УДК 519.854

НАХОЖДЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ЗАДАННОЙ ТОЧКИ НА МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко

Рассматривается задача нахождения проекции точек на множество решений прямой и двойственной задач линейного программирования. Такая задача сводится к однократному решению задачи минимизации новой вспомогательной функции, начиная с некоторого порогового значения коэффициента штрафа. Получены оценки этого порогового значения. Приводятся результаты сравнения программной реализации предложенного метода с некоторыми известными коммерческими и исследовательскими пакетами решения задач линейного программирования.

Введение

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют не единственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек, метод квадратичной штрафной функции) дают возможность получать различные решения в случае неединственности (см., напр., [1, 2]). Так, симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. Метод внешней квадратичной функции дает возможность найти точное нормальное решение.

В данной работе используется метод решения задачи ЛП, близкий к методу квадратичной штрафной функции и модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче дает возможность получить точную проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной оптимизации вспомогательной кусочно-квадратичной функции при конечном значении коэффициента штрафа. Аналогично показано, как, применяя вспомогательную квадратичную функцию к прямой задаче, при конечном значении коэффициента штрафа, получить точную проекцию заданной точки на множество решений двойственной задачи ЛП. Применение обобщенного метода Ньютона для максимизации введенных вспомогательных функций дает возможность находить решения для задач ЛП с очень большим числом переменных (несколько миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). В работе предложен несколько нестандартный вид квадратичного (кусочно-квадратичного) штрафа для задач ЛП и приведены оценки порогового значения коэффициента штрафа, начиная с которого в результате однократной максимизации находится точная проекция заданной точки на множество решений задачи ЛП.

1. Постановка задач и вспомогательные результаты

Пусть задана прямая задача ЛП в стандартной форме

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00619), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5073.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН N° 3 (проект 3.14).

Двойственная к ней имеет вид

$$f_* = \max_{u \in U} b^\top u, \qquad U = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c \right\}. \tag{D}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, x — вектор прямых переменных, а u — двойственных, через 0_i обозначен i-мерный нулевой вектор.

Предположим, что множество решений X_* прямой задачи (P) непусто, следовательно, множество решений U_* двойственной задачи (D) также непусто. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна–Таккера) для задач (P) и (D) запишем в виде

$$Ax_* - b = 0_m, \qquad x_* \geq 0_n, \quad D(x_*)v_* = 0_n, \tag{1}$$

$$v_* = c - A^\top u_* \geq 0_n. \tag{2}$$

Здесь в ограничения двойственной задачи (D) введен неотрицательный вектор дополнительных переменных $v = c - A^\top u \geq 0_n$. Через $D(z)$ обозначается диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент есть i-я компонента вектора z.

Функция Лагранжа для задач (P) и (D) имеет вид

$$L(x, u) = c^\top x + u^\top (b - Ax).$$

Если $x_* \in X_*$, $u_* \in U_*$, то для любых $x \in \mathbb{R}^n_+$, $u \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства

$$L(x_*, u) \leq L(x_*, u_*) \leq L(x, u_*).$$

Рассмотрим задачи нахождения проекции $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений X_* прямой задачи (P) и проекции $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений U_* двойственной задачи (D) соответственно

$$\frac{1}{2}\|\hat{x}_*\|^2 = \min_{x \in X_*} \frac{1}{2}\|x - \hat{x}\|^2, \qquad X_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ c^\top x = f_*,\ x \geq 0_n \right\}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\|\hat{u}_*\|^2 = \min_{u \in U_*} \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2, \qquad U_* = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c,\ b^\top u = f_* \right\}. \tag{4}$$

Здесь и ниже используется евклидова норма векторов, f_* — оптимальное значение целевой функции исходной задачи ЛП.

Для этих задач введем функции Лагранжа

$$L^1(x, p, \beta) = \frac{1}{2}\|x - \hat{x}\|^2 + p^\top (b - Ax) + \beta(c^\top x - f_*),$$

$$L^2(u, y, \alpha) = \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2 + y^\top (A^\top u - c) + \alpha(f_* - b^\top u).$$

Здесь $p \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — множители Лагранжа соответственно для задач (3) и (4).

Двойственные задачи к (3) и к (4) имеют вид

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \max_{\beta \in \mathbb{R}^1} \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} L^1(x, p, \beta), \tag{5}$$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \min_{u \in \mathbb{R}^m} L^2(u, y, \alpha). \tag{6}$$

Запишем условия Куна–Таккера для задачи (3)

$$x - \hat{x} - A^\top p + \beta c \geq 0_n, \qquad D(x)(x - \hat{x} - A^\top p + \beta c) = 0_n, \quad x \geq 0_n, \tag{7}$$

$$Ax = b, \qquad c^\top x = f_*. \tag{8}$$

Условия Куна–Таккера для задачи (4) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&u - \hat{u} + Ay - \alpha b = 0_m,\\
&A^\top u - c \le 0_n, \quad D(y)(A^\top u - c) = 0_n, \quad y \ge 0_n, \quad f_* - b^\top u = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Легко проверить, что формулы (7) эквивалентны выражению

$$x = (\hat{x} - A^\top p - \beta c)_+, \tag{10}$$

где a_+ обозначает вектор a, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули. Эта формула дает решение внутренней задачи минимизации в задаче (5). Из (9) получаем решение внутренней задачи минимизации в (6)

$$u = \hat{u} + \alpha b - Ay. \tag{11}$$

Подставляя (10) в функцию Лагранжа $L^1(x, p, \beta)$ и (11) в функцию Лагранжа $L^2(u, y, \alpha)$, получаем двойственные функции соответственно для задач (5) и (6)

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^1(p, \beta) &= b^\top p - \frac{1}{2}\|(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+\|^2 - \beta f_* + \frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2,\\
\hat{L}^2(y, \alpha) &= -c^\top y - \hat{u}^\top(\alpha b - Ay) - \frac{1}{2}\|\alpha b - Ay\|^2 + \alpha f_*.
\end{aligned}
$$

Функция $\hat{L}^1(p, \beta)$ вогнута, кусочно-квадратична и непрерывно дифференцируема по своим переменным p и β. Функция $\hat{L}^2(y, \alpha)$ вогнута, квадратична и дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Двойственные задачи (5) и (6) соответственно сводятся к решению внешних задач максимизации

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \max_{\beta \in \mathbb{R}^1} \hat{L}^1(p, \beta), \tag{12}$$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \hat{L}^2(y, \alpha). \tag{13}$$

Решив задачу (12), найдем оптимальные p и β. После их подстановки в (10) получаем решение $\hat{x}_*$ задачи (3), т.е. проекцию точки $\hat{x}$ на множество решений прямой задачи ЛП (P). Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (12) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^1_p(p, \beta) &= b - A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ = b - Ax = 0_m,\\
\hat{L}^1_\beta(p, \beta) &= c^\top(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ - f_* = c^\top x - f_* = 0,
\end{aligned}
$$

где x определен формулой (10). Эти условия выполнены тогда и только тогда, когда $x \in X_*$ и $x = \hat{x}_*$.

Решив задачу (13), найдем оптимальные y и α, после их подстановки в (11) получаем решение $\hat{u}_*$ задачи (4), т.е. проекцию заданной точки $\hat{u}$ на множество решений двойственной задачи ЛП (D). Приведем необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (13):

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}^2_y(y, \alpha) = -c + A^\top(\hat{u} + \alpha b - Ay) = -c + A^\top u \le 0_n,\\
&D(y)\left[-c + A^\top(\hat{u} + \alpha b - Ay)\right] = D(y)(-c + A^\top u) = 0_n \qquad y \ge 0_n,\\
&\hat{L}^2_\alpha(y, \alpha) = -b^\top(\hat{u} + \alpha b - Ay) + f_* = -b^\top u + f_* = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь вектор u определен формулой (11). Эти условия оптимальности выполнены тогда и только тогда, когда $u \in U_*$ и $u = \hat{u}_*$.

К сожалению, задачи безусловной оптимизации (12) и (13) содержат неизвестную априори величину f_* — оптимальное значение целевой функции задачи ЛП. Однако эти задачи можно упростить, избавившись от этого недостатка. Для этого вместо (12) предлагается решать следующую упрощенную задачу безусловной максимизации:

$$I_1 = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \; S^1(p, \beta, \hat{x}), \tag{14}$$

где скаляр β фиксирован, $\hat{x}$ — точка, проекцию которой на множество X_* мы ищем, а функция $S^1(p, \beta, \hat{x})$ определена следующим образом:

$$S^1(p, \beta, \hat{x}) = b^\top p - \frac{1}{2} \left\| (\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ \right\|^2.$$

Вместо (13) также будем решать следующую упрощенную задачу максимизации на положительном ортанте:

$$I_2 = \max_{y \in \mathbb{R}^n_+} S^2(y, \alpha, \hat{u}), \tag{15}$$

где скаляр α фиксирован, а функция $S^2(y, \alpha, \hat{u})$ определена следующим образом:

$$S^2(y, \alpha, \hat{u}) = -c^\top y + \hat{u}^\top A y - \frac{1}{2} \|\hat{u} + \alpha b - A y\|^2.$$

Легко проверить, что задача (14) является двойственной к следующей задаче строго выпуклого программирования:

$$I_1' = \min_{x \in X} \left\{ \beta c^\top x + \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2 - \frac{1}{2} \|\hat{x}\|^2 \right\}, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \; x \geq 0_n\}. \tag{16}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (14)

$$S^1_p(p, \beta, \hat{x}) = b - A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ = 0_m \tag{17}$$

следуют необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (16). Действительно, перепишем (17) как

$$x = (\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+, \quad b - Ax = 0_m. \tag{18}$$

Условия (18) можно представить в виде

$$\beta c + x - \hat{x} - A^\top p \geq 0_n, \qquad D(x)(\beta c + x - \hat{x} - A^\top p) = 0, \quad x \geq 0_n, \tag{19}$$

$$b - Ax = 0_m, \tag{20}$$

т.е. приходим к условиям Куна–Таккера для задачи (16). Верно и обратное утверждение, согласно которому из условий Куна–Таккера (19), (20) следуют необходимые и достаточные условия оптимальности (17) для задачи (14). Итак, при любом фиксированном β решение $x(\beta)$ задачи квадратичного программирования (16) и решение $p(\beta)$ задачи безусловной максимизации (14) связаны между собой формулой

$$x(\beta) = [\hat{x} + A^\top p(\beta) - \beta c]_+. \tag{21}$$

Ниже будет показано, что если задача ЛП разрешима, то существует такое β_*, что при любом $\beta \geq \beta_*$ имеем $x(\beta) = \hat{x}_*$, т.е. из (21) получаем проекцию $\hat{x}_*$ точки $\hat{x}$ на множество решений X_* прямой задачи ЛП (P).

Аналогично задача максимизации на положительном ортанте (15) является двойственной к следующей задаче строго выпуклого программирования:

$$I_2' = \min_{u \in U}\{-\alpha b^\top u + \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2 + \alpha \hat{u}^\top b\}, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \le c\}. \tag{22}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (15)

$$-c + A^\top(\hat{u} + \alpha b - Ay) \le 0_n, \qquad D(y)\left[-c + A^\top(\hat{u} + \alpha b - Ay)\right] = 0, \quad y \ge 0_n$$

следуют условия Куна–Таккера для задачи (22)

$$\begin{gathered} u - \hat{u} + Ay - \alpha b = 0_m, \\ A^\top u - c \le 0_n, \qquad D(y)(A^\top u - c) = 0_n, \qquad y \ge 0_n \end{gathered}$$

и наоборот. При любом фиксированном α решение $u(\alpha)$ задачи квадратичного программирования (22) и решение $y(\alpha)$ задачи максимизации (15) связаны между собой соотношением

$$u(\alpha) = \hat{u} + \alpha b - Ay(\alpha). \tag{23}$$

Аналогично ниже будет показано, что если задача ЛП разрешима, то существует такое α_*, что при любом $\alpha \ge \alpha_*$ имеем $u(\alpha) = \hat{u}_*$, т.е. по формуле (23) получаем проекцию $\hat{u}_*$ точки $\hat{u}$ на множество решений U_* двойственной задачи ЛП (D).

2. Проекция точки на множество решений прямой задачи ЛП

Сначала рассмотрим задачу (14) и ее связь с прямой задачей ЛП (P). Заметим, что, в отличие от задачи (3), двойственная к ней задача (12) имеет неединственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (12) минимального значения β_* множителя Лагранжа β. Тогда в двойственной задаче (12), как будет показано в теореме 1, можно зафиксировать $\beta \ge \beta_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\hat{L}^1(p, \beta)$ только по переменным p, т.е. решать задачу (14). При этом пара $[p, \beta]$ является решением задачи (12), тройка $[\hat{x}_*, p, \beta]$ — седловая точка задачи (3), в которой нормальное решение $\hat{x}_*$ задачи (P) определяется по формуле (10).

Для нахождения минимального β обратимся к условиям Куна–Таккера для задачи (3), которые для этой задачи являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Без потери общности предположим, что первые ℓ компонент вектора $\hat{x}_*$ строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы $\hat{x}_*$, $\hat{x}$, c и матрицу A в виде

$$\hat{x}_*^\top = [\hat{x}_*^{\ell\,\top}, \hat{x}_*^{d\,\top}], \quad \hat{x}^\top = [\hat{x}^{\ell\,\top}, \hat{x}^{d\,\top}], \quad c^\top = [c^{\ell\,\top}, c^{d\,\top}], \quad A = [A_\ell \mid A_d], \tag{24}$$

где $\hat{x}_*^\ell > 0_\ell$, $\hat{x}_*^d = 0_d$, $d = n - \ell$.

В соответствии с разбиением (24) оптимальный вектор дополнительных переменных v_* из условий Куна–Таккера (1), (2) для задач (P) и (D) представим в виде $v_*^\top = [v_*^{\ell\,\top}, v_*^{d\,\top}]$. Тогда согласно условию дополняющей нежесткости $x_*^\top v_* = 0$, $x_* \ge 0_n$, $v_* \ge 0_n$ выражение (2) запишется в виде

$$v_*^\ell = c^\ell - A_\ell^\top u_* = 0_\ell, \tag{25}$$

$$v_*^d = c^d - A_d^\top u_* \ge 0_d. \tag{26}$$

С использованием обозначений (24) необходимые и достаточные условия оптимальности (7), (8) для задачи (3) можно переписать в развернутом виде

$$\hat{x}_*^\ell = \hat{x}^\ell + A_\ell^\top p - \beta c^\ell > 0_\ell, \tag{27}$$

$$\hat{x}_*^d = 0_d, \qquad \hat{x}^d + A_d^\top p - \beta c^d \le 0_d, \tag{28}$$

$$A_\ell \hat{x}_*^\ell = b, \qquad {c^\ell}^\top \hat{x}_*^\ell = f_*. \tag{29}$$

Среди решений системы (27)–(29) найдем такие множители Лагранжа $[p, \beta]$, что β является минимальным, т.е. приходим к задаче линейного программирования

$$\beta_* = \inf_{\beta \in \mathbb{R}^1} \inf_{p \in \mathbb{R}^m} \{\, \beta \ :\ A_\ell^\top p - \beta c^\ell = \hat{x}_*^\ell - \hat{x}^\ell,\ A_d^\top p - \beta c^d \le -\hat{x}^d \}. \tag{30}$$

Ограничения в этой задаче совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\beta_* = \gamma$, где γ — некоторое число.

Как будет доказано ниже в теореме 1, если система уравнений в (30) однозначно разрешима относительно p, то величина β_* представима в виде

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{\left[\hat{x}^d + A_d^\top (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell (\hat{x}_*^\ell - \hat{x}^\ell)\right]^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если } \sigma \ne \emptyset, \\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \emptyset. \end{cases} \tag{31}$$

Здесь введено индексное множество $\sigma = \{\ell + 1 \le i \le n : (v_*^d)^i > 0\}$ и γ — произвольное число.

Теорема 1. *Пусть множество решений X_* задачи* (P) *непусто. Тогда при любом $\beta \ge \beta_*$, где β_* задается формулой* (30), *пара $[p(\beta), \beta]$, где $p(\beta)$ — решение задачи безусловной максимизации* (14) *или, что то же самое, решение системы $A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+ = b$, определяет проекцию $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений X_* прямой задачи* (P) *по формуле*

$$\hat{x}_* = \left[\hat{x} + A^\top p(\beta) - \beta c\right]_+. \tag{32}$$

Если дополнительно ранг матрицы A_ℓ, соответствующий ненулевым компонентам вектора $\hat{x}_*$, равен m, то β_* определяется по формуле (31), *а точное решение двойственной задачи* (D) *находится в результате решения задачи безусловной максимизации* (14) *по формуле*

$$u_* = \frac{1}{\beta}\left[p(\beta) - (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell (\hat{x}_* - \hat{x}^\ell)\right]. \tag{33}$$

Доказательство. При $X_* \ne \emptyset$ ограничения в задаче (30) совместны. Если целевая функция в задаче (30) ограничена, то найдем ее решение $(p(\beta_*), \beta_*)$, если не ограничена, то в качестве $(p(\beta_*), \beta_*)$ возьмем любую допустимую точку. Из условий (27)–(29) следует, что $p(\beta_*)$ есть решение задачи (14), пара $[p(\beta_*), \beta_*]$ является решением задачи (12), тройка $[\hat{x}_*, p(\beta_*), \beta_*]$ — седловая точка задачи (3), в которой проекция $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений задачи (P) определяется в соответствии с формулой (10):

$$\hat{x}_* = [\hat{x} + A^\top p(\beta_*) - \beta_* c]_+.$$

Покажем, что при любом β больше найденного β_* существует решение $p(\beta)$ задачи (14) и проекция $\hat{x}_*$ находится из формулы (32), т.е. покажем, что пара $[p(\beta_*) + \delta p, \beta_* + \delta\beta]$ при любом приращении $\delta\beta > 0$ удовлетворяет условиям (27), (28). Для этого достаточно показать, что совместна система

$$\delta\beta > 0, \qquad A_\ell^\top \delta p - \delta\beta c^\ell = 0_\ell, \qquad A_d^\top \delta p - \delta\beta c^d \le 0_d. \tag{34}$$

Воспользуемся теоремой Моцкина об альтернативах для однородных линейных систем, которая утверждает, что всегда совместна либо система

$$Cx > 0_m, \qquad Dx \geq 0_m, \qquad Fx = 0_m, \tag{35}$$

либо система

$$C^\top z_1 + D^\top z_2 + F^\top z_3 = 0_n, \qquad z_1 \geq 0_m, \qquad \|z_1\| \neq 0,\ z_2 \geq 0_m.$$

Перепишем систему (34) в обозначениях системы (35), т.е. положим

$$C = [0_m^\top \mid 1], \quad D = [-A_d^\top \mid c^d], \quad F = [A_\ell^\top \mid c^\ell], \quad x^\top = [\delta p^\top, \delta\beta].$$

Предположим, что система (34) несовместна, тогда совместна система

$$\begin{gathered} -A_d z_2 + A_\ell z_3 = 0_m, \\ z_1 + {c^d}^\top z_2 - {c^\ell}^\top z_3 = 0, \\ z_1 > 0, \qquad z_2 \geq 0_n. \end{gathered}$$

Эту систему можно записать в виде

$$-A_d z_2 + A_\ell z_3 \;=\; 0_m, \tag{36}$$

$$-{c^d}^\top z_2 + {c^\ell}^\top z_3 \;>\; 0, \tag{37}$$

$$z_2 \;\geq\; 0_n. \tag{38}$$

Совместная система (36)–(38) в соответствии с теоремой об альтернативах неоднородных линейных систем имеет несовместную альтернативную систему

$$-A_d^\top u \;\geq\; -c^d, \tag{39}$$

$$A_\ell^\top u \;=\; c^\ell. \tag{40}$$

Приходим к противоречию, так как система (39)–(40)имеет решение $u_* \in U_*$ по предположению теоремы о разрешимости исходной задачи ЛП. Следовательно, при любом $\delta\beta > 0$ существует такое δp, что пара $[p(\beta_*) + \delta p, \beta_* + \delta\beta]$ является решением задачи (12), $[p(\beta_*) + \delta p]$ — решением задачи (14) при фиксированном параметре $\beta = \beta_* + \delta\beta$ и проекция $\hat{x}_*$ находится из (32).

Если выполнено предположение теоремы о том, что матрица A_ℓ имеет полный ранг m и $\ell \geq m$, то в (27) линейная система уравнений относительно неизвестных p совместна и единственное решение p этой системы дается формулой

$$p(\beta) = (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell (\hat{x}_*^\ell - \hat{x}^\ell + \beta c^\ell). \tag{41}$$

Подставляя эту формулу в (28), получаем неравенство

$$q \leq \beta z, \tag{42}$$

где введены обозначения $q = \hat{x}^d + A_d^\top (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell (\hat{x}_*^\ell - \hat{x}^\ell)$ и $z = c^d - A_d^\top (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell c^\ell$.

Если p определено согласно (41) и β удовлетворяет неравенству (42), то пара $[p, \beta]$ является решением двойственной задачи (12). Легко найти минимальное значение β, при котором выполнено неравенство (42), т.е. получается аналитическое решение задачи (30).

Из (25) следует, что $u_* = (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell c^\ell$. Подставляя это выражение в (26), получаем $v_*^d = z \geq 0_d$. Естественно ввести индексное множество: $\sigma = \{\ell + 1 \leq i \leq n : (v_*^d)^i > 0\}$. Если $\sigma = \emptyset$, то (42) выполнено при любом β. Неравенство (42) имеет место при любом $\beta \geq \beta_*$, где

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{q^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если } \sigma \neq \emptyset, \\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \emptyset, \end{cases}$$

и γ — произвольное число. Итак, можно решать упрощенную задачу безусловной максимизации (14). Ее решение одновременно дает решение двойственной задачи (12). Далее, используя формулу (10), получаем проекцию $\hat{x}_*$ заданной точки $\hat{x}$ на множество решений X_* задачи (P). Из (41) и (25) следует, что решение задачи (D) выражается через решение $p(\beta)$ задачи (14) при $\beta \geq \beta_*$ по формуле (33). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 позволяет заменить задачу (12), содержащую априори неизвестное число f_*, на задачу (14), в которой вместо этого числа фигурирует полуинтервал $[\beta_*, +\infty)$, что существенно проще с вычислительной точки зрения.

Отметим, что значение β_*, найденное из решения задачи линейного программирования (30) или формулы (31), может быть отрицательным. Это означает, что для прямой задачи (P) проекция точки $\hat{x}$ на множество ее решений X_* совпадает с проекцией этой точки на допустимое множество X.

Следующая теорема утверждает, что если известна какая-нибудь точка $x_* \in X_*$, то можно получить решение двойственной задачи (D) после однократного решения задачи безусловной максимизации (14).

Теорема 2. *Пусть множество решений X_*задачи ЛП* (P) *непусто. Тогда для любых $\beta > 0$ и $\hat{x} = x_* \in X_*$ точное решение двойственной задачи* (D) *находится по формуле $u_* = p(\beta)/\beta$, где $p(\beta)$ — решение задачи безусловной максимизации* (14).

Доказательство. Если исходная задача ЛП разрешима, то при любом фиксированном β разрешимы взаимно двойственные задачи (16) и (14). Пусть $p(\beta)$ — решение задачи (14) при $\hat{x} = x_* \in X_*$ и любом $\beta > 0$. Легко видеть, что тогда x_* есть решение задачи (16). Действительно, два первых члена целевой функции задачи (16) принимают свое минимальное значение $\beta f_* + 0$ на допустимом множестве X. Тогда согласно формуле (21) решения задач безусловной максимизации (14) и квадратичного программирования (16) связаны между собой выражением $x_* = [x_* + A^\top p(\beta) - \beta c]_+$. Это выражение эквивалентно следующим условиям:

$$\beta c - A^\top p(\beta) \geq 0_n, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad D(x_*) \left[\beta c - A^\top p(\beta)\right] = 0_n. \tag{43}$$

Обозначим $u_* = p(\beta)/\beta$. Тогда с учетом того, что $x_* \in X$, из (43) получим

$$c - A^\top u_* \geq 0_n, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad D(x_*)(c - A^\top u_*) = 0, \qquad Ax_* = b.$$

Отсюда следует, что $[x_*, u_*]$ — точка Куна–Таккера для задачи ЛП и $u_* = p(\beta)/\beta$ есть решение двойственной задачи (D). Теорема доказана. $\square$

Для иллюстрации работы теорем 1 и 2 обратимся к методу внешнего квадратичного штрафа, примененному к двойственной задаче (D), т.е. рассмотрим задачу

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^\top p - \frac{1}{2} \|(A^\top p - \beta c)_+\|^2 \right\}. \tag{44}$$

Такой вид задачи для метода внешнего штрафа был введен в [3, 4]. Оказывается, можно получить точное решение u_* двойственной задачи (D), не устремляя в (44) коэффициент штрафа β к $+\infty$. Если в задаче (44) коэффициент штрафа $\beta \geq \beta_*$, то согласно теореме 1 по формуле (32), в которой $\hat{x} = 0_n$, находим нормальное решение $\tilde{x}_*$ прямой задачи (P). Согласно теореме 2 далее следует решить задачу безусловной максимизации при любом $\beta > 0$:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^\top p - \frac{1}{2} \left\| \left[\tilde{x}_* + \beta(A^\top p - \beta c) \right]_+ \right\|^2 \right\}. \tag{45}$$

Используя ее решение $p(\beta)$, получаем решение $p(\beta)/\beta = u_* \in U_*$ двойственной задачи (D). Отметим, что задача (45) не сложнее, чем задача (44). Таким образом, решая только две задачи безусловной максимизации, можно получить точное нормальное решение прямой и некоторое точное решение двойственной задач ЛП, если в задаче (44) взять коэффициент штрафа $\beta \geq \beta_*$, а в задаче (45) — любой положительный коэффициент β.

Для одновременного решения прямой и двойственной задач ЛП можно использовать следующий итерационный процесс [5]:

$$x_{k+1} = (x_k + A^\top p_{k+1} - \beta c)_+, \tag{46}$$

где произвольный параметр $\beta > 0$ фиксирован, а вектор p_{k+1} определяется из решения следующей задачи безусловной максимизации:

$$p_{k+1} \in \arg\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^\top p - \frac{1}{2} \left\| (x_k + A^\top p - \beta c)_+ \right\|^2 \right\}. \tag{47}$$

Теорема 3. *Пусть множество решений X_* прямой задачи* (P) *непусто. Тогда при любом $\beta > 0$ и при любой начальной точке x_0 итерационный процесс* (46), (47) *сходится к $x_* \in X_*$ за конечное число шагов ω. Формула $u_* = p_{\omega+1}/\beta$ дает точное решение двойственной задачи* (D).

Этот итерационный процесс является конечным и дает точное решение прямой задачи (P) и точное решение двойственной задачи (D). Отметим, что при использовании этого метода не требуется знать пороговое значение коэффициента штрафа. Но если выбранное значение коэффициента меньше порогового значения, то методом за конечное число шагов находится некоторое решение прямой задачи, а не проекция начальной точки на множество решений прямой задачи ЛП. Заметим, что $x_\omega = x_* \in X_*$ является проекцией точки $x_{\omega-1}$ на множество решений X_* задачи (P).

3. Проекция точки на множество решений двойственной задачи ЛП

Теперь рассмотрим задачу (15) и установим ее связь с двойственной задачей ЛП (D). Задача (13), двойственная к (4), в отличие от последней имеет не единственное решение. Рассмотрим вопрос о нахождении среди всех решений двойственной задачи (13) минимального значения α_* множителя Лагранжа α. Тогда, как будет показано ниже, в двойственной задаче (13) можно зафиксировать $\alpha \geq \alpha_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\hat{L}^2(y, \alpha)$ только по переменным y, т.е. решать задачу (15).Обозначим это решение через $y(\alpha)$. Тогда пара $[y(\alpha), \alpha]$ является решением задачи (13), тройка $[\hat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4) и проекция $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений задачи (D) находится в соответствии с (11).

Без ограничения общности будем считать, что матрица A представима в блочном виде $A = [\, B \mid N \,]$ в соответствии с разбиением вектора дополнительных переменных $v_* = c - A^\top \hat{u}_*$ ограничений двойственной задачи (D), вычисленного в решении $\hat{u}_*$ задачи (4), на нулевые

$v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k$ и положительные $v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r$ компоненты, где $r = n - k$. В соответствии с этим разбиением вектор c, решение x_* прямой задачи (P) и множитель Лагранжа y представляются в виде

$$c^\top = [c^{B\top}, c^{N\top}], \qquad x_*^\top = [x_*^{B\top}, x_*^{N\top}], \qquad y = [y^{B\top}, y^{N\top}].$$

Учитывая это разбиение, условия Куна–Таккера (9) для задачи (4) перепишем в следующем более детализированном виде:

$$v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k, \qquad y^B \geq 0_k, \tag{48}$$

$$v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r, \qquad y^N = 0_r, \tag{49}$$

$$\hat{u}_* - \hat{u} - \alpha b + B y^B = 0_m, \tag{50}$$

$$b^\top \hat{u}_* = f_*. \tag{51}$$

Среди решений системы (48)–(51) найдем такие множители Лагранжа $[y, \alpha]$, что α является минимальным, т.е. эти множители Лагранжа являются решением следующей задачи линейного программирования:

$$\alpha_* = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \inf_{y^B \in \mathbb{R}^k} \left\{ \alpha : B y^B - \alpha b = \hat{u} - \hat{u}_*,\ y^B \geq 0_k \right\}. \tag{52}$$

В этой задаче ограничения совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\alpha_* = \gamma$, где γ — некоторое число.

Ниже при некоторых дополнительных предположениях об исходной задаче ЛП в теореме 3 устанавливается формула для α_*. При этом предполагается, что прямая задача ЛП (P) имеет единственное, быть может, вырожденное решение x_*. В этом решении $x_*^L > 0_\ell$ — совокупность положительных компонент, $\ell \leq m$. В случае невырожденного решения $\ell = m$. Обозначим индексное множество, соответствующее положительным компонентам вектора x_*, через I_*^L. Если x_* — вырожденное решение, то двойственная задача ЛП (D) имеет не единственное решение, и в точке $[x_*, \hat{u}_*]$, где $\hat{u}_*$ — проекция u_* на множество U_*, выполнены условия Куна–Таккера для задачи (P), которые в подробной записи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&v_*^L = c^L - B_L^\top \hat{u}_* = 0_\ell, \quad x_*^L > 0_\ell;\\
&v_*^S = c^S - B_S^\top \hat{u}_* = 0_s, \quad x_*^S = 0_s;\\
&v_*^N = c^N - N^\top \hat{u}_* > 0_r, \quad x_*^N = 0_r;\\
&B_L x_*^L = b.
\end{aligned}$$

Здесь матрица $B = [\ B_L \mid B_S\ ]$ представлена в соответствии с разбиением вектора x_*^B на положительные $x_*^L > 0_\ell$ и нулевые $x_*^S = 0_s$ компоненты, $\ell + s = k \leq m$, $r = n - r$. В силу единственности решения x_* матрица B состоит из $k \leq m$ линейно независимых столбцов, т.е. ее ранг равен k.

Для дальнейшего потребуется вектор $\eta \in \mathbb{R}^k$, определенный следующим образом: $\eta = (B^\top B)^{-1}(c^B - B^\top \hat{u})$. Заметим, что если $k = m$, то вектор η легко приводится к виду $\eta = B^{-1}(\hat{u}_* - \hat{u})$. Кроме того, определим следующую величину:

$$\alpha_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in I_*^L} \dfrac{(\eta^L)^i}{(x_*^L)^i}, & \text{если } I_*^L \neq \emptyset,\\ \gamma > -\infty, & \text{если } I_*^L = \emptyset, \end{cases} \tag{53}$$

где γ — произвольное число.

Теорема 4. *Пусть множество решений U_* задачи* (D) *непусто. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где α_* задается формулой* (52), *пара $[y(\alpha), \alpha]$, где $y(\alpha)$ — решение задачи максимизации на положительном ортанте* (15), *определяет проекцию $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений U_* двойственной задачи* (D) *по формуле*

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha b - Ay(\alpha). \tag{54}$$

Пусть дополнительно ранг матрицы B, соответствующий нулевым компонентам вектора дополнительных переменных $v_*^B = c^B - B^\top \hat{u}_* = 0_k$, вычисленных в нормальном решении $\hat{u}_*$, равен $k \leq m$. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где α_* определяется формулой (53), *пара $[y(\alpha), \alpha]$, где $y(\alpha)$ — решение задачи* (15) *— имеет вид*

$$y(\alpha) = \begin{bmatrix} y^B \\ y^N \end{bmatrix}, \qquad y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k, \qquad y^N = 0_r,$$

определяет проекцию $\hat{u}_*$ точки $\hat{u}$ на множество решений двойственной задачи (D) *по формуле* (54).

Доказательство первого утверждения теоремы 4 совершенно аналогично доказательству первого утверждения теоремы 1, а потому здесь не приводится.

Докажем второе утверждение. Вектор $\hat{u}_*$ является единственным решением задачи (4), и существуют такие множители Лагранжа $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, что точка $[\hat{u}_*, y, \alpha]$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера для задачи (4):

$$\begin{gathered} D(y)v_* = 0_n, \qquad v_* = c - A^\top \hat{u}_* \geq 0_n, \qquad y \geq 0_n, \\ \hat{u}_* - \hat{u} - \alpha b + Ay = 0_m, \qquad b^\top \hat{u}_* = f_*. \end{gathered} \tag{55}$$

Множители Лагранжа y и α не единственны и при дополнительном предположении теоремы можно найти минимальный множитель α_*, при котором однозначно определяется множитель $y(\alpha_*)$, одновременно являющийся и решением задачи (15). Обратимся к более детальной записи (48)–(51) условий Куна–Таккера (55). Решая систему уравнений (48) и (50), получим

$$\begin{aligned} y^B &= \alpha (B^\top B)^{-1} B^\top b - \eta \geq 0_k, \\ \hat{u}_* &= \hat{u} + \alpha M b + B\eta. \end{aligned} \tag{56}$$

Здесь $M = I - B(B^\top B)^{-1} B^\top$ — матрица проектирования, и так как вектор b лежит в пространстве столбцов матрицы B_L, то $Mb = 0_m$. Так как матрица B состоит из линейно независимых столбцов, то существует только один вектор $\eta = \begin{bmatrix} \eta^L \\ \eta^S \end{bmatrix}$ такой, что $\hat{u}_* - \hat{u} = B\eta = B_L \eta^L + B_S \eta^S$. Покажем, что $-\eta^S \geq 0_s$. Из условия $Bx_*^B = b$ следует

$$x_*^B = (B^\top B)^{-1} B^\top b = \begin{bmatrix} x_*^L \\ x_*^S \end{bmatrix} \begin{matrix} > 0_\ell \\ = 0_s \end{matrix}. \tag{57}$$

В (56) множитель Лагранжа α должен быть таким, чтобы $y^B \geq 0_k$. С учетом (57) из (56) получаем

$$y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k.$$

Отсюда следует, что $\eta^S \leq 0_s$ и на α следует наложить условие $\alpha \geq \alpha_*$, где α_* удовлетворяет условию (53). При фиксированном $\alpha \geq \alpha_*$ вектор $y(\alpha)$ однозначно определяется из условий Куна–Таккера (55) и является единственным решением задачи (15). Пара $[y(\alpha), \alpha]$ — решение задачи (13), тройка $[\hat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4), нормальное решение $\hat{u}_*$ задачи (D) находится в соответствии с (11), т.е. приходим к формуле (54). Теорема доказана. $\square$

Заметим, что и в этом случае величина порогового значения α_* может быть отрицательной. Это бывает, когда проекция точки на множество решений задачи (D) совпадает с проекцией этой точки на допустимое множество задачи (D). Также имеется аналог теоремы 2. Если известна какая-нибудь точка $u_* \in U_*$, то можно получить решение прямой задачи (P) после однократного решения задачи максимизации (15).

Теорема 5. *Пусть множество решений U_* задачи ЛП* (D) *непусто. Тогда для любых $\alpha > 0$ и $\hat{u} = u_* \in U_*$ точное решение прямой задачи* (P) *находится по формуле $x_* = y(\alpha)/\alpha$, где $y(\alpha)$ — точка, доставляющая максимум функции $S^2(y, \alpha, u_*)$ на $\mathbb{R}^n_+$.*

Для одновременного решения двойственной и прямой задач ЛП можно использовать следующий итерационный процесс, при котором не требуется знать пороговое значение α_*:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha b - Ay_{k+1}. \tag{58}$$

Здесь параметр α фиксирован, а вектор y_{k+1} определяется из решения следующей задачи минимизации на положительном ортанте:

$$y_{k+1} \in \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n_+} \left\{ c^\top y + u_k^\top Ay + \frac{1}{2}\|\alpha b - Ay\|^2 \right\}.$$

Этот итерационный процесс является конечным и дает точное решение прямой задачи (P) и точное решение двойственной задачи (D).

Теорема 6. *Пусть множество решений U_* двойственной задачи* (D) *непусто. Тогда при любом $\alpha > 0$ и при любой начальной точке u_0 итерационный процесс* (58) *сходится к $u_* \in U_*$ за конечное число шагов ν. Формула $x_* = y_{\nu+1}/\alpha$ дает точное решение прямой задачи* (P).

Заметим, что $u_\nu = u_* \in U_*$ является проекцией точки $u_{\nu-1}$ на множество решений U_* задачи (D).

4. Обобщенный метод Ньютона и вычислительный эксперимент

Безусловная максимизация в (14) может выполняться любым методом, например, методом сопряженного градиента. Но, как показал О. Мангасарьян, для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [6, 7]. Приведем краткое описание обобщенного метода Ньютона и результаты численного эксперимента решения задач ЛП большой размерности.

Максимизируемая функция $S^1(p, \beta, \hat{x})$ в задаче (14) является вогнутой, кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно, градиент

$$S^1_p(p, \beta, \hat{x}) = b - A(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+$$

функции $S^1(p, \beta, \hat{x})$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является симметричной отрицательно полуопределенной ($m \times m$)-матрицей следующего вида:

$$\partial^2_p S^1(p, \beta, \hat{x}) = -AD^\sharp(z)A^\top,$$

где через $D^\sharp(z)$ обозначена диагональная $(n \times n)$-матрица с i-м диагональным элементом z^i, равным 1, если $(\hat{x} + A^\top p - \beta c)^i > 0$, и равным 0, если $(\hat{x} + A^\top p - \beta c)^i \le 0$, $i = 1, \dots, n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, используется следующее модифицированное ньютоновское направление:

$$- \left[\partial_p^2 S^1(p, \beta, \hat{x}) - \delta I_m\right]^{-1} S_p^1(p, \beta, \hat{x}),$$

где δ — малая положительная величина (обычно при расчетах полагалось $\delta = 10^{-4}$) и I_m — единичная матрица порядка m.

В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$p_{s+1} = p_s - \left[\partial_p^2 S^1(p_s, \beta, \hat{x}) - \delta I_m\right]^{-1} S_p^1(p_s, \beta, \hat{x}).$$

Критерий окончания его работы полагался следующим:

$$\|p_{s+1} - p_s\| \le \mathrm{tol}.$$

О. Мангасарьян исследовал сходимость обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации подобной вогнутой кусочно-квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции можно найти в [6, 7].

Решались сгенерированные случайным образом задачи ЛП с большим числом неотрицательных переменных (до нескольких десятков миллионов) и средним числом ограничений-равенств (до нескольких тысяч), т.е. имело место $n \gg m$.

Итак, задавались числа m и n, определяющие количество строк и столбцов матрицы A, и ρ — плотность заполнения матрицы A ненулевыми элементами. В частности, значение $\rho = 1$ означает, что случайным образом генерировались все элементы матрицы A, а значение $\rho = 0.01$ указывает, что в матрице A генерировался только 1% элементов, а остальные полагались равными нулю. Элементы матрицы A определялись случайным образом из интервала [-50,+50]. Решение x_* прямой задачи (P) и решение u_* двойственной задачи (D) генерировались следующим образом. Полагалось, что в векторе x_* содержится $n - 3m$ нулевых компонент, а остальные компоненты выбирались случайным образом из интервала [0,10]. Половина компонент вектора u_* полагалась равными нулю, а остальные выбирались случайным образом из интервала [-10,10]. Решения x_* и u_* использовались для вычисления коэффициентов целевой функции c и правых частей b задачи ЛП (P). Векторы b и c определялись по формулам

$$b = Ax_*, \quad c = A^\top u_* + \xi,$$

если $x_*^i > 0$, то $\xi^i = 0$, если $x_*^i = 0$, то компонента ξ^i выбиралась случайным образом из интервала

$$0 \le \gamma^i \le \xi^i \le \theta^i.$$

В приведенных ниже результатах расчетов считалось, что все $\gamma^i = 1$ и $\theta^i = 10$. Заметим, что при близких к нулю γ^i величина $\xi^i = (c - A^\top u_*)^i = (v_*^d)^i$ может также оказаться очень малой величиной. Согласно формуле (31) априори неизвестная величина β_* может быть очень большой. Тогда сгенерированная задача ЛП может оказаться трудноразрешаемой.

Предлагаемый метод решения прямой и двойственной задач ЛП, сочетающий итеративный процесс (46), (47) и обобщенный метод Ньютона, реализован в системе MATLAB. Для вычислений использовался компьютер с процессором Pentium-4, тактовой частотой 2.6 ГГц, оперативной памятью 1 Гб. Численные эксперименты со случайно сгенерированными задачами ЛП показали высокую эффективность метода при решении задач ЛП с большим числом неотрицательных переменных (решались задачи до 50 миллионов переменных) и средним числом ограничений-равенств (до 5 тысяч). Время решения таких задач составляло от нескольких десятков секунд до полутора часов. Высокая эффективность этих расчетов объясняется тем, что основная вычислительная трудность предлагаемого метода приходится на решение вспомогательной задачи безусловной максимизации, которая решается обобщенным методом Ньютона. Ее размерность определяется количеством ограничений типа равенств, число которых существенно меньше, чем число неотрицательных переменных в исходной задаче ЛП.

В приведенной ниже таблице даны результаты расчетов тестовых задач с помощью программы EGM, реализующей на MATLABе метод (46), (47), и с помощью доступных нам зарубежных коммерческих и исследовательских пакетов. Все задачи решались на компьютере Celeron 2.02 GHz с оперативной памятью 1.0 Gb. Для сравнения использовались пакеты BPMPD v.2.3 (метод внутренней точки) [8], MOSEK v.2.0 (метод внутренней точки) [9] и широко распространенный коммерческий пакет CPLEX v.6.0.1 (метод внутренней точки и симплекс-метод). Следует отметить работу [10], в которой представлены результаты вычислительного эксперимента решения больших задач ЛП с параллелепипедными ограничениями на переменные с использованием обобщенного метода Ньютона.

$m \times n \times \rho$	Solver	T, sec	Iter.	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$500 \times 10^4 \times 1$	EGM (MATLAB)	55.0	12	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
	BPMPD (Interior point)	37.4	23	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$
	MOSEK (Interior point)	87.2	6	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
	CPLEX (Interior point)	80.3	11	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.0
	CPLEX (Simplex)	61.8	8308	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$
$3000 \times 10^4 \times 0.01$	EGM (MATLAB)	155.4	11	$6.1 \cdot 10^{-10}$	$3.4 \cdot 10^{-13}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
	BPMPD (Interior point)	223.5	14	$4.6 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$
	MOSEK (Interior point)	42.6	4	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-8}$
	CPLEX (Interior point)	69.9	5	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.0
	CPLEX (Simplex)	1764.9	6904	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-9}$	$9.3 \cdot 10^{-2}$
$1000 \times (5 \times 10^6) \times 0.01$	EGM (MATLAB)	1007.5	10	$3.9 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-13}$	$6.1 \cdot 10^{-7}$
$1000 \times 10^5 \times 1$	EGM (MATLAB)	2660.8	8	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$7.1 \cdot 10^{-7}$

В таблице указаны размерности m, n и ρ — плотность ненулевых элементов матрицы A, T — время решения задачи ЛП в секундах, в столбце Iter — количество итераций (для программы EGM указано общее число решенных систем линейных уравнений в методе Ньютона при решении задач (47)). Везде полагалось $\beta = 1$. Эта величина превышала пороговое значение β_*, и поэтому в результате решения задачи ЛП с помощью программы EGM была получена проекция нуля (начальная точка $\hat{x} = 0_n$) на множество решений прямой задачи ЛП, т.е. нормальное решение. В качестве критерия точности решения задачи ЛП вычислялись чебышевские нормы векторов невязок:

$$\Delta_1 = \|Ax - b\|_\infty, \quad \Delta_2 = \|(A^\top u - c)_+\|_\infty, \quad \Delta_3 = |c^\top x - b^\top u|.$$

В третьей строке таблицы даны результаты расчетов задач ЛП с пятью миллионами неотрицательных переменных, тысячей ограничений, однопроцентной заполненностью матрицы A ненулевыми элементами. Время расчетов по программе EGM составило 16 мин. В четвертой строке приведены результаты в случае, когда задача имела 1000 ограничений, матрица A была полностью заполнена и $n = 10^5$. Время расчетов составило 44 мин. Обе задачи были решены с высокой точностью (нормы невязок не превосходили 7.1×10^{-7}). Обе эти задачи не удалось решить другими пакетами.

Литература

1. Еремин И.И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999.
2. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2003.
3. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. N° 12. С. 1766–1786.
4. Kanzow C., Qi H., Qi L. On the minimum norm solution of linear programs // J. of Optimizat. Theory and Appl. 2003. V. 116. P. 333–345.
5. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. N° 9. С. 1564–1573.
6. Mangasarian O.L. A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth.and Software. 2002. V. 17. P. 913–930.
7. Mangasarian O.L. A Newton method for linear programming // J. of Optimizat. Theory and Appl. 2004. V. 121. P. 1–18.
8. Meszaros Cs. The BPMPD interior point solver for convex quadratic programming problems // Optimizat. Meth. and Software. 1999. V. 11–12. P. 431–449.
9. Andersen E.D., Andersen K.D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of homogeneous algorithm. 2000. High Performance Optimization. New York: Kluwer, 2000. P. 197–232.
10. Попов Л.Д. Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. N° 2. С. 206–221.