ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1999, том 367, № 3, с. 318–320

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.9

ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫЕ БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

©1999 г. Член-корреспондент РАН Ю.Г. Евтушенко[1], Э.Р.Смольяков[2]

Пересмотрено 15.01.2004 г.

Классическое состояние бескоалиционного равновесия (по Роузу–Нэшу) в теории игр [1, 2] характеризуется тем, что любая попытка индивидуального отклонения любого из N участников игры от этого равновесия не позволяет ему улучшить свой выигрыш, если остальные $N-1$ участников придерживаются своей равновесной стратегии (т.е. если равновесные стратегии остальных по существу выполняют роль совместной пассивной стратегии угрозы в адрес отклоняющегося от равновесия игрока). А неклассическое состояние [3, 4] характеризуется тем, что у остальных $N-1$ игроков имеется совместная стратегия активной угрозы, способная наказать отклоняющегося от равновесия участника. Однако в любом случае — наличия пассивных или же активных угроз со стороны остальных в адрес нарушающего равновесие участника — бескоалиционное равновесие едва ли можно считать действительно устойчивым состоянием игры, если оно одновременно не является парето-оптимальным, поскольку в этом случае оно может быть улучшено хотя бы для некоторых игроков без каких-либо потерь для остальных. В связи с этим поиск парето-оптимальных бескоалиционных равновесий представляет как теоретический, так и прикладной интерес. Однако классическое парето-оптимальное бескоалиционное равновесие существует при весьма жестких ограничениях на игру [5, 6], причем наиболее серьезные ограничения (касающиеся выпуклости функций и множеств) связаны с проблемой существования равновесия по Роузу–Нэшу. Что же касается наиболее слабых активных равновесий, то они существуют в любых играх [4], в связи с чем основное ограничение на существование парето-оптимальных активных равновесий накладывает в основном проблема существования множества Парето.

В данной работе формулируется и доказывается теорема существования парето-оптимального слабого активного равновесия и предлагается в качестве его усиления парето-оптимальное сильнозависимое равновесие, обобщающее одновременно понятие парето-оптимального равновесия по Роузу–Нэшу.

Условие 1. Пусть G — компактное множество в произведении $Q \triangleq \prod_{i=1}^{N} Q_i$ хаусдорфовых топологических пространств Q_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, и пусть на G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Введем обозначения: $\mathrm{Pr}_{Q_i} G$ — проекция множества G на пространство Q_i; $G(q_i)$ и $G(q^i)$ — сечения множества G; $q^i = q_1 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_N$; $S \triangleq \{s \in \mathbb{E}^N,\ s \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$ — неположительный полиэдральный конус в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^N$.

---

[1]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
[2]Институт системного анализа РАН

Определение 1 ([7]). *Точка $y \in \mathbb{E}^N$ определяется как S-экстремальная точка множества $Y = J(G) \triangleq \{J_1(G), \dots, J_N(G)\} \subset \mathbb{E}^N$, если $y \in Y$ и не существует точки $y^0 \in Y$ такой, что $y \in y^0 + S$, а множеством Парето в $\mathbb{E}^N$ называется множество $P(Y)$ S-экстремальных точек множества Y.*

Определение 2 ([4]). *Ситуация (точка) $q^* \in G$ называется A_i-экстремальной, если $G(q^{i*}) = q_i^*$ или если для любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) - q_i^*$ i-го игрока существует по крайней мере одна допустимая стратегия $\hat{q}^i = \hat{q}^i\langle q_i\rangle$ остальных $N-1$ игроков такая, что*

$$J_i(\hat{q}^i, q_i) \leq J_i(q^*), \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{1}$$

Ситуация $q^* \in G$ определяется как A-равновесие, если $q^* \in A \triangleq \bigcap_{i=1}^{N} A_i$, где A_i — множество всех A_i-экстремальных ситуаций.

Определение 3. *Ситуация (точка) $q^* \in G$ называется равновесной по Роузу–Нэшу* [1, 2, 8, 9], *если*

$$J_i(q^*) = \max_{q_i \in G(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i), \qquad i = 1, 2, \dots, N \tag{2}$$

Определим бескоалиционное равновесие, представляющее собой нечто среднее между A-равновесием и равновесием по Роузу–Нэшу (2), а следовательно, и существующее хотя и не во всех играх (как это имеет место в отношении A-равновесия), но во всяком случае в более широком классе игр, чем класс игр, имеющих равновесие по Роузу–Нэшу.

Определение 4. *Ситуацию $q^* \in G$ назовем сильнозависимым равновесием, если*

$$J_i(q^*) = \max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i), i = 1, 2, \dots, N. \tag{3}$$

Если равновесная по Роузу–Нэшу ситуация q^* характеризуется тем, что на любое отклонение от нее каждого в отдельности i-го участника у остальных $N-1$ игроков существует пассивная угроза (q^{i*}), не позволяющая этому участнику улучшить свой выигрыш $J_i(q^*)$, то сильнозависимое равновесие (3) характеризуется тем, что при отклонении от него i-го участника у остальных пассивная угроза q^{i*} оказывается достаточной для наказания этого i-го участника при отклонении его стратегии q_i от равновесной стратегии q_i^* лишь на множестве $A(q^{i*})$, а на множестве $G(q^{i*}) \backslash A(q^{i*})$ $N-1$ игроков должны использовать и активную угрозу $\hat{q}^i\langle q_i\rangle$. Именно за счет этого фактора определение 4 и оказывается более общим (более "слабым"), чем определение 3. Конечно, чем "сильнее" равновесие, тем оно предпочтительнее для участников игры. Однако если самого "сильного" из известных равновесий (в частности, равновесия (2)) не существует, как это имеет место в рассмотренном ниже примере, то участникам игры разумно ориентироваться на наиболее "сильное" из существующих равновесий (в рассмотренном примере таковым является равновесие (3)).

Во множестве бескоалиционных равновесий могут оказаться такие, улучшить которые невозможно ни для какого числа участников, не ухудшая при этом одновременно выигрыши каких-либо других участников. Подобные бескоалиционные равновесия, оказывающиеся дополнительно еще и оптимальными по Парето (см. определение 1), наиболее предпочтительны для приложений. Классическое равновесие по Роузу–Нэшу (2) в классе чистых стратегий существует в весьма ограниченных случаях [4, 5, 6, 8, 9], а если к этому равновесию предъявить еще и требование оптимальности по Парето, то его существование оказывается совсем уж редким явлением [5, 6]. В связи с этим представляет интерес выяснить условия существования активных парето-оптимальных равновесий.

Л е м м а 1. *Пусть удовлетворяется условие 1. Тогда множество*

$$G_0 \triangleq \{q^* \in G : J_i(q^*) \geq \sup_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} G} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i) \triangleq J_i^0, \;\; i = 1, 2, \dots, N\},$$

компактно, а множество A может быть задано системой неравенств:

$$A\{q^* \in G : J_i(q^*) \geq \sup_{q_i \in G(q^{i*})} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i), \;\; i = 1, 2, \dots, N\}, \tag{4}$$

Доказательство. Пусть удовлетворяется i-е неравенство в (4), в котором верхняя грань достигается в точке $(\bar{q}_i, \bar{q}^i\langle\bar{q}_i\rangle)$. Тогда из (4) следует, что для любой стратегии $q_i \in$ $\in G(q^{i*})$ найдется зависящая от q_i стратегия $\hat{q}^i\langle q_i\rangle$ такая, что

$$J_i(q^*) \geq J_i(\bar{q}_i, \bar{q}^i\langle\bar{q}_i\rangle) \geq J_i(q_i, \hat{q}^i\langle q_i\rangle),$$

а эти неравенства согласно определению 2 говорят о том, что ситуация q^* A_i-экстремальна. Пусть теперь верхняя грань в некотором сечении $G(q^{i*})$ не достигается и пусть ситуация q^*, удовлетворяющая неравенству (4), не принадлежит множеству A_i. Тогда из отрицания определения 2 следует, что найдется стратегия $q_i \in G(q^{i*})$ такая, что для любой стратегии $q^i \in G(q_i)$ окажется $J_i(q^*) < J_i(q_i, q^i)$, что противоречит i-му неравенству (4).

И обратно, пусть ситуация q^* удовлетворяет неравенствам (1). i-е неравенство в (1) только усилится, если в качестве стратегии $\hat{q}^i\langle q_i\rangle$ взять стратегию $\bar{q}^i\langle q_i\rangle$, доставляющую функционалу J_i минимум в сечении $G(q_i)$. А поскольку согласно определению 2 i-е неравенство в (1) удовлетворяется для любой стратегии $q_i \in G(q^{i*})$, то, следовательно, оно имеет место и в случае, когда берется то предельное значение переменной q_i на множестве $G(q^i)$, для которого определена величина $\sup\limits_{q_i \in G(q^i)} J_i(q_i, \bar{q}^i\langle q_i\rangle)$, равная правой части i-го неравенства в (4). Отсюда следует, что A_i-экстремальная ситуация q^* удовлетворяет неравенству (4). $\square$

Компактность множества G_0 следует из самого его определения в силу компактности множества G и непрерывности отображения $J(q) : G \to \mathbb{R}^N$.

Заметим, что $G_0 \subset A$ в силу очевидных неравенств

$$\sup_{q_i \in G(q^{i*})} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i) \leq \sup_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} G} \min_{q^i \in G(q_i)} J_i(q^i, q_i), \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть удовлетворяется условие 1 и множество A компактно. Тогда множество оптимальных по Парето точек $G_P \subset G$ имеет непустое пересечение с множеством A ситуаций симметричного слабого активного равновесия.*

Доказательство. Поскольку $J(q)$ — непрерывное отображение, то множество

$$Y_0 = J(G_0) = \{J(q^*) : J_i(q^*) \geq J_i^0, \;\; q^* \in G, \;\; i = 1, 2, \dots, N\}$$

компактно и допускает представление $Y_0 = Y \cap \mathrm{K}$, где $\mathrm{K} = \{J : J_i \geq J_i^0, \;\; i = 1, 2, \dots, N\}$ — замкнутый полиэдральный конус в $\mathbb{E}^N$ с вершиной в точке $J^0 = (J_1^0, J_2^0, \dots, J_N^0) \subset Y$.

Согласно следствию 4.6 работы [7] множество S-экстремальных точек компактного множества непусто, а следовательно, множества $P(Y)$ и $P(Y_0)$ S-экстремальных точек множеств Y и Y_0 соответственно непусты. Хотя и нетрудно видеть, что $P(Y_0) \subset P(Y)$, однако докажем все же это включение (от противного). Допустим, что $y^* \in P(Y_0)$ и в то же время $y^* \notin P(Y)$. Допущение, что точка y* не является S-экстремальной точкой множества Y, означает, что найдется такая точка $\bar{y} \in Y$, $\bar{y} \neq y^*$, что y* $\in \bar{y} + S$, причем точка ȳ удовлетворяет включению $\bar{y} \in K$, поскольку в противном случае не обеспечивается включение $y^* \in \bar{y} + S$ при $y^* \in K$. Однако включение $\bar{y} \in Y \cap K = Y_0$ противоречит определению S-экстремальности точки $y^* \in Y_0$, согласно которому не должно найтись точки $\bar{y} \in Y_0$ такой, что $y^* \in \bar{y} + S$. Это противоречие и показывает, что $P(Y_0) \subset P(Y)$. Если еще учесть, что $J^{-1}(P(Y_0)) \subset J^{-1}(P(Y)) \triangleq G_P$ (т.е. что $J^{-1}(P(Y_0))$ — это часть множества оптимальных по Парето ситуаций) и что $J^{-1}(P(Y_0)) \subset J^{-1}(Y_0) = G_0 \subset A$ (с учетом определений множеств G_0 и A и неравенств в (4) и (5)), то получаем $G_P \cap A \neq \emptyset$, т.е. множества G_P и A имеют непустое пересечение. $\square$

З а м е ч а н и е. Согласно [10] компактность множества A всегда имеет место, например в игровых задачах с независимыми множествами чистых стратегий игроков.

П р и м е р. Рассмотрим статическую бескоалиционную игру с двумя участниками. Участники игры имеют возможность лишь однократно выбирать свою стратегию (точку) на множестве допустимых состояний игры, в связи с чем применение в ней смешанных стратегий теряет смысл. Выбор игроками чистых стратегий u_1, u_2 (точек) ограничен тем, что реализуемая в результате их выбора ситуация (u_1, u_2) должна принадлежать множеству

$$G \triangleq \{(u_1, u_2) : |u_1| \geq |u_2|,\ |u_1| \leq 1\}. \tag{6}$$

Игроки стремятся обеспечить максимум своих платежных функций

$$J_1(u_1, u_2) = u_1(u_1 - u_2), \qquad J_2(u_1, u_2) = u_2(u_1 - u_2). \tag{7}$$

Поскольку функция $J_1(\cdot, u_2)$ не вогнута, то только по этому критерию ожидать в этой задаче существования равновесия по Роузу–Нэшу не приходится, что и подтверждает ее исследование. Найдем более слабые равновесия в игре (6), (7). Множества A_1, A_2 и $A \triangleq A_1 \cap A_2$ имеют следующий вид: $A_1 = G$, $A_2 = \{(u_1, u_2) : -1 \leq u_1 \leq 0,\ 0 \geq u_2 \geq u_1;\ 0 \leq u_1 \leq 1,\ 0 \leq u_2 \leq u_1\}$, $A = A_2$. Ситуации сильнозависимого равновесия (3) задаются парой точек $M(1; 1/2)$ и $N(-1; -1/2)$. Множество Парето $P(Y)$ в пространстве (J_1, J_2) имеет вид $P(Y) = \{(J_1, J_2) : J_2 = -J_1^2 + J_1,\ 1/2 \leq J_1 \leq 2\}$, а в пространстве (u_1, u_2) — вид

$$G_P = \left\{ (u_1, u_2) : u_1 = -1,\ -\frac{1}{2} \leq u_2 \leq 1;\ u_1 = 1,\ -1 \leq u_2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Таким образом, в задаче (6), (7) не существует парето-оптимального равновесия по Роузу–Нэшу, но существует несколько более "слабое" парето-оптимальное сильнозависимое равновесие, состоящее из пары точек M и N, представляющих собой часть весьма богатого множества парето-оптимальных слабых активных равновесий, определяемого в пространстве (u_1, u_2) парой отрезков прямых $\{u_1 = -1,\ -1/2 \leq u_2 \leq 0\}$ и $\{u_1 = 1,\ 0 \leq u_2 \leq 1/2\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-15-96124, 97-01-00123, 97-01-00962).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roos C.F.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. V. 30. P. 360–384.

2. *Nash J.* // Ann. Math. 1951. V. 54. N° 2. P. 286–295.

3. *Смольяков Э.Р.* Математические методы в теории систем. М., 1980. N° 6. С. 33–51.

4. *Смольяков Э.Р.* Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. М.: Наука, 1986.

5. *Тынянской Н.Т., Жуковский В.И.* Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 17. С. 3–112.

6. *Жуковский В.И., Ухоботов В.И.* Дифференциальные игры со многими участниками. Указатель литературы за 1989–1994 гг. М.: Челябин. гос. ун-т, 1995.

7. *Yu P.L.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1974. V. 14. N° 3. P. 319–377.

8. *Rosen J.V.* // Econometrica. 1965. V. 33. N° 3. P. 520–534.

9. *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.

10. *Евтушенко Ю.Г., Смольяков Э.Р.* // ДАН. 1998. Т. 363. N° 2. С. 175–177.