_\infty$ *без особенностей*:

$$u^3\psi'''(u) + (a_1 + a_2u)u^2\psi''(u) + (a_3 + a_4u + a_5u^2)u\psi'(u) + (a_6u + a_7u^2)\psi(u) = 0, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_\infty, \tag{5.51}$$

$$u_0^2\psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \tag{5.52}$$

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \varkappa(u_\infty)\psi(u_\infty). \tag{5.53}$$

Здесь функции $\alpha(u)$ *и* $\beta(u)$ *определены в лемме* 5.4, $\gamma(u)$ *и* $\varkappa(u)$ — *в лемме* 5.6*, а значения* u_0, u_∞ $(0 < u_0 \ll 1,\ u_\infty \gg 1)$*, вообще говоря, могут меняться в некоторых диапазонах, зависящих от параметров задачи* (*подвижные границы*); *однородная двухточечная КрЗ* (5.51)–(5.53) *является недоопределенной по числу граничных условий* (*ОДУ третьего порядка с двумя разделенными краевыми условиями*) *и всегда имеет нетривиальное решение.*

Принимая во внимание формулы (5.23), (5.24) и представления (5.35) и (5.39) для двухпараметрических семейств решений сингулярных ЗК (5.18), (5.19) и (5.18), (5.20), соответственно, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть для ОДУ* (5.18) *выполнены условия леммы* 5.7*, где значения параметров* a, b^2, n, m, λ, λ_1 *фиксированы, и пусть выполняется неравенство* (3.23) — *«условие надежности портфеля активов».*

Тогда сингулярная КрЗ (5.18)–(5.20) *имеет, и притом единственное* (*с точностью до множителя нормировки*)*, нетривиальное решение* $\psi(u)$, $\psi(u) \in L_1(0,\infty)$*, и для него справедливы следующие утверждения*:

1. *Если выполнено условие*

$$0 < a < \lambda + \lambda_1, \tag{5.54}$$

то $\mu_1 > 0$ *и* $\lim\limits_{u\to+0}\psi(u) = D_1 > 0$; *при этом неравенство* $|\lim\limits_{u\to+0}\psi'(u)| < \infty$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнено дополнительное требование*

$$\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a. \tag{5.55}$$

Более точно, в этом случае $\mu_1 > 1$ *и справедливо*

$$\lim_{u\to+0}\psi'(u) = D_1D_2 = D_1\,[a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m]\,/\,[mn(b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1], \tag{5.56}$$

откуда $D_2 \leqslant 0$*, если выполнено условие* $i_{\mathrm{r,II}} \geqslant 0$*, где величина*

$$i_{\mathrm{r,II}} = a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m \tag{5.57}$$

определяет «фактор риска» для модели II, и $D_2 > 0$*, если* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$.

При нарушении условия (5.55)*, т. е. когда*

$$\lambda + \lambda_1 \leqslant b^2 + 2a, \tag{5.58}$$

будет $0 < \mu_1 \leqslant 1$*, а функция* $\psi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой при* $u \to +0$.

2. *Если выполнены неравенства*

$$a \geqslant \lambda + \lambda_1 > 0, \tag{5.59}$$

то будет $-1 < \mu_1 \leqslant 0$, *а функция* $\psi(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой при* $u \to +0$.

3. *Поведение* $\psi(u)$ *при больших* u *следует из леммы* 5.5, *а именно, справедливо асимптотическое представление в главном*

$$\psi(u) = q_1 u^{-2a/b^2}[1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{5.60}$$

где $q_1 \neq 0$, *и, в силу* (3.23), $\psi(u)$ *интегрируема при* $u \to \infty$.

5.3. Существование, единственность и поведение решения исходной сингулярной нелокальной задачи с ограничениями для ИДУ.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 5.1, *и пусть* $\psi(u)$ — *нетривиальное решение вспомогательной сингулярной КрЗ* (5.18)–(5.20) *для ОДУ, нормированное требованием* (5.21). *Тогда*:

1. *Функция* $\psi(u)$ *положительна для каждого конечного значения* $u \in \mathbb{R}_+$, *а функция* $\varphi(u)$, *определенная равенством* (5.22), *есть единственное решение исходной сингулярной КрЗ с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ, т. е. задачи* (5.1)–(5.5), *и является строго возрастающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией*.

2. *Если выполнены неравенства* (5.54), *то производная* $\varphi'(u)$ *имеет конечный предел при* $u \to +0$, *причем при выполнении дополнительного требования* (5.55) *вторая производная* $\varphi''(u)$ *также имеет конечный предел при* $u \to +0$ (*равный неотрицательной* (*отрицательной*) *величине, если* $i_{\mathrm{r,II}} \geqslant 0$ (*соответственно, если* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$)), *а при выполнении неравенства* (5.58) $\varphi''(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией. Если выполнены неравенства* (5.59), *то производная* $\varphi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией*.

3. *При больших* u *для решения* $\varphi(u)$ *справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{1-2a/b^2}\,[1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{5.61}$$

где $K > 0$ (*постоянная* K *не может быть найдена методами локального анализа*).

4. *Если выполняются условия* (5.54), (5.55) *и* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$, *то функция* $\psi(u) = \varphi'(u)$ *достигает положительного максимума в некоторой точке* $\widetilde{u} > 0$, *а функция* $\varphi(u)$ *имеет в ней перегиб*.

Замечание 5.3. При выполнении условия (3.11) функция (3.14) является точным решением вырожденной задачи, к которой основная сингулярная задача (2.6)–(2.10) приводится формально, если положить $a = b = 0$, а именно, сингулярной нелокальной задачи для интегрального уравнения:

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u), \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.62}$$

$$\varphi(0) = C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}(J_{1,n}\varphi)(0), \quad \lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1. \tag{5.63}$$

Эта задача эквивалентна линейной КрЗ на полуоси для ОДУ второго порядка с нелокальным условием в нуле:

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda m - \lambda_1 n}{mn(\lambda + \lambda_1)}\,\varphi'(u), \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(0) = C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}(J_{1,n}\varphi)(0), \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{5.64}$$

Тогда нетрудно получить, что $C_0 = 1 - \lambda\,(n + m)/[n\,(\lambda + \lambda_1)]$, $0 < C_0 < 1$,

$$\varphi'(0) = D_1 = \lambda\,(n + m)(\lambda_1\, n - \lambda\, m)/[mn^2\,(\lambda + \lambda_1)^2] > 0,$$

$$\varphi''(0) = D_1 D_2 = -D_1(\lambda_1\, n - \lambda\, m)/[mn\,(\lambda + \lambda_1)] < 0,$$

и справедлива формула (3.14), определяющая точное решение для модели КЛ со стохастическими премиями и положительной нагрузкой безопасности.

Величина $\lambda_1 = \lambda m/n$ является критическим значением параметра бифуркации: при $\lambda_1 \leqslant \lambda m/n$ задача (5.62), (5.63) (соответственно, задача (5.64)) решений не имеет.

5.4. Об алгоритмах численного нахождения решения. Как следует из приведенных выше утверждений, основным элементом решения исходной сингулярной КрЗ с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ, т. е. задачи (2.6)–(2.10), является нахождение нетривиальных решений вспомогательной однородной КрЗ для ОДУ (5.51)–(5.53), определенной на конечном отрезке $[u_0, u_\infty]$ без особенностей и с недостающим числом граничных условий.

Для решения линейных КрЗ на конечном интервале без особенностей, как хорошо известно, эффективными являются методы дифференциальной прогонки. Для нахождения нетривиальных решений КрЗ (5.51)–(5.53) важны результаты [4], где, наряду с кратким обзором вариантов дифференциальной прогонки, исследуются вопросы устойчивости вычислений в окрестностях особых точек при решении КрЗ (в том числе спектральных), полученных из сингулярных КрЗ переносом граничных условий из особых точек. В частности, КрЗ (5.51)–(5.53) получена из сингулярной КрЗ (5.18)–(5.20) коротко описанными выше методами локального переноса граничных условий из особых точек, а для нахождения ее нетривиальных решений важны приемы [4], применяемые для устойчивого нахождения собственных функций в спектральных задачах. Отличие здесь состоит в том, что, насколько нам известно, до [13] такие приемы не применялись для решения однородных КрЗ с недостающим числом краевых условий.

В [13] предложены и реализованы экономичные способы решения КрЗ (5.51)–(5.53) по числу уравнений прогонки и числу арифметических действий, на чем здесь подробно останавливаться не будем. Отметим только, что один из алгоритмов основан на сочетании двух вариантов глобально устойчивого метода ортогональной дифференциальной прогонки — варианта прогонки [1] и ее модификации, предложенной в [8]; подобный подход может представлять интерес и для решения других КрЗ. Более экономичный вариант для решения данной задачи допускает замену при прямой прогонке уравнений метода [1] на решение ЗК (5.27)–(5.29) и (5.42)–(5.44) (соответственно, слева направо от точки $u = u_0 > 0$ до точки $u = \widehat{u}$ и справа налево от точки $u = u_\infty < \infty$ до точки $u = \widehat{u}$, $u_0 < \widehat{u} < u_\infty$) с сохранением при обратной прогонке уравнений метода [8].

Далее, с учетом утверждения теоремы 5.2, после нахождения нетривиального решения $\psi(u)$ КрЗ (5.18)–(5.20), нормированного требованием (5.21), решение $\varphi(u)$ исходной КрЗ с ограничениями (5.1)–(5.5) для ИДУ может быть найдено по формуле (5.22).

6. Численные примеры: сравнение результатов расчетов для моделей I и II

Расчеты осуществлялись в программной среде пакета Maple[1] 14.01 с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приемами контроля количества верных знаков.

Прежде всего сформулируем *условия сравнения результатов расчетов для моделей I и II* (а также их сравнения с данными для исходных моделей риска 1 и 2, т. е. моделей без инвестиций):

1. задаваемые значения параметров a, b^2, λ, m в модели II (модели 2) те же, что и в модели I (модели 1);
2. значение c в модели I (модели 1) связаны со значениями λ_1 и n в модели II (модели 2) соотношением $\lambda_1 n = c$, т. е. ожидаемые размеры премий в единицу времени одинаковы в обеих моделях.

При $a > 0$, $b \neq 0$ для всех примеров расчетов выполняется «условие надежности акций»: $2a/b^2 > 1$; факторы риска $i_{\mathrm{r,I}}$ и $i_{\mathrm{r,II}}$ определены в (4.17) и (5.57), соответственно.

Далее приводятся графики зависимости ВНР от НК при выполнении условий сравнения моделей I и II (моделей 1 и 2) для некоторых наборов параметров задач.

Прежде всего сравним точные решения (3.7) и (3.14) для моделей 1 и 2. Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Пусть параметры λ, m, c, λ_1, n — фиксированные положительные числа, и пусть $c = \lambda_1 n > \lambda m$, что, в частности, для нагрузок безопасности влечет $\rho_1 = \rho_2 > 0$.*

Тогда $\varphi_2(u) < \varphi_1(u)$ для любого конечного $u > 0$. Кроме того, если при фиксированном $c > 0$ будет $n \to 0$, $\lambda_1 = c/n \to \infty$ (или $n \to \infty$, $\lambda_1 = c/n \to 0$), то $\varphi_2(u) \to \varphi_1(u)$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ (соответственно, $\varphi_2(u) \to 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$).

[1] Лицензия ВЦ РАН.

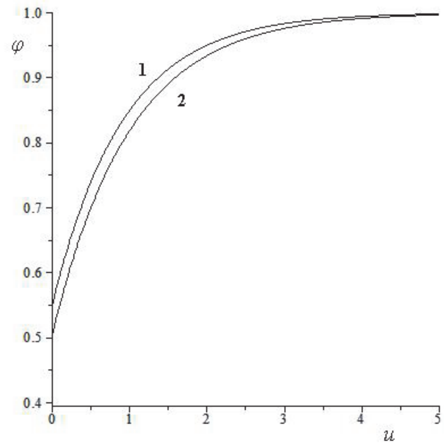

Рис. 1а.

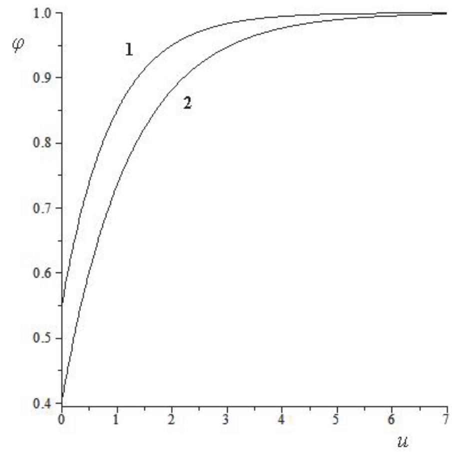

Рис. 1б.

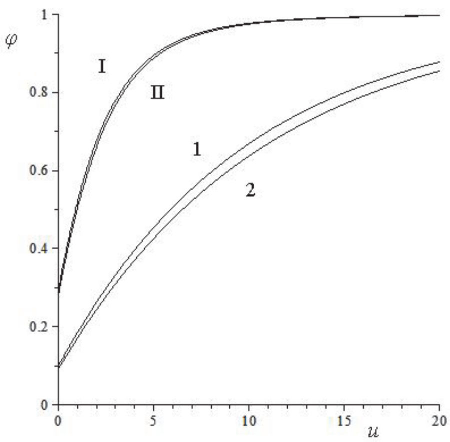

Рис. 2а.

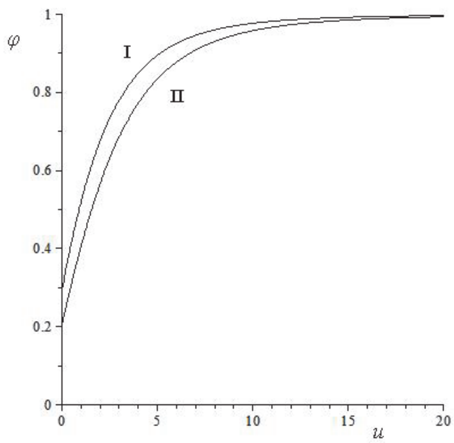

Рис. 2б.

Это утверждение проиллюстрировано на рис. 1а, 1б. Здесь и далее цифрой 1 помечены графики точных решений (3.7), а цифрой 2 — графики точных решений (3.14). Значения параметров к рис. 1а, 1б (точные решения вырожденных задач для ИДУ — для моделей без инвестиций): $a = b = 0$, $m = 0,5$, $\lambda = 0,09$; 1: $c = 0,1$; 2 (рис. 1а): $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; 2 (рис. 1б): $n = 0,4$, $\lambda_1 = 0,25$ $(c = \lambda_1 n > \lambda m)$.

Утверждения теорем 4.1 и 5.2 проиллюстрированы на рис. 2–5, где цифрой I помечены графики к модели I, а цифрой II — к модели II. Значения параметров к рис. 2а, 2б: $m = 1$, $\lambda = 0,09$; 1,2: $a = b = 0$; 1: $c = 0,1$; 2: $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; I, II: $a = 0,02$, $b = 0,1$; I: $c = 0,1$; II (рис. 2а): $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; II (рис. 2б): $n = 0,9$, $\lambda_1 = 1/9$ ($c = \lambda_1 n > \lambda m$; I: $0 < a < \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$; II: $0 < a < \lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$). Значения параметров к рис. 3: $b = 0,1$, $m = 1$, $\lambda = 0,09$; I: $c = 0,02$; II: $n = 0,2$, $\lambda_1 = 0,1$ $(c = \lambda_1 n < \lambda m)$; а) для верхнего графика $a = 0,1$ (I: $a > \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$; II: $a < \lambda+\lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$); б) для нижнего графика $a = 0,02$ (I: $a < \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} < 0$; II: $a < \lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} < 0$); для обеих моделей I и II результаты численных расчетов совпадают с графической точностью (различие в другом масштабе см. на рис. 4а, 4б). На рис. 4а, 4б — графики разностей $\varphi_{\mathrm{I}}(u) - \varphi_{\mathrm{II}}(u)$ к графически совпадающим графикам на рис. 3: рис. 4а (рис. 4б) отвечает верхнему графику (нижнему графику) на рис. 3. Значения параметров к рис. 5а, 5б: $a = 0,2$, $b = 0,1$, $m = 1$, $\lambda = 0,05$; рис. 5а: I: $c = 0,02$ ($c < \lambda m$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$); II: $n = 0,2$, $\lambda_1 = 0,1$ ($\lambda_1 n < \lambda m$, $a > \lambda + \lambda_1$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$); рис. 5б: I: $c = 0,08$ ($c > \lambda m$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$); II: $n = 0,8$, $\lambda_1 = 0,1$ ($\lambda_1 n > \lambda m$, $a > \lambda + \lambda_1$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$).

Подробные данные по расчетам с указанием значений $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ и других величин для моделей I и II (моделей 1 и 2) приведены в [13].

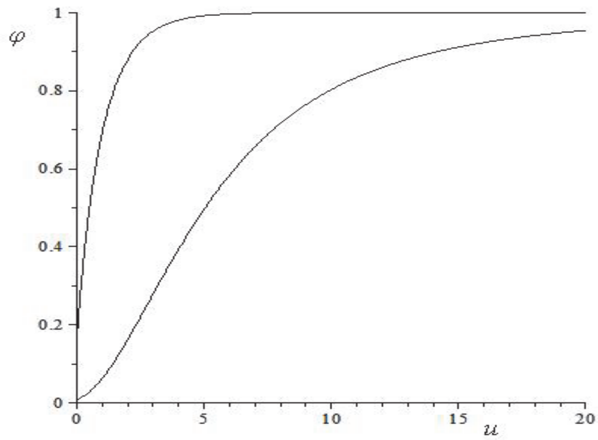

Рис. 3.

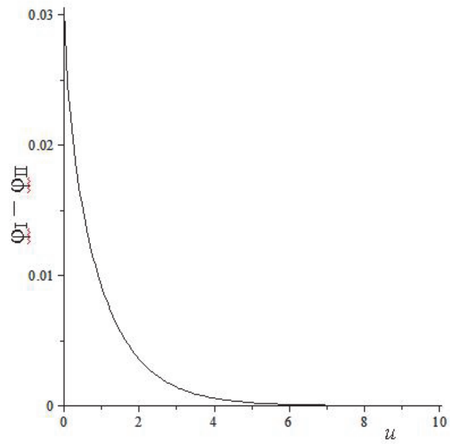

Рис. 4а.

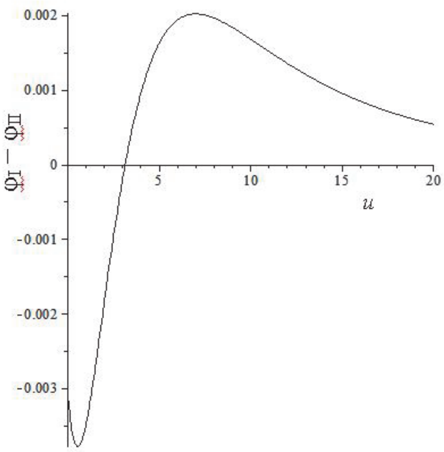

Рис. 4б.

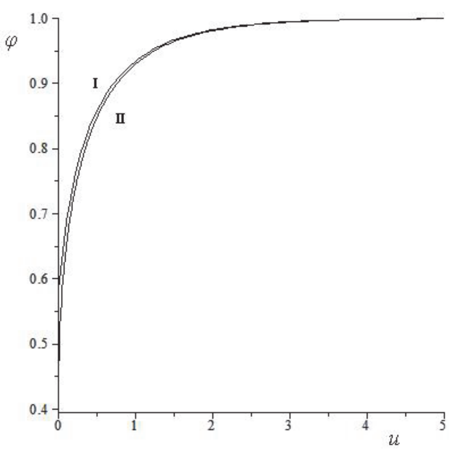

Рис. 5а.

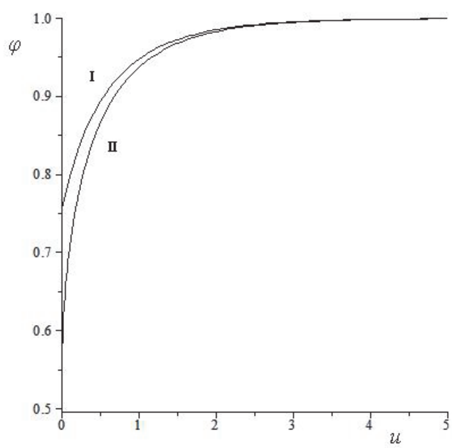

Рис. 5б.

7. Заключительные замечания и экономическая интерпретация результатов

1. Изучение модели I показало, что при больших значениях начального капитала (НК) использование рисковых активов при постоянной структуре инвестиционного портфеля не является благоприятным с точки зрения неразорения. Однако, при малых значениях НК, как особенно показывают случаи нарушения положительности нагрузки безопасности, рисковые активы являются

эффективным инструментом минимизации совокупного риска: в то время, как при отсутствии инвестиций разорение неминуемо, при их наличии величина вероятности неразорения (ВНР) быстро нарастает с ростом НК u (даже при отрицательных значениях фактора риска, когда вторая производная от ВНР при малых u положительна).

Проведенное в [10, 11] исследование оптимальной стратегии в случае экспоненциального распределения размера требований показало, что доля рисковых вложений при стремлении текущего капитала (ТК) x к бесконечности должна быть бесконечно малой функцией порядка $O(1/x)$.

2. Корректная постановка и исследование сингулярной КрЗ с ограничениями (2.6)–(2.10) для ИДУ (модель II) были осуществлены нами в [13] с целью нахождения ВНР в модели страхования со стохастическими премиями и инвестициями капитала в рисковый актив, построения алгоритма вычисления ВНР как функции НК и проведения численных расчетов. При этом важно отметить, что доказательство существования решения поставленной КрЗ является также необходимым этапом на пути теоретического обоснования вида функции, определяющей ВНР в рассматриваемой модели.

Эвристические рассуждения, основанные на некоторых естественных соображениях и приведенные в [17] (так же как и непосредственное применение аппарата производящих операторов для марковских процессов), позволяют получить уравнение для ВНР как функции НК (в данном случае линейное ИДУ) в предположении, что ВНР есть дважды непрерывно дифференцируемая функция НК. Тогда для изучения, например, асимптотики ВНР при больших значениях НК с использованием полученного ИДУ необходимо, с одной стороны, доказать, что ВНР действительно является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, а с другой стороны, обосновать предельное условие стремления к единице на бесконечности для соответствующего решения этого ИДУ. Это обоснование может быть проделано, например, с использованием верхних оценок для вероятности разорения (ВР), подобных оценке Лундберга в классической модели, показывающей, что при положительной нагрузке безопасности ВР стремится к нулю при стремлении НК к бесконечности (для модели КЛ со случайными премиями такая оценка приводится, например, в [36]). Однако в [17] при исследовании данного вопроса в модели с инвестированием капитала в рисковый актив таких доказательств проделано не было, и в результате полученная там функция как асимптотика решения ИДУ содержит неопределенную аддитивную константу. При этом остается в итоге необоснованным утверждение, что эта функция определяет асимптотику ВНР (хотя бы при каком-то значении этой константы).

Подход, используемый в [13] и данной работе и основанный на корректной постановке и изучении задачи (2.6)–(2.10) для ИДУ на всей неотрицательной полуоси, доказательстве существования ее решения, с учетом результатов [9], позволяет избежать указанных выше проблем. В частности, пропадает необходимость в доказательстве дважды непрерывной дифференцируемости ВНР и получении для нее верхних оценок при больших значениях НК (для модели I для обоснования полученной в [31] асимптотики ВНР при больших значениях НК использовались и уточнялись оценки из [33], но для модели II аналогичные оценки в [17] получены не были). Кроме того, отпадает необходимость и в доказательстве нижних оценок для ВР (для модели I такие оценки см. в [31], а также см. [33]).

3. Дополнительно используемый подход позволяет провести численные расчеты для ВНР, сравнить результаты этих расчетов для моделей I и II и дать их экономическую интерпретацию.

Адекватность построенных решений и расчетов демонстрирует, в частности, факт близости графиков функций ВНР в моделях I и II при часто поступающих премиях малой величины в модели II, если только ожидаемые премии в единицу времени равны для обеих моделей. Этот факт говорит также в пользу возможности приближенного рассмотрения процесса поступления премий как детерминированного процесса в предположении, что премии поступают гораздо чаще, чем предъявляются иски (такое предположение лежит в основе классической модели КЛ).

В то же время результаты расчетов позволяют проанализировать, в каких случаях использование классической модели КЛ в качестве исходного процесса риска может завышать или занижать ВНР по сравнению с теми ее значениями, которые дает модель, основанная на процессе риска со стохастическими премиями. В частности, при выполнении условия положительности нагрузки безопасности в исходной модели, ВНР, вычисленная в соответствии с моделью I, оказывается завышенной на всей неотрицательной полуоси значений НК. При этом для обеих моделей применение инвестиций существенно увеличивает ВНР для небольших значений НК по сравнению с соответствующими моделями без инвестиций (классической моделью КЛ и моделью КЛ со стохастическими премиями). При отрицательных же значениях нагрузки безопасности, когда в исходных моделях риска разорение наступает с вероятностью единица, применение инвестиций с постоянной структурой портфеля при условии его надежности всегда дает положительные значения ВНР.

Таким образом, применение инвестиций эффективно компенсирует собственный риск страховщика при высоких значениях этого риска. Этот вывод, сделанный на основе изучения решений задач на всей неотрицательной полуоси, невозможно было сделать на основании сравнения лишь их асимптотического поведения при больших значениях НК, как в [31], где утверждалось, что «в страховании инвестиции в рисковые активы опасны». Оказывается, что при небольших значениях НК вывод другой: инвестиции в рисковые активы при небольших значениях НК не только не опасны, но и необходимы в целях повышения платежеспособности. Более точно об этом говорят результаты исследования оптимального управления инвестициями в модели КЛ при наличии ограничений с целью минимизации ВР, опирающиеся, в частности, на результаты исследования модели I (см. [29]).

Сравнение результатов расчетов для ВНР по моделям I и II при неположительных нагрузках безопасности в исходных моделях риска и при одинаковых ожидаемых премиях показало, что выводы зависят от факторов риска моделей $i_{r,\mathrm{I}}$ и $i_{r,\mathrm{II}}$, определенных в (4.17) и (5.57), соответственно. Наиболее рискованными являются случаи отрицательности этого фактора — в этих случаях график ВНР имеет перегиб.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11-01-00219-а и 13-01-00784-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1961. — *1*, № 1. — С. 733–737.
2. *Абрамов А. А.* О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1961. — *1*, № 4. — С. 733–737.
3. *Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.
4. *Абрамов А. А., Диткин В. В., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С., Ульянова В. И.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1980. — *20*, № 5. — С. 1155–1173.
5. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б.* Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1985.
6. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Балла К.* Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Comput. Math. Banach Cent. Publ. — 1984. — *13*. — С. 319–351.
7. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
8. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. — Москва: Наука, 1973.
9. *Белкина Т. А.* Теоремы достаточности для вероятности неразорения в динамических моделях страхования с учетом инвестиций// В сб.: «Анализ и моделирование экономических процессов». — 2011. — № 8. — С. 61–74.
10. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения// Обозрение прикладной и промышленной математики (секция: «Финансовая и страховая математика»). — 2009. — *16*, № 6. — С. 961–981.
11. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамéра—Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований// Обозрение прикладной и промышленной математики (секция: «Финансовая и страховая математика»). — 2010. — *17*, № 1. — С. 3–24.

12. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная начальная задача для линейного интегродифференциального уравнения, возникающего в моделях страховой математики// Spectr. Evolution Probl. — 2011. — *21*, № 1. — С. 40–54.
13. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2012. — *52*, № 10. — С. 1812–1846.
14. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
15. *Биргер Е. С., Ляликова* (*Конюхова*) *Н. Б.* О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности// I: Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1965. — *5*, № 6. — С. 979–990; II: Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1966. — *6*, № 3. — С. 446–453.
16. *Бойков А. В.* Модель Крамéра—Лундберга со стохастическими премиями// Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — *47*, № 3. — С. 549–553.
17. *Бойков А. В.* Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2003.
18. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
20. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
21. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1983. — *23*, № 3. — С. 629–645.
22. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1988.
23. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для некоторых систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 8. — С. 1340–1347.
24. *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. — М.: Физматлит, 2007.
25. *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001.
26. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
27. *Abramov A. A., Konyukhova N. B.* Transfer of admissible boundary conditions from a singular point for systems of linear ordinary differential equations// Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1986. — *1*, № 4. — С. 245–265.
28. *Bachelier L.* Théorie de la spéculation// Ann. de l'Éc. Norm. (3). — 1900. — *17*. — С. 21–86. (Переиздано в: *Coothner P. H.* (ред.) The random character of stock market prices. — Cambridge: MIT Press, 1967. — P. 517–531).
29. *Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M.* Optimal constrained investment in the Cramer—Lundberg model// Scand. Actuar. J. — 2014. — DOI: 10.1080/03461238.2012.699001. — В печати.
30. *Belkina T. A., Konyukhova N. B., Kurochkin S. V.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models// В сб.: «Differential and difference equations with applications». — New York: Springer, 2013. — С. 27–44.
31. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous// Finance Stoch. — 2002. — *6*, № 2. — С. 227–235.
32. *Grandell J.* Aspects of risk theory. — Berlin—New York: Springer, 1991.
33. *Kalashnikov V., Norberg R.* Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments// Stochastic Process. Appl. — 2002. — *98*. — С. 211–228.
34. *Konyukhova N. B.* Singular problems for systems of nonlinear functional-differential equations// Spectr. Evolution Probl. — 2010. — *20*. — С. 199–214.
35. *Ramos A.* Controlled Markov models. An application to the ruin problem// PhD Thesis. — Madrid: Universidad Carlos III de Madrid, 2009.
36. *Zinchenko N., Andrusiv A.* Risk processes with stochastic premiums// Theory Stoch. Process. — 2008. — *14* (*30*), № 3-4 — С. 189–208.

Т. А. Белкина
117418 Москва, Нахимовский просп., 47, ЦЭМИ РАН
E-mail: `tbel@cemi.rssi.ru`

Н. Б. Конюхова
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН
E-mail: nadja@ccas.ru

С. В. Курочкин
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН
E-mail: kuroch@ccas.ru