УДК 519.658

ОБ УНИМОДАЛЬНОСТИ ПРОСТЕЙШЕЙ ГАУССОВОЙ СМЕСИ

 Н. Н. Апраушева, С. В. Сорокин

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: plat@ccas.ru

Поступила в редакцию 11.02.2003 г.

На основе принципа сжимающих отображений и классических теорем математического анализа получено несколько достаточных условий унимодальности смеси нормальных распределений с различными средними значениями μ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $2 \le k < \infty$, и с равными дисперсиями, взятых со своими априорными вероятностями $\pi_i \in (0, 1)$. Если $f(x)$ – плотность вероятности этой смеси, то уравнение $f'_x(x) = 0$ представимо в виде $x = \varphi(x)$, где φ – непрерывный монотонно возрастающий оператор на всей числовой оси. Получены условия унимодальности смеси не только для $k = 2$ при малых и больших значениях расстояния Махаланобиса $\rho_{21}(\rho_{21} \le 2$ и $\rho_{21} > 2)$, но и для для $k \ge 3$. Доказано, что верхняя граница ρ^* тех значений ρ_{k1}, при которых смесь унимодальна, является возрастающей функцией параметра k. Библ. 17.

ВВЕДЕНИЕ

Конечные гауссовы смеси нашли широкое применение в различных областях науки и практики: в математическом моделировании, распознавании образов, спектроскопии, биологии, медицине, химии, геологии, метеорологии, морских промыслах и др. (см. [1]–[4]), что обусловлено такими их свойствами, как идентифицируемость, полнота, разрешение (см. [1]–[5]). Популярность конечных гауссовых смесей вызывает необходимость решения таких математических задач, как определение мод и предварительное оценивание их числа.

Моды гауссовых смесей обычно находятся приближенными итеративными методами (методом последовательного приближения Пикара, градиентно-квадратическим методом [4], [6]–[8]). Предварительное оценивание числа мод связано со свойством их унимодальности. В общем случае проблема достаточных условий унимодальности гауссовой смеси не решена. В известных публикациях на унимодальность исследованы лишь двухкомпонентные смеси [9]–[11]. В работе [9] рассмотрена одномерная смесь, а в [10], [11] – многомерные смеси с равными и различными ковариационными матрицами специального вида.

В данной работе на основе принципа сжимающих отображений получено несколько достаточных условий унимодальности простейшей гауссовой смеси – одномерной смеси k нормальных распределений с различными средними значениями μ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $2 \le k < \infty$, и с равными дисперсиями σ^2, взятых со своими априорными вероятностями $\pi_i \in (0, 1)$. Некоторые из этих условий опубликованы без доказательств в [6], [12].

Если $f(x)$ – плотность вероятности исследуемой смеси, то ее моды являются корнями уравнения $f'_x(x) = 0$, которое приводится к виду $x = \varphi(x)$, где φ – непрерывный, монотонно возрастающий оператор. Доказано, что все неподвижные точки оператора φ лежат на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$, $\mu_1 < \ldots < \mu_k$. Задача отыскания достаточных условий унимодальности функции $f(x)$ сведена к задаче отыскания достаточных условий сжатости оператора φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$. Все доказательства базируются на принципе сжимающих отображений [13]–[15] и классических теоремах математического анализа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Имеем функцию плотности вероятностей смеси k нормальных распределений с равными дисперсиями σ^2 и с различными математическими ожиданиями μ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $2 \le k < \infty$,

$$f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\pi_i \exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}], \tag{1.1}$$

$x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, π_i – априорная вероятность i-й компоненты смеси,

$$\pi_i \in (0, 1), \quad \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1,$$

Параметры $\pi_1, \ldots, \pi_k, \mu_1, \ldots, \mu_k, \sigma^2$ распределения в (1.1) известны.

Требуется найти условия унимодальности функции $f(x)$. Мода функции $f(x)$ – точка ее локального максимума [16] является корнем уравнения

$$f'_x(x) = 0. \tag{1.2}$$

Продифференцировав по x выражение (1.1), получим

$$f'_x(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \pi_i(\mu_i - x)\exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}]. \tag{1.3}$$

Тогда уравнение (1.2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i(\mu_i - x)\exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}] = 0. \tag{1.4}$$

Для определенности положим

$$\mu_1 < \ldots < \mu_k \tag{1.5}$$

и докажем теорему.

Теорема 1. *Все корни уравнения* (1.4) *лежат в интервале* (μ_1, μ_k). *Если уравнение* (1.4) *имеет один корень, то он является модой функции* $f(x)$.

Доказательство. В силу (1.3), (1.5) имеем

$$f'_x(\mu_1) > 0, \quad f'_x(\mu_k) < 0. \tag{1.6}$$

Тогда, по теореме Больцано–Коши, непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ хотя бы при одном значении $\tilde{x} \in (\mu_1, \mu_k)$ обращается в нуль, $f'_x(\tilde{x}) = 0$. Но так как $f'_x(x) > 0$ при всех $x \in (-\infty, \mu_1]$ и $f'_x(x) < 0$ при всех $x \in [\mu_k, \infty)$, то все корни уравнения (1.4) лежат в интервале (μ_1, μ_k).

Если уравнение (1.4) имеет единственный корень, то, в силу неравенств (1.5), (1.6), он является модой функции $f(x)$. Теорема 1 полностью доказана.

Если обозначить число мод функции $f(x)$ через m, то имеет место (см. [4])

$$1 \le m \le k.$$

Уравнение (1.4) представим в виде

$$x = \varphi(x), \tag{1.17а}$$

где

$$\varphi(x) = \left\{\sum_{i=1}^{k} \pi_i\mu_i \exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}]\right\}\left\{\sum_{i=1}^{k} \pi_i \exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}]\right\}^{-1}. \tag{1.17б}$$

Тогда все корни уравнения (1.4) являются неподвижными точками оператора φ и обратно. Теорема 1 перефразируется в теорему 1'.

Теорема 1'. *Все неподвижные точки оператора* φ *лежат в интервале* (μ_1, μ_k). *Если оператор имеет одну неподвижную точку, то она является модой функции* $f(x)$.

Известно [13]–[15], что оператор φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ имеет только одну неподвижную точку, если на этом отрезке он является сжимающим (сжатым), т.е. для всех $x \in [\mu_1, \mu_k]$ выполняются следующие условия:

$$\mu_1 \le \varphi(x) \le \mu_k, \tag{1.18а}$$

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le \alpha|x_2 - x_1|, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_1, x_2 \in [\mu_1, \mu_k]. \tag{1.18б}$$

Следовательно, отыскание условий, при которых функция $f(x)$ унимодальна, сводится к отысканию условий, при которых оператор φ является сжимающим. Отметим, что оператор φ в (1.7) является функцией.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала докажем, что для любой точки $x \in [\mu_1, \mu_k]$ имеет место условие (1.8а).

Лемма. *Функция* $\varphi(x)$ *является непрерывной и монотонно возрастающей на всей числовой оси* R.

Доказательство. Непрерывность $\varphi(x)$ следует из ее аналитического выражения (1.7б), в котором числитель и знаменатель – непрерывные функции по аргументу x, $x \in \mathbb{R}$, и знаменатель в нуль не обращается ни при одном значении $x \in \mathbb{R}$.

Для доказательства монотонного возрастания $\varphi(x)$ достаточно показать, что $\varphi'_x(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Введя обозначения

$$\psi_i = \pi_i \exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}], \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{2.1}$$

формулу (1.7б) представим в виде

$$\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \psi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j\right)^{-1}. \tag{2.2}$$

Продифференцировав по x выражение (2.2) и сделав приведение подобных членов, получим выражение

$$\varphi'_x(x) = \left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} (\mu_i \psi'_i \psi_s - \mu_s \psi_i \psi'_s)\right]\left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j\right)^{-2}, \quad i \neq s, \tag{2.3}$$

которое приводится к виду

$$\varphi'_x(x) = \left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{k-1} (\mu_s - \mu_i)(\psi'_s \psi_i - \psi'_i \psi_s)\right]\left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j\right)^{-2}, \quad s > i. \tag{2.4}$$

Продифференцировав по x выражение (2.1), получим

$$(\psi_i)'_x(x) = (\mu_i - x)\psi_i \sigma^{-2}. \tag{2.5}$$

Подставив выражения ψ'_i, ψ'_s из (2.5) в правую часть формулы (2.4) и использовав формулу для расстояния Махаланобиса (см. [17])

$$\rho_{si} = (\mu_s - \mu_i)\sigma^{-1}, \quad i < s, \tag{2.6}$$

получим

$$\varphi'_x(x) = \left(\sum_{s>i} \rho_{si}^2 \psi_s \psi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j\right)^{-2}, \qquad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad s = 2, 3, \dots, k. \tag{2.7}$$

Из формул (2.7) и (2.1) следует, что $\varphi'_x(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Непрерывный монотонный оператор* φ *отображает отрезок* $[\mu_1, \mu_k]$ *в себя.*

Доказательство. В силу нашей леммы и неравенств (1.5), для доказательства (1.8а) достаточно показать, что

$$\varphi(\mu_1) > \mu_1, \quad \varphi(\mu_k) < \mu_k. \tag{2.8}$$

На основании (2.2) имеем

$$\varphi(\mu_1) - \mu_1 = \left[\sum_{i=2}^{k} (\mu_i - \mu_1)\psi_i(\mu_1)\right]\left[\sum_{j=1}^{k} \psi_j(\mu_1)\right]^{-1}.$$

Тогда в силу (1.5), (2.1) получим

$$\varphi(\mu_1) - \mu_1 > 0,$$

что доказывает первое неравенство в (2.8). Второе неравенство доказывается аналогично.

Замечание. В силу теорем 2 и Боля–Брауэра (см. [13], [14]), оператор φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Перейдем к отысканию условий, при которых выполняется неравенство (1.8б).

Известно [13], что оператор φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ является сжимающим, если

$$\varphi'_x(x) < 1 \tag{2.9}$$

для всех $x \in [\mu_1, \mu_k]$.

В неравенстве (1.8б) можно положить

$$\alpha = \sup_x \varphi'_x(x) = \varphi'_x(x_0), \quad x_0 \in [\mu_1, \mu_k].$$

В силу теоремы 1', единственная неподвижная точка сжимающего оператора φ является модой функции $f(x)$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Функция $f(x)$ является унимодальной, если выполняется условие* (2.9).

Остается найти те значения параметров ρ_{si}, $i < s$, $s = 2, 3, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, k-1$, π_i и функциональные зависимости между ними, при которых функция $f(x)$ является унимодальной.

Теорема 4. *При $k = 2$ функция $f(x)$ унимодальна, если*

$$\rho_{21}^2 \le 4. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть для всех $x \in [\mu_1, \mu_2]$ выполняется достаточное условие унимодальности функции $f(x)$ – неравенство (2.9), которое в силу (2.7) можно представить в виде

$$(\rho_{21}^2 - 2)\psi_2\psi_1 - \psi_1^2 - \psi_2^2 < 0. \tag{2.11}$$

Легко видеть, что это неравенство будет иметь место для всех $x \in [\mu_1, \mu_2]$, если

$$\rho_{21}^2 = 4 - \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < 4. \tag{2.12}$$

Подставив это значение ρ_{21}^2 в левую часть (2.11), получим неравенство

$$-(\psi_2 - \psi_1)^2 - \varepsilon\psi_2\psi_1 < 0, \quad 0 \le \varepsilon < 4,$$

которое и доказывает теорему 4.

Перейдем к отысканию достаточных условий унимодальности рассматриваемой смеси при $k = 2$, $\rho_{21}^2 > 4$.

Неравенство (2.11) представим в виде

$$\rho_{21}^2\psi_1\psi_2 < (\psi_1 + \psi_2)^2. \tag{2.13}$$

Для удобства обозначим ρ_{21} в (2.13) через ρ. После возведения обеих частей неравенства (2.13) в степень 1/2 и деления их на $(\psi_1\psi_2)^{1/2}$ получим неравенство

$$(\psi_1\psi_2^{-1})^{1/2} + (\psi_2\psi_1^{-1})^{1/2} - \rho > 0, \tag{2.14}$$

равносильное (2.13). После замены переменных

$$y - (\psi_1\psi_2^{-1})^{1/2}, \quad \psi_2 \ne 0, \tag{2.15}$$

неравенство (2.14) примет вид

$$y^2 - \rho y + 1 > 0. \tag{2.16}$$

Неравенство (2.16) будет выполняться в двух случаях:

$$y < y_1, \tag{2.17а}$$

$$y < y_2, \tag{2.17б}$$

если y_1, y_2 – действительные корни уравнения

$$y^2 - \rho y + 1 = 0, \tag{2.18}$$

$$y_1 = 2^{-1}(\rho - \sqrt{\rho^2 - 4}), \tag{2.19а}$$

$$y_2 = 2^{-1}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}). \tag{2.19б}$$

В неравенствах (2.17) выразим y через исходную переменную x. В силу (2.1), (2.6), выражение (2.15) приводится к виду

$$y = (\pi_1\pi_2^{-1})^{1/2}\exp[\rho(4\sigma)^{-1}(\mu_1 + \mu_2 - 2x)]. \tag{2.20}$$

Использовав в (2.17а) выражения (2.20) и (2.19а), будем иметь неравенство

$$(\pi_1\pi_2^{-1})^{1/2}\exp[\rho(4\sigma)^{-1}(\mu_1 + \mu_2 - 2x)] < (\rho - \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}, \tag{2.21}$$

которое после выполнения элементарных алгебраических операций приводится к виду

$$x > (\mu_1 + \mu_2)2^{-1} + \sigma\rho^{-1}\ln\{\pi_1\pi_2^{-1}[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}]^2\}. \tag{2.22}$$

Для удобства обозначим правую часть (2.22) через x_1:

$$x_1 = (\mu_1 + \mu_2)2^{-1} + \sigma\rho^{-1}\ln(\pi_1\pi_2^{-1}) + 2\sigma\rho^{-1}\ln[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}]. \tag{2.23}$$

Из наших рассуждений следует, что при $\rho^2 > 4$ неравенство (2.13) выполняется для всех $x > x_1$.

Проведя аналогичные выкладки для неравенства (2.17б), получим неравенство

$$x > (\mu_1 + \mu_2)2^{-1} + \sigma\rho^{-1}\ln\{\pi_1\pi_2^{-1}[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}]^2\}, \tag{2.24}$$

правую часть которого обозначим через x_2:

$$x_2 = (\mu_1 + \mu_2)2^{-1} + \sigma\rho^{-1}\ln(\pi_1\pi_2^{-1}) - 2\sigma\rho^{-1}\ln[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}]. \tag{2.25}$$

Итак, доказано что при $k = 2$ и $\rho^2 > 4$ неравенство $\varphi'_x(x) < 1$ имеет место для всех x, удовлетворяющих одному из условий

$$x > x_1, \quad x < x_2, \tag{2.26}$$

где x_1 и x_2 выражения (2.23) и (2.25) соответственно. Отсюда следует, что $\varphi'_x(x) < 1$ для всех $x \in [\mu_1, \mu_2]$, если

$$x_1 \le \mu_1, \tag{2.27а}$$

$$x_2 \ge \mu_2. \tag{2.27б}$$

Подставив формулу (2.23) в (2.27а), а формулу (2.25) в (2.27б) и выполнив элементарные алгебраические операции с использованием формулы (2.6), получим неравенства

$$\ln(\pi_2\pi_1^{-1}) \ge \rho^2 2^{-1} + 2\ln[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}], \quad \pi_1 < \pi_2, \tag{2.28}$$

$$\ln(\pi_1\pi_2^{-1}) \ge \rho^2 2^{-1} + 2\ln[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}], \quad \pi_1 < \pi_2. \tag{2.29}$$

Неравенства (2.28), (2.29) можно свернуть в одно:

$$|\ln(\pi_1\pi_2^{-1})| \ge \rho^2 2^{-1} + 2\ln[(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4})2^{-1}], \quad \pi_1 \ne \pi_2. \tag{2.30}$$

Итак доказана

Теорема 5. *При* $k = 2$, $\rho^2 > 4$ *и* $\pi_1 \neq \pi_2$ *функция* $f(x)$ *является унимодальной, если выполняется условие* (2.30).

Для $k = 2$ и $\pi_1 = \pi_2$ имеет место следующая

Теорема 6. *При* $k = 2$ *и* $\pi_1 = \pi_2$ *точка*

$$\tilde{x} = 2^{-1}(\mu_1 + \mu_2) \tag{2.31}$$

является неподвижной точкой оператора φ. *Если* $\rho^2 \le 4$, *то* $\tilde{x}$ – *мода функции* $f(x)$, *если* $\rho^2 > 4$, *то* $\tilde{x}$ – *точка минимума бимодальной функции* $f(x)$.

Доказательство. Непосредственной подстановкой выражения $\tilde{x}$ из (2.31) в левую часть уравнения (1.4) убеждаемся, что $f'_x(\tilde{x}) = 0$, т.е. $\tilde{x}$ является неподвижной точкой оператора φ. Из теоремы 4 следует, что $\tilde{x}$ при $\rho^2 \le 4$ является модой функции $f(x)$. Для доказательства того, что $\tilde{x}$ при $\rho^2 > 4$ является точкой ее минимума, достаточно убедиться, что $f''_{xx} > 0$.

Дифференцируя выражение (1.3) по x и проводя элементарные алгебраические операции, получаем

$$f''_{xx}(\tilde{x}) = a\sum_{i=1}^{2}\exp[-(x-\mu_i)^2(2\sigma^2)^{-1}][1-(x-\mu_i)^2\sigma^{-2}], \tag{2.32а}$$

$$\alpha = -(2\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}. \tag{2.32б}$$

В силу формул (2.32), (2.31) и (2.6), для $f''_{xx}(\tilde{x})$ имеем выражение

$$f''_{xx}(\tilde{x}) = 2^{-1}\alpha\exp(2^{-1}\rho^2)(4-\rho^2), \tag{2.33}$$

из которого следует, что $f''_{xx}(\tilde{x}) > 0$ при $\rho^2 > 4$, что и требовалось доказать.

Для доказательства бимодальности функции $f(x)$ отметим, что число мод m исследуемой смеси не больше числа ее компонент k (см. [4]), т.е.

$$m \le 2. \tag{2.34а}$$

С другой стороны, в каждом из отрезков $[\mu_1, \tilde{x} - \Delta x]$ и $[\tilde{x} + \Delta x, \mu_2]$, ($\Delta x$ – малая положительная величина) функция $f'_x(x)$ имеет хотя бы одну моду, так как $f'_x(\mu_1) > 0$, $f'_x(\tilde{x} - \Delta x) < 0$ и $f'_x(\tilde{x} + \Delta x) > 0$, $f'_x(\mu_2) < 0$. Следовательно, на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ для m имеем оценку сверху

$$m \ge 2. \tag{2.34б}$$

Из неравенств (2.34) следует, что $m = 2$, что и завершает доказательство теоремы 6.

Перейдем к исследованию случая $k \ge 3$. Пусть для всех $x \in [\mu_1, \mu_k]$ выполняется условие унимодальности функции $f(x)$ – неравенство (2.9), которое в силу (2.7) представимо в виде

$$\sum_{s>i}(\rho_{si}^2 - 2)\psi_s\psi_i - \sum_{i=1}^{k}\psi_i^2 < 0, \quad s = 2, 3, \ldots, k, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.35}$$

Положив

$$\rho_{k1}^2 = 4 - \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < 4,$$

и подставив это выражение в левую часть (2.35), получим

$$-(\psi_k - \psi_1)^2 - \varepsilon\psi_k\psi_1 + \sum_{\rho_{si}\in P}(\rho_{si}^2 - 2)\psi_s\psi_i - \sum_{j=2}^{k-1}\psi_j^2 < 0, \tag{2.36}$$

где

$$P = \{\rho_{si}, s > i\}\backslash\rho_{k1}, \quad s = 2, 3, \ldots, k, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.37}$$

Очевидно, неравенство (2.36) будет иметь место, если

$$\max_{\rho_{si} \in P} \rho_{si}^2 \le 2.$$

Следует отметить, что в силу третьей аксиомы метрики должно выполняться равенство (см. [13])

$$\rho_{k1} = \sum_{s=2}^{k} \rho_{s,\,s-1}.$$

Из наших рассуждений следует

Теорема 7. *При* $k \ge 3$ *функция* $f(x)$ *является унимодальной, если выполняются условия*

$$\rho_{k1}^2 \le 4, \quad \max_{\rho_{si} \in P} \rho_{si}^2 \le 2, \tag{2.38}$$

где множество P *определено в* (2.37).

Перейдём к исследованию случая $k \ge 3$, $\rho_{k1}^2 > 4$. Пусть

$$\rho_{k1}^2 = 4 + \Delta\rho, \quad \Delta\rho > 0. \tag{2.39}$$

Подставив это выражение ρ_{k1}^2 в неравенство (2.36), представим его в виде

$$\Delta\rho\psi_k\psi_1 < (\psi_k - \psi_1)^2 + \sum_{\rho_{si} \in P} (2 - \rho_{si}^2)\psi_s\psi_i + \sum_{j=2}^{k-1} \psi_j^2. \tag{2.40}$$

Для левой части (2.40) в силу (2.1) имеем

$$\Delta\rho\psi_k\psi_1 \le \Delta\rho\pi_k\pi_1. \tag{2.41}$$

Для правой части неравенства (2.40), которую обозначим через τ:

$$\tau = (\psi_k - \psi_1)^2 + \sum_{\rho_{si} \in P} (2 - \rho_{si}^2)\psi_s\psi_i + \sum_{j=2}^{k-1} \psi_j^2, \tag{2.42}$$

очевидно отношение

$$\tau < \sum_{\rho_{si} \in P} (2 - \rho_{si}^2)\psi_s\psi_i + \sum_{j=2}^{k} \psi_j^2. \tag{2.43}$$

Тогда на основании (2.40)–(2.43) получим неравенство

$$\Delta\rho\pi_k\pi_1 < \sum_{\rho_{si} \in P} (2 - \rho_{si}^2)\psi_s\psi_i + \sum_{j=1}^{k} \psi_j^2. \tag{2.44}$$

На элементы $\rho_{s,\,s-1}$, число которых равно $k-1$, наложим ограничения

$$\max_{s} \rho_{s,\,s-1} \le 2, \quad s = 2, 3, \ldots, k.$$

Число элементов $\rho_{si} \in P$, $s > i$, для которых может иметь место неравенство $\rho_{si}^2 \le 2$, $s > i$ обозначим через k^*,

$$k - 1 \le k^* \le 2^{-1}k(k-1) - 1.$$

Найдем верхнюю границу для каждой суммы в правой части неравенства (2.44). Для первой суммы имеем

$$\sum_{\rho_{si} \in P} (2 - \rho_{si}^2)\psi_s\psi_i < (2 - \rho_{\min}^2)k^*\pi_{\max}^2, \tag{2.45}$$

где

$$\rho_{\min} = \min_{\rho_{si} \in P} \rho_{si}, \tag{2.46а}$$

$$\pi_{\max} = \min_i \pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.46б}$$

Для второй суммы в (2.44) в силу (2.1), (2.46б) получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j^2 < k\pi_{\max}^2. \tag{2.47}$$

Тогда из (2.44), (2.45), (2.47) следует неравенство

$$\Delta\rho < (\pi_k\pi_1)^{-1}\pi_{\max}^{-1}[k^*(2-\rho_{\min}^2) + k]. \tag{2.48}$$

Обозначим правую часть (2.48) через $\Delta\rho^*$:

$$\Delta\rho^* = (\pi_k\pi_l)^{-1}\pi_{\max}^2[k + k^*(2-\rho_{\min}^2)]. \tag{2.49}$$

Тогда на основании (2.39), (2.48), (2.49) имеем краткое выражение верхней границы тех значений ρ_{k1}^2, при которых функция $f(x)$ является унимодальной:

$$\rho_{k1}^2 < 4 + \Delta\rho^*.$$

Из наших рассуждений следует

Теорема 8. *При* $k \geq 3$ *и* $\rho_{k1}^2 > 4$ *функция* $f(x)$ *является унимодальной, если выполняются условия*

$$\max_s \rho_{s,\,s-1}^2 \leq 2, \quad s = 2, 3, \ldots, k, \tag{2.50}$$

$$\rho_{k1}^2 < 4 + \Delta\rho^*, \tag{2.51}$$

где $\Delta\rho^*$, $\pi_{\max}$, $\rho_{\min}$ *имеют выражения* (2.49), (2.46) *соответственно, а* k^* – *число элементов* $\rho_{si}^2 \leq 2$, $\rho_{si} \in P$, P *определено в* (2.37).

Из (2.51), (2.49) следует, что верхняя граница

$$\rho^{*2} = 4 + (\pi_k\pi_1)^{-1}\pi_{\max}^2[k + k^*(2-\rho_{\min}^2)] \tag{2.52}$$

тех значений ρ_{k1}^2, при которых простейшая гауссова смесь унимодальна, является возрастающей функцией параметра k.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим основные результаты этой работы.

1. Все достаточные условия унимодальности простейшей гауссовой смеси получены на основе принципа сжимающих отображений. Доказано, что если оператор φ в уравнении (1.7) является сжимающим на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$, $\mu_1 < \ldots < \mu_k$, то смесь унимодальна.

2. При $k = 2$ смесь унимодальна, если $\rho_{21}^2 \leq 4$. В [9], [11] при $k = 2$ получено условие унимодальности смеси $\rho_{21}^2 < 4$, случай $\rho_{21}^2 = 4$ в них не исследован.

3. Получены новые достаточные условия унимодальности смеси:

1) при $k = 2$, $\rho_{21}^2 > 4$ и $\pi_1 \neq \pi_2$ смесь унимодальна, если

$$\left|\ln(\pi_1\pi_2^{-1})\right| \geq \rho_{21}^2 2^{-1} + 2\ln[(\rho_{21} + \sqrt{\rho_{21}^2 - 4})2^{-1}];$$

2) при $k \geq 3$ смесь унимодальна, если $\rho_{k1}^2 \leq 4$ и $\rho_{s,\,s-1}^2 \leq 2$, $s > i$, $s = 2, 3, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, k-1$;

3) при $k \geq 3$, $\rho_{k1}^2 > 4$ смесь унимодальна, если $\rho_{s,s-1}^2 \leq 2$, $s = 2, 3, \ldots, k$, и $\rho_{k1}^2 < 4 + (\pi_k\pi_1)^{-1}\pi_{\max}^2[k + k^*(2 - \rho_{\max}^2)]$, где k^* – число элементов $\rho_{si}^2 \leq 2$, $s > i$, $s = 2, 3, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, $\pi_{\max}$ и $\rho_{\min}$ определяются выражениями (2.46);

4) при $k \geq 3$ верхняя ρ^* граница тех значений ρ_{k1}, при которых простейшая гауссова смесь унимодальна, является возрастающей функцией параметра k.

Результат, сформулированный в п. 3, нетрудно обобщить на многомерный случай, как это сделано в [10]. Утверждения пп. 3), 3) легко обобщаются для многомерных смесей лишь в частном случае, когда векторы математических ожиданий $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_k$ располагаются на одной прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Патрик Э.* Основы теории распознавания образов. М.: Сов. радио, 1980.
2. *Titterington D.M., Smith A.F, Markov U.E.* Statistical analysis of finite mixture distributions. Chichester cct., 1987.
3. *Волошин Т.Я., Бурлаков И.А., Косенкова С.Т.* Статистические методы решения задач распознавания, основанные на апроксимационном подходе. Владивосток, 1996.
4. *Carreira-Perpinan M.A.* Mode-finding for mixtures of Gaussian distributions. Tech. Rep. CS–99–03. Sheffield: Univ. Sheffield UK, 1999.
5. *Robertson C.A., Fryer J.G.* Some descriptive properties of normal mixtures // Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1969. № 3–4. P. 137–149.
6. *Апраушева Н.Н., Сорокин С.В.* Об определении мод смеси нормальных распределений // Тезисы докл. VIII Всерос. Конф. “Матем. методы распознавания образов”. М.: ВЦ РАН. 1997. С. 4–5.
7. *Апраушева Н.Н., Торхова Н.А.* Вычисление стационарных точек плотности смеси нормальных распределений // Тезисы. докл. VIII конф. “Математика, компьютер, образование”. М.: МГУ, 2001. С. 122–123.
8. *Carreira-Perponan M.A.* Mode-finding for mixture of Gaussian distributions // IEEE Trans. on Pattern Analys. and Mach. Intell. 2000.V. 22. № 11. P. 1318–1323.
9. *Behboodian J.* One the modes of a mixture of two normal distributions // Technometrics. 1970. V. 12. № 1. P. 131–139.
10. *Апраушева Н.Н.* Об условиях унимодальности и бимодальности смеси двух нормальных классов // Иссл. по вероятностно-статистич. моделированию реальных явлений. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. С. 31–45.
11. *Konstantelos A.C.* Unimodality conditions for Gaussian sums // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. AC–25. № 4, P. 438–439.
12. *Апраушева Н.Н., Сорокин С.В.* Об унимодальности смеси нормальных распределений // Тезисы докл. VI Междунар. конф. “Математика, компьютер, образование”. М.: МГУ, 1999. С. 15.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.Алимов Ш.А. Принцип сжатых отображений // Новое в жизни, науке, технике. Сер. матем., кибернетика. М.: Знание, 1983. № 5.
15. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложение функционального анализа и теория операторов. М.: Мир, 1983.
16. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
17. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.