Том 21 № 3 2015

УДК 519.9

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Г. А. Амирханова, А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Предлагается метод решения следующей обратной задачи линейного программирования (ЛП). Дана задача ЛП и выбран один из ее допустимых векторов. Требуется так минимально изменить вектор целевой функции задачи, чтобы выбранный вектор стал оптимальным. Мера близости векторов оценивается при помощи евклидовой нормы. В работе обратная задача ЛП сводится к задаче безусловной минимизации некоторой выпуклой кусочно-квадратичной функции. Для решения этой задачи минимизации используется обобщенный метод Ньютона.

Ключевые слова: линейное программирование, обратная задача линейного программирования, двойственность, безусловная оптимизация, обобщенный метод Ньютона.

G. A. Amirkhanova, A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. On an inverse linear programming problem.

A method for solving the following inverse linear programming (LP) problem is proposed. For a given LP problem and one of its feasible vectors, it is required to adjust the objective function vector as little as possible so that the given vector becomes optimal. The closeness of vectors is estimated by means of the Euclidean vector norm. The inverse LP problem is reduced to a problem of unconstrained minimization for a convex piecewise quadratic function. This minimization problem is solved by means of the generalized Newton method.

Keywords: linear programming, inverse linear programming problem, duality, unconstrained optimization, generalized Newton method.

Введение

Рассматривается обратная задача линейного программирования (ЛП) в следующей постановке. Даны прямая задача ЛП и один из ее допустимых векторов, который нужно превратить в оптимальный путем минимального изменения коэффициентов целевой функции. Впервые обратная задача ЛП в такой постановке рассматривалась в работах [1–3]. В этих же работах приведены примеры использования подобных задач. При этом в постановках обратных задач для меры близости векторов использовались нормы l_1 и l_∞, что позволяло оставаться в рамках линейного программирования при решении обратной задачи.

В данной работе показано, что при использовании евклидовой нормы обратная задача ЛП сводится к безусловной минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции. Известно, что для решения такой задачи весьма эффективен обобщенный метод Ньютона, который в данном случае сходится глобально за конечное число шагов [4–6].

1. Обратная задача линейного программирования

Пусть прямая и двойственная задачи ЛП соответственно имеют вид

$$\min_{x\in X} \hat{c}^\top x, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b,\ x \geq 0_n\}, \tag{P}$$

$$\max_{u\in U} b^\top u, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m \colon A^\top u \leq \hat{c}\}. \tag{D}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-00805), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (номер государственной регистрации проекта 0115PK00554).

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор прямых и $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор двойственных переменных; через 0_i обозначен i-мерный нулевой вектор. Всюду ниже предполагаем, что множество допустимых векторов прямой задачи (P) не пусто. Также предполагаем, что матрица ограничений A имеет ранг m и $m < n$.

Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна — Таккера) для задач (P) и (D) запишем в виде

$$Ax - b = 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad D(x)v = 0_n, \tag{1.1}$$

$$v = \hat{c} - A^\top u \geq 0_n. \tag{1.2}$$

Здесь в ограничения двойственной задачи (D) введен неотрицательный вектор дополнительных переменных $v = \hat{c} - A^\top u \geq 0_n$. Через $D(z)$ обозначается диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент есть i-я компонента вектора z.

Общая постановка обратной задачи к прямой задаче (P) заключается в нахождении вместо исходного вектора $\hat{c}$ нового вектора c такого, что задача

$$c^\top \hat{x} = \min_{x\in X} c^\top x \tag{1.3}$$

имеет в качестве решения заданный вектор $\hat{x} \in X$, при этом евклидово расстояние $\|c - \hat{c}\|$ является минимально возможным (такой вектор c обозначим через c^*).

Без потери общности предположим, что первые l компонент вектора $\hat{x}$ строго больше нуля. Это позволит представить векторы $\hat{x}$, $\hat{c}$, c, $v = c - A^\top u$ и матрицу A в виде

$$\hat{x}^\top = [\hat{x}_l^\top, \hat{x}_d^\top], \quad \hat{c}^\top = [\hat{c}_l^\top, \hat{c}_d^\top], \quad c^\top = [c_l^\top, c_d^\top], \quad v^\top = [v_l^\top, v_d^\top], \quad A = [A_l \mid A_d], \tag{1.4}$$

где $\hat{x}_l > 0_l$, $\hat{x}_d = 0_d$, $d = n - l$.

В соответствии с разбиением (1.4) заданный вектор $\hat{x}$ будет решением (1.3), если для векторов $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполнены следующие условия Куна — Таккера:

$$A_l\hat{x}_l = b, \quad \hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad \hat{x}_l^\top v_l = 0, \quad \hat{x}_d^\top v_d = 0, \tag{1.5}$$

$$v_l = c_l - A_l^\top u = 0_l, \quad v_d = c_d - A_d^\top u \geq 0_d. \tag{1.6}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности (1.5), (1.6) для задачи (1.3) приходим к следующей оптимизационной постановке обратной задачи:

$$\min_{c_l\in\mathbb{R}^l,\, c_d\in\mathbb{R}^d,\, u\in\mathbb{R}^m} \{1/2\,\|c_l - \hat{c}_l\|^2 + 1/2\,\|c_d - \hat{c}_d\|^2\} \tag{1.7}$$

при ограничениях

$$c_l - A_l^\top u = 0_l, \tag{1.8}$$

$$c_d - A_d^\top u \geq 0_d. \tag{1.9}$$

Выписанная задача является задачей выпуклого квадратичного программирования с $n + m$ неизвестными и n ограничениями.

Возможна и другая эквивалентная форма оптимизационной постановки обратной задачи (1.7)–(1.9). Остановимся на ней более подробно. Заметим, что если $\hat{x}$ не является решением исходной задачи (P), то условия Куна — Таккера (1.5), (1.6) не выполняются при $c_l = \hat{c}_l$ и $c_d = \hat{c}_d$. При этом система (1.6) несовместна, т. е. неразрешима следующая система:

$$A_l^\top u = \hat{c}_l, \quad A_d^\top u \leq \hat{c}_d. \tag{1.10}$$

Противоречивые (несобственные) системы линейных неравенств и уравнений и методы их оптимальной коррекции изучались и ранее (например, см. [7–9] и др.). Применительно к несовместной системе (1.10) речь идет о нахождении такого вектора v^*, чтоб при замене вектора $\hat{c}$ на $c^* = \hat{c} + v^*$ несовместная система (1.10) становилась бы совместной и при этом евклидова норма вектора v^* была бы минимальна. Таким образом, обратная задача (1.3) может быть сведена к следующей оптимизационной задаче:

$$\min_{v_l \in \mathbb{R}^l,\, v_d \in \mathbb{R}^d_+,\, u \in \mathbb{R}^m} \{1/2\,\|v_l\|^2 + 1/2\,\|v_d\|^2\}, \quad A_l^\top u - v_l = \hat{c}_l, \quad A_d^\top u - v_d \le \hat{c}_d, \quad v_d \ge 0_d. \tag{1.11}$$

Выпишем функцию Лагранжа задачи (1.11):

$$L(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = 1/2\,\|v_l\|^2 + 1/2\,\|v_d\|^2 + y_l^\top (A_l^\top u - v_l - \hat{c}_l) + y_d^\top (A_d^\top u - v_d - \hat{c}_d).$$

Задача, двойственная к (1.11), представима как

$$\max_{y_l \in \mathbb{R}^l,\, y_d \in \mathbb{R}^d_+} \; \min_{v_l \in \mathbb{R}^l,\, v_d \in \mathbb{R}^d_+,\, u \in \mathbb{R}^m} L(v_l, v_d, u, y_l, y_d).$$

Необходимые и достаточные условия минимума внутренней задачи имеют вид

$$L_{v_l}(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = v_l - y_l = 0_l \;\Rightarrow\; v_l = y_l, \tag{1.12}$$

$$L_{v_d}(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = v_d - y_d \ge 0_d, \quad v_d^\top (v_d - y_d) = 0, \quad v_d \ge 0_d \;\Rightarrow\; v_d = (y_d)_+, \tag{1.13}$$

$$L_u(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = A_l y_l + A_d y_d = 0_m. \tag{1.14}$$

Подставляя y_l и y_d из (1.12) и (1.13) в функцию Лагранжа и учитывая выражение (1.14), получаем двойственную целевую функцию

$$\begin{aligned}\tilde{L}(y_l, y_d) &= 1/2\,\|y_l\|^2 + 1/2\,\|(y_d)_+\|^2 - \hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - y_l^\top y_l - y_d^\top (y_d)_+ + u^\top A_l y_l + u^\top A_d y_d \\ &= -\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2\,\|y_l\|^2 - 1/2\,\|y_d\|^2.\end{aligned}$$

Итак, задача, двойственная к обратной задаче (1.11), имеет вид

$$\max_{y_l \in \mathbb{R}^l,\, y_d \in \mathbb{R}^d_+} \{-\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2\,\|y_l\|^2 - 1/2\,\|y_d\|^2\} \tag{1.15}$$

при ограничениях

$$A_l y_l + A_d y_d = 0_m, \quad y_d \ge 0_d. \tag{1.16}$$

Аналогично можно получить двойственную задачу к (1.15), (1.16). Для этого выпишем соответствующую функцию Лагранжа

$$L(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2\,\|y_l\|^2 - 1/2\,\|(y_d)_+\|^2 + u^\top (A_l y_l + A_d y_d).$$

Двойственная к (1.15), (1.16) имеет вид

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \; \max_{y_l \in \mathbb{R}^l,\, y_d \in \mathbb{R}^d_+} L(y_l, y_d, u). \tag{1.17}$$

Необходимые и достаточные условия максимума внутренней задачи в (1.17) имеют вид

$$L_{y_l}(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_l - y_l + A_l^\top u = 0_l,$$

$$L_{y_d}(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_d - y_d + A_d^\top u \le 0_d, \quad y_d^\top (-\hat{c}_d - y_d + A_d^\top u) = 0, \quad y_d \ge 0_d.$$

Отсюда получаем $y_l = A_l^\top u - \hat{c}_l$ и $y_d = (A_d^\top u - \hat{c}_d)_+$. Подставляем эти выражения в функцию Лагранжа $L(y_l, y_d, u)$ и после простых преобразований получаем двойственную задачу

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \tilde{L}(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \{1/2\,\|A_l^\top u - \hat{c}_l\|^2 + 1/2\,\|(A_d^\top u - \hat{c}_d)_+\|^2\}. \tag{1.18}$$

При этом решение y_l^*, y_d^* квадратичной задачи (1.15), (1.16) выражается через решение u^* задачи безусловной минимизации (1.18) по формуле

$$y_l^* = A_l^\top u^* - \hat{c}_l, \quad y_d^* = (A_d^\top u^* - \hat{c}_d)_+.$$

В свою очередь по решению y_l^*, y_d^* согласно (1.12), (1.13) можно получить решение обратной задачи (1.3):

$$c_l^* = \hat{c}_l + v_l^* = \hat{c}_l + A_l^\top u^* - \hat{c}_l = A_l^\top u^*, \quad c_d^* = \hat{c}_d + v_d^* = \hat{c}_d + (A_d u^* - \hat{c}_d)_+. \tag{1.19}$$

Итак, доказано

Утверждение 1. *Задача квадратичного программирования* (1.11) *с $m+n$ неизвестными и n ограничениями позволяет найти искомый вектор c^* — решение обратной задачи* (1.3) *с помощью однократного решения задачи безусловной минимизации* (1.18) *выпуклой кусочно-квадратичной функции с m неизвестными и вычислить его по простым формулам* (1.19).

Безусловная минимизация в (1.18) может выполняться любым подходящим методом. Но, как известно, для безусловной минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [4;6]. Минимизируемая функция $\tilde{L}(u)$ дифференцируема. Однако для этой функции обычная матрица Гессе не существует, так как градиент $\tilde{L}_u(u) = A_l(A_l^\top u - \hat{c}_l) + A_d(A_d^\top u - \hat{c}_d)_+$ функции $\tilde{L}(u)$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является $m \times m$ симметричной положительно полуопределенной матрицей следующего вида:

$$\partial_u^2 \tilde{L}(u) = A_l A_l^\top + A_l D^*(z) A_l^\top,$$

где через $D^*(z)$ обозначена $l \times l$ диагональная матрица с i-м диагональным элементом z_i, равным 1, если $(A_d^\top u - \hat{c}_d)_i > 0$, и равным 0, если $(A_d^\top u - \hat{c}_d)_i \le 0$, $i = 1, \dots, n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, то к ней добавляется регуляризующее слагаемое δI_m, где δ — малая положительная величина и I_m — единичная матрица порядка m. В работах [4–6] показано, что обобщенный метод Ньютона с регулировкой шага спуска сходится глобально за конечное число шагов при минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции. В [10; 11] приведены результаты вычислительного эксперимента на персональных компьютерах с задачами, у которых матрица A имела несколько десятков миллионов столбцов n и несколько тысяч строк m. В [12–14] рассмотрены варианты распараллеливания, что дало возможность решать задачи существенно большей размерность и сократить время счета.

2. Другие постановки обратной задачи линейного программирования

Для задачи ЛП вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности типа (1.1), (1.2) можно использовать и иные. В частности, следуя [15–18], введем новую $(\nu \times n)$-матрицу K, где $\nu = n - m$. Считаем, что строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A, и поэтому натянутое на них подпространство $\operatorname{im} K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис[2] нуль-пространства матрицы A. Поэтому $AK^\top = 0_{m\nu}$. Здесь через 0_{ij} обозначена $(i \times j)$-матрица с нулевыми элементами.

[2]Матрицу K можно построить различными способами. Например, если A представима в блочном виде $A = [B \mid N]$, где B невырождена, то матрицу K можно записать как $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \mid I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса—Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \mid N]$, то матрица K окажется представима в виде $K = [-N^\top \mid I_\nu]$. Вообще, если найдена одна такая матрица, то любая другая может быть получена из нее умножением слева на подходящую невырожденную $(\nu \times \nu)$-матрицу.

С помощью матрицы K прямую (P) и двойственную (D) задачи можно переписать в виде

$$\min_{x\in X} \hat{c}^\top x, \quad X=\{x\in\mathbb{R}^n\colon Ax=b,\ x\ge 0_n\}, \tag{P}$$

$$\min_{v\in V} \hat{x}^\top v, \quad V=\{v\in\mathbb{R}^n\colon Kv=K\hat{c},\ v\ge 0_n\}. \tag{D_v}$$

Тогда аналогом необходимых и достаточных условий (1.1), (1.2) будут условия

$$Ax=b, \quad x\ge 0_n, \quad Kv=K\hat{c}, \quad v\ge 0_n, \quad \hat{c}^\top x+\hat{x}^\top v=\hat{c}^\top \hat{x}.$$

В соответствии с представлением (1.4), которое основано на разбиении заданного допустимого вектора $\hat{x}$ на $\hat{x}_l>0_l$, $\hat{x}_d=0_d$, $d=n-l$, введем разбиение матрицы $K=[K_l\mid K_d]$. Условия оптимальности (1.5) и (1.6) для задачи (1.3) можно представить в виде

$$A_l\hat{x}_l=b, \quad \hat{x}_l>0_l, \quad \hat{x}_d=0_d, \quad v_l=0_l, \quad v_d\ge 0_d,$$
$$K_lc_l=0_\nu, \quad K_dv_d=K_dc_d.$$

Тем самым приходим к следующей оптимизационной постановке обратной задачи:

$$\min_{c_l\in\mathbb{R}^l,\, c_d\in\mathbb{R}^d,\, v_d\in\mathbb{R}^d_+} \{1/2\,\|c_l-\hat{c}_l\|^2+1/2\,\|c_d-\hat{c}_d\|^2\} \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$K_lc_l=0_\nu, \tag{2.2}$$

$$K_dv_d-K_dc_d=0_\nu, \quad v_d\ge 0_d. \tag{2.3}$$

Эта задача квадратичного программирования имеет $n+d$ неизвестных и $2(n-m)$ ограничений и распадается на две независимые подзадачи. Первая из них имеет вид

$$\min_{c_l\in\mathbb{R}^l} 1/2\,\|c_l-\hat{c}_l\|^2, \quad K_lc_l=0_\nu. \tag{2.4}$$

Вторая подзадача выглядит так:

$$\min_{c_d\in\mathbb{R}^d,\, v_d\in\mathbb{R}^d_+} 1/2\,\|c_d-\hat{c}_d\|^2, \quad K_dv_d-K_dc_d=0_\nu, \quad v_d\ge 0_d. \tag{2.5}$$

Первая подзадача является задачей проектирования вектора $\hat{c}_l$ на ядро матрицы K_l. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$L(c_l,p_1)=1/2\,\|c_l-\hat{c}_l\|^2+p_1^\top K_lc_l.$$

Запишем двойственную задачу к (2.4):

$$\max_{p_1\in\mathbb{R}^\nu}\min_{c_l\in\mathbb{R}^l} L(c_l,p_1)$$

и необходимое и достаточное условие минимума внутренней задачи минимизации

$$L_{c_l}(c_l,p_1)=c_l-\hat{c}_l+K_l^\top p_1=0_l.$$

Подставляя в функцию Лагранжа найденное отсюда выражение $c_l=\hat{c}_l-K_l^\top p_1$, приходим к двойственной к (2.4) задаче

$$\max_{p_1\in\mathbb{R}^\nu}\{\hat{c}_l^\top K_l^\top p_1-1/2\,\|K_l^\top p_1\|^2\}, \tag{2.6}$$

которая является задачей безусловной максимизации вогнутой квадратичной функции.

Таким образом, верно

Утверждение 2. *Решение c_l^* подзадачи (2.4) выражается через решение p_1^* двойственной задачи (2.6) по формуле $c_l^* = \hat{c}_l - K_l^\top p_1^*$. Если матрица K_l имеет ранг ν, то решением задачи (2.6) будет вектор $p_1^* = (K_l K_l^\top)^{-1} K_l \hat{c}_l$ и вектор c_l^* имеет вид $c_l^* = (I_l - K_l^+ K_l)\hat{c}_l$, где K_l^+ — псевдообратная матрица. В таком случае $K_l^+ = K_l^\top (K_l K_l^\top)^{-1}$.*

К сожалению, вторая подзадача не сводится к решению задачи безусловной оптимизации. Но возможна иная, отличная от (2.1)–(2.3), постановка обратной задачи, при которой требуется найти векторы c_d^* и v_d^*, одновременно минимально отличающиеся от заданных векторов $\hat{c}_d$ и $\hat{v}_d$. В этом случае приходим к следующей постановке второй подзадачи:

$$\min_{c_d \in \mathbb{R}^d,\, v_d \in \mathbb{R}^d_+} \{1/2\, \|c_d - \hat{c}_d\|^2 + 1/2\, \|v_d - \hat{v}_d\|^2\}, \tag{2.7}$$
$$K_d v_d - K_d c_d = 0_\nu, \quad v_d \geq 0_d.$$

Двойственная к этой задаче уже будет задачей безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции. Действительно, функция Лагранжа задачи (2.7) имеет вид

$$L(c_d, v_d, p_2) = 1/2\, \|c_d - \hat{c}_d\|^2 + 1/2\, \|v_d - \hat{v}_d\|^2 + p_2^\top (K_d v_d - K_d c_d).$$

Двойственная к задаче (2.7) есть $\max\limits_{p_2 \in \mathbb{R}^\nu} \min\limits_{c_d \in \mathbb{R}^d,\, v_d \in \mathbb{R}^d} L(c_d, v_d, p_2)$. Из необходимых и достаточных условий минимума внутренней подзадачи, которые имеют вид

$$L_{c_d}(c_d, v_d, p_2) = c_d - \hat{c}_d - K_d^\top p_2 = 0_d,$$
$$L_{v_d}(c_d, v_d, p_2) = v_d - \hat{v}_d + K_d^\top p_2 \geq 0_d, \quad v_d^\top (v_d - \hat{v}_d + K_d^\top p_2) = 0, \quad v_d \geq 0_d,$$

находим $c_d = \hat{c}_d + K_d^\top p_2$ и $v_d = (\hat{v}_d - K_d^\top p_2)_+$. Подставим эти выражения в функцию Лагранжа $L(c_d, v_d, p_2)$. После простых преобразований получаем двойственную к (2.7) задачу

$$\max_{p_2 \in \mathbb{R}^\nu} \{-\hat{c}_d^\top K_d^\top p_2 - 1/2\, \|K_d^\top p_2\|^2 - 1/2\, \|(\hat{v}_d - K_d^\top p_2)_+\|^2\}. \tag{2.8}$$

Итак, двойственная задача (2.8) является задачей безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции от ν неизвестных. Ее решение p_2^* позволяет легко вычислить решения c_d^* и v_d^* подзадачи (2.7)

$$c_d^* = \hat{c}_d + K_d^\top p_2^*, \quad v_d^* = (\hat{v}_d - K_d^\top p_2^*)_+. \tag{2.9}$$

Заметим, что если c_d^* — решение задачи (2.5) и c_d^{**} — решение задачи (2.7), то $\|c_d^* - \hat{c}_d\| \leq \|c_d^{**} - \hat{c}_d\|$.

Для решения задачи безусловной максимизации (2.8) также можно применять обобщенный метод Ньютона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zhang J., Liu Z.** Calculating some inverse linear programming problems // J. Comput. Appl. Math. 1996. Vol. 72, issue 2. P. 261–273.
2. **Zhang J., Liu Z.** A further study on inverse linear programming problems // J. Comput. Appl. Math. 1999. Vol. 106, issue 2. P. 345–359.
3. **Ahuja R.K., Orlin J.B.** Inverse Optimization // Operations Research. 2001. Vol. 49, № 5. P. 771–783.
4. **Mangasarian O.L.** A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth. and Software. 2002. Vol. 17, № 5. P. 913–930.
5. **Kanzow C., Qi H., Qi L.** On the minimum norm solution of linear programs // J. Optim. Theory Appl. 2003. Vol. 116. P. 333–345.
6. **Mangasarian O.L.** A Newton method for linear programming // J. Optim. Theory Appl. 2004. Vol. 121. P. 1–18.

7. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 335 с.
8. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.
9. **Попов Л.Д.** Двойственный подход к применению барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 231–237.
10. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.** Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1564–1573.
11. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №. 2. С. 98–108.
12. **Попов Л.Д.** Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 206–221.
13. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования / В.А.Гаранжа, А.И.Голиков, Ю.Г.Евтушенко, М.Х.Нгуен // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1369–1384.
14. **Попов Л.Д.** Опыт организации гибридных параллельных вычислений в методе Евтушенко—Голикова для задач с блочно-ангулярной структурой ограничений // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 38–50.
15. **Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.** Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. 76 с.
16. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. Chichester: Wiley, 1997. 508 p.
17. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Нахождение нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1766–1386.
18. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Два параметрических семейства задач линейного программирования и их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 4. С. 31–44.

Амирханова Гульшат Аманжоловна
науч. сотрудник
ИИВТ КН МОН РК

Поступила 14.05.2015

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
директор
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: evt@ccas.ru