ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 363, № 2, с. 175–177

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.9

НОВОЕ ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ ПРЕДЛОЖЕНИЙ И БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГР

©1998 г. Член-корреспондент РАН Ю.Г. Евтушенко[1], Э.Р.Смольяков[2]

Пересмотрено 15.02.2004 г.

Среди всех известных понятий равновесия в бескоалиционных играх наиболее предпочтительным можно считать понятие равновесия по Роузу–Нэшу [1, 2]. Однако в статических бескоалиционных играх это равновесие в чистых стратегиях заведомо существует лишь в очень ограниченных случаях: в основном когда платежные функции игроков и множества (чистых) стратегий выпуклы (вогнуты) [2]–[7]. Правда, в классе смешанных стратегий в статических играх это равновесие существует "почти всегда" [4, 7]. Однако смешанные стратегии приводят к вполне определенному результату только в играх, состоящих из очень большого числа партий (теоретически бесконечного), в то время как реальная жизнь, рассматриваемая как игра, обычно состоит всего из одной партии. Что же касается дифференциальных игр, то в них смешанные стратегии хотя и не сводят исходную детерминированную игру к нежелательной стохастической (вследствие того, что смешиваются по существу не стратегии, а всего лишь, упрощенно говоря, локальные, в каждый момент, тактики), но в то же время и мало что дают, лишь незначительно расширяя класс игр, в котором это равновесие существует в классе чистых стратегий [5]–[13]. По этой причине с теоретической и практической точек зрения больший интерес представляло бы не расширение области существования известных равновесий (например, равновесия по Роузу–Нэшу) посредством введения какого-то искусственного (практически, возможно, нереализуемого) класса стратегий, а нахождение каких-то иных естественных равновесий (понятий решения), существующих как можно в более общих случаях в наиболее естественном классе чистых стратегий. В данной работе как раз и предложено подобное новое равновесие, определение которого опирается на понятие симметричного слабого активного равновесия [7, 14] (названное ниже A-равновесием), сформулированное первоначально для задач принятия или отказа от предложений, но по существу применимое и для бескоалиционных игр с не меньшими основаниями, чем равновесие по Роузу–Нэшу, являющееся его частным случаем.

Рассмотрим задачи принятия или отказа от предложений и бескоалиционные игры в постановке, позволяющей перенести все полученные результаты на дифференциальные игры.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, — компактные множества в хаусдорфовых топологических пространствах, а G — произвольное множество в их произведении $Q = \prod_{i=1}^{N} Q_i$, причем такое, что любые непустые его сечения $G(q_1, \ldots, q_{i-1})$ и $G(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, являются компактными, и пусть на множестве Q определены ограниченные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, непрерывные по любой совокупности не более $N-1$ переменных при всех допустимых фиксированных значениях других.

[1] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

[2] Институт системного анализа РАН

О п р е д е л е н и е 1. *Точка (ситуация) $q^* \in G$ называется р а в н о в е с н о й п о Р о у з у – Н э ш у* [1, 2, 3], *если*

$$J_i(q^*) = \max_{q_i \in G(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Несмотря на удовлетворительную интуитивную и содержательную привлекательность понятия равновесия по Роузу–Нэшу, существует оно в весьма ограниченных случаях [1, 2, 3, 4, 7], причем в дифференциальных играх при особенно жестких ограничениях [5]–[13]. Предлагаемое ниже обобщение этого понятия опирается на определенное ниже симметричное A-равновесие.

О п р е д е л е н и е 2 ([7, 14]). *Ситуацию $q^* \in G$ назовем A_i- э к с т р е м а л ь н о й, если $G(q^{i*}) = q_i^*$ или если для любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) - q_i^*$ i-го игрока существует по крайней мере одна допустимая стратегия $\hat{q}^i = \hat{q}^i\langle q_i \rangle$ остальных $N-1$ игроков такая, что*

$$J_i(\hat{q}^i, q_i) \le J_i(q^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Пусть A_i — множество всех A_i-экстремальных ситуаций. Ситуацию $q^* \in G$ назовем с и т у а ц и е й с и м м е т р и ч н о г о A-р а в н о в е с и я, если $q^* \in A \triangleq \bigcap_{i=1}^{N} A_i$.

Легко видеть, что равновесие по Роузу–Нэшу есть специальный частный случай A-равновесия. Существование симметричного A-равновесия с любой точностью ε в задачах, удовлетворяющих допущению 1, дается следующей теоремой, являющейся обобщением теоремы 3.1 из [15].

Т е о р е м а 1. *Если некоторая задача удовлетворяет допущению 1, то в ней существует симметричное A-равновесие с любой точностью ε.*

Т е о р е м а 2. *Чтобы в задаче, удовлетворяющей допущению 1, ситуация q^* была симметричным A-равновесием, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла неравенствам*

$$J_i(q) \ge \sup_{q_i \in G(q^{i*})} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

Супремум в правых частях неравенств (3) может не достигаться лишь в исключительно редких точках q^*, так что почти все симметричные A-равновесия удовлетворяют неравенствам

$$J_i(q) \ge \max_{q_i \in G(q^{i*})} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

и для их поиска можно применить методики из работы [15]. Если же учесть, что равновесные по Роузу–Нэшу ситуации q^* удовлетворяют равенствам (1), то станет ясно, что эти ситуации представляют собой лишь отдельные точки (если они вообще существуют) на весьма богатом множестве симметричных A-равновесий.

Определим теперь равновесие, более "сильное", чем симметричное A-равновесие, но менее "сильное", чем равновесие по Роузу–Нэшу.

О п р е д е л е н и е 3. *Ситуацию $q^* \in G$ назовем с и л ь н о з а в и с и м ы м б е с к о а л и ц и о н н ы м р а в н о в е с и е м, если*

$$J_i(q^*) = \max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Т е о р е м а 3. *При выполнении допущения 1 и компактности множеств A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, множество равновесных по Роузу-Нэшу ситуаций оказывается подмножеством множества равновесий* (5).

Доказательство. Пусть q^* — равновесная по Роузу–Нэшу ситуация. Тогда если учесть, что $A_i \subset G$ и $A(q^{i*}) \subset G(q^{i*})$ и тот очевидный факт, что если максимум некоторого функционала достигается в некоторой точке из G и эта точка принадлежит компактному множеству $A \subset G$, то максимум этого функционала на множестве A окажется в этой же точке, то, с одной стороны, справедливы неравенства

$$\max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i) \le \max_{q_i \in G(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i) = J_i(q^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

а с другой — имеют место также и неравенства

$$\max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i) \ge J_i(q^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{7}$$

следующие из определения операции максимума.

Но из неравенств (6) и (7) следует, что если q^* —равновесная по Роузу–Нэшу ситуация, то неравенства (6) обращаются в равенства, а следовательно, эта ситуация равновесна также и в смысле (5). $\square$

П р и м е р. Рассмотрим статическую задачу с двумя участниками, в которой не существует равновесия по Роузу–Нэшу в чистых стратегиях, но существует предлагаемое новое равновесие (5). Пусть 1-й игрок, выбирающий свою чистую стратегию u_1 из множества $U_1 = [-1, 1]$, стремится обеспечить максимум функции

$$f_1(u_1, u_2) = u_1(u_1 - u_2),$$

а 2-й игрок выбором чистой стратегии u_2 из множества $U_2 = [-1, 1]$ максимизирует функцию

$$f_2(u_1, u_2) = u_2(u_1 - u_2).$$

Задачу можно рассматривать как бескоалиционную игру и как задачу принятия или отказа от предложения. Равновесия по Роузу–Нэшу в чистых стратегиях в ней не существует, а в классе смешанных стратегий $q_1(u_1)$ и $q_2(u_2)$ существует [4] и дается функциями распределения вероятности q_1 и q_2 вида

$$q_1^*(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } u_1 < -1, \\ 1/2 & \text{при } -1 \le u_1 < 1, \\ 1 & \text{при } u_1 \ge 1; \end{cases} \qquad q_2^*(u_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \le u_2 < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le u_2 \le 1, \end{cases} \tag{8}$$

приводящими к следующим значениям усредненного выигрыша участников в каждой (из бесконечного числа) партии игры:

$$J_1^* = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_1(u_1, u_2) dq_1^* dq_2^* = 1, \qquad J_2^* = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_2(u_1, u_2) dq_1^* dq_2^* = 0.$$

В случае же однократного “проигрывания” игры (что характерно по существу для всех жизненных ситуаций) или же в случае нескольких партий игры 1-й игрок не имеет никаких гарантий получить в среднем не только $J_1 = 1$, но и вообще больше нуля. Действительно, если 2-му игроку выбрать чистую стратегию $u_2 = -1$ (или $u_2 = 1$), то случайный механизм

(8) в одной или нескольких партиях вполне может привести к выпадению случайного числа — чистой стратегии $u_1 = -1$ (или $u_1 = 1$), что приведет к значению $J_1^* = f_1^* = 0$, которое гораздо хуже теоретически ожидаемого им значения $J_1^* = 1$, в то время как 2-й игрок получит при этом $J_2^* = f_2^* = 0$, что не хуже теоретически ожидаемого им значения в случае применения 1-м игроком оптимальной смешанной стратегии (8).

Таким образом, применение оптимальной смешанной стратегии в случае одной или нескольких партий игры может привести к весьма неблагоприятному для 1-го игрока результату и ни на какой гарантированный результат в этом случае он не может рассчитывать. В качестве альтернативы этому решению в смешанных стратегиях можно рассматривать равновесие (5) в чистых стратегиях.

В этой задаче множество $A_1 = \{0 \le u_1 \le 1,\ \ -1 \le u_2 \le u_1\} \cup \{-1 \le u_1 \le 0,\ \ u_1 \le u_2 \le$ $\le 1\}$, $A_2 = \{-1 \le u_1 \le 0,\ \ u_1 \le u_2 \le 0\} \cup \{0 \le u_1 \le 1,\ \ 0 \le u_2 \le u_1\}$, а множество ситуаций симметричного A-равновесия совпадает со множеством A_2. На множестве A $0 \le f_1 \le 1$, $0 \le f_2 \le 1/4$. Множество равновесий (5) состоит из двух ситуаций: $(-1; -1/2)$ и $(1; 1/2)$, в которых 1-й игрок получает $f_1^* = 1/2$, а 2-й — $f_2^* = 1/4$.

Поскольку оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока (8) в однократно "разыгрываемой" игре не гарантирует ему никакого положительного выигрыша, а в ситуациях $(-1; -1/2)$ и $(1; 1/2)$ он гарантированно получает $f_1^* = 1/2$, то равновесную в смысле (5) ситуацию едва ли он признает менее предпочтительной, чем смешанную стратегию (8). Что же касается 2-го игрока, то он в ситуациях $(-1; -1/2)$ и $(1; 1/2)$ получает $f_2^* = 1/4$, что гораздо выгоднее для него, чем он получил бы при любых реализациях оптимальных смешанных стратегий игроков. Кроме того, от ситуации (5) ни один из участников не рискнул бы отклониться ввиду явных угроз со стороны другого игрока.

Таким образом, равновесие (5) может быть весьма привлекательным как в дифференциальных играх, в которых применение смешанных стратегий невозможно по техническим соображениям, так и в любых игровых задачах, состоящих из одной или нескольких партий, в которых не существует равновесия по Роузу–Нэшу в чистых стратегиях и, в частности, во всех жизненных ситуациях, которые обычно происходят во времени лишь однократно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-01-00123, 97-01-00962, 96-15-96124).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roos C.F.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1929. V. 30. P. 360–384.

2. *Нэш Дж.Ф.* Бескоалиционные игры. Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205–221.

3. *Rosen J.B.* // Econometrica. 1965. V. 33. N° 3. P. 520–534.

4. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

5. *Жуковский В.И., Ухоботов В.И.* Дифференциальные игры со многими участниками. Указатель литературы за 1989–1994 гг. Челябинск, 1995.

6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

7. *Смольяков Э.Р.* Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. М.: Наука, 1986.

8. *Смольяков Э.Р.* // Кибернетика. 1990. N° 3. С. 96–99.

9. *Смольяков Э.Р.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31, N° 12. С. 2013–2019.

10. *Смольяков Э.Р.*// Там же. N° 11. С. 1881–1886.

11. *Смольяков Э.Р.* // Там же. 1997. Т. 33. N° 11. С. 1523–1527.

12. *Смольяков Э.Р.* // ДАН. 1998. Т. 358. N° 5. С. 603–606.

13. *Смольяков Э.Р.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. N°/,6. С. 776–781.

14. *Смольяков Э.Р.* // Математические методы в теории систем. М., 1980. N° 6. С. 32–51.

15. *Смольяков Э.Р.* // А и Т. 1996. N° 9. С. 18–28.