

Апраушева Н. Н., Моллаверди Н., Сорокин С. В.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, e-mail: palt@ccsd.ru,
 Московский государственный университет, факультет ВМК, e-mail: naserm@yazduni.ac.ir

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОСТЕЙШЕЙ ГАУССОВОЙ СМЕСИ

В данной работе дан математически обоснованный алгоритм вычисления всех стационарных точек (СТ) плотности вероятности смеси k одномерных нормальных распределений $f(x)$ с равными дисперсиями σ^2 и с различными средними значениями μ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, взятых со своими и с априорными вероятностями $\pi_i \in (0, 1)$, при условии что параметры распределения известны. Уравнение $f'_x(x) = 0$ приводится к двум равносильным уравнениям $x = \varphi(x)$, $x = \zeta(x)$, решения которых находятся методом последовательных приближений Пикара. С помощью оператора φ определяются моды и точки перегибов функции $f(x)$, а с помощью оператора ζ — точки локальных минимумов и перегибов этой функции.

Ключевые слова. гауссова смесь, плотность вероятности, неподвижная точка оператора, последовательность итераций Пикара.

Введение

Конечные гауссовы смеси нашли широкое применение в различных областях науки и практики: в математическом моделировании, распознавании образов, спектроскопии, биологии, медицине, химии, геологии, метеорологии, морских промыслах и др. [1]-[4], что обусловлено такими их свойствами, как идентифицируемость, полнота, разрешение [1], [5]. Популярность конечных гауссовых смесей вызывает необходимость решения таких математических задач как определение их мод и предварительное оценивание их числа.

В известных публикациях, например, [4], [6], предложены алгоритмы для вычисления мод, базирующиеся на известных вычислительных методах, но не обоснованные строго математически.

В этой работе дан математически обоснованный алгоритм вычисления всех стационарных точек (СТ) плотности вероятности конечной смеси нормальных распределений $f(x)$ с равными дисперсиями σ^2 и с различными средними значениями μ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, $2 \leq k < \infty$, взятых со своими априорными вероятностями $\pi_i \in (0, 1)$, при условии, что параметры распределения известны. Стационарные точки функции $f(x)$ — это корни уравнения $f'_x(x) = 0$, которое приводится к двум равносильным уравнениям $x = \varphi(x)$, $x = \zeta(x)$. Доказано, что все неподвижные точки (НТ) непрерывных, монотонно возрастающих

операторов $\varphi(x)$ и $\zeta(x)=(1+\lambda)x-\lambda\varphi(x)$ лежат на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$. Алгоритм вычисления СТ базируется на методе последовательных приближений Пикара (ППП) [7]-[9]. С помощью оператора φ находятся моды и точки перегибов функции $f(x)$, а с помощью оператора ζ — точки минимумов и перегибов этой функции.

1. Постановка задачи и методы ее решения

Дана функция плотности вероятности смеси k нормальных распределений с равными дисперсиями σ^2 и с различными математическими ожиданиями μ_i , $i=1, 2, \dots, k$,

$$f(x) = (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-1} \sum_{i=1}^k \pi_i \exp(-(x-\mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}), \quad (1.1)$$

$x \in R$, $R = (-\infty, +\infty)$, π_i — априорная вероятность i -ой компоненты смеси,

$$\pi_i > 0, \quad \sum_{i=1}^k \pi_i = 1.$$

При известных значениях параметров распределения

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \sigma^2$$

нужно найти все СТ функции $f(x)$, т.е. вычислить все корни уравнения

$$f'_x(x) = 0. \quad (1.2)$$

Точка локального максимума функции $f(x)$ называется модой [10].

Продифференцировав по x выражение (1.1), получим

$$f'_x(x) = (\sqrt{2\pi} \sigma^3)^{-1} \sum_{i=1}^k \pi_i (\mu_i - x) \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right]. \quad (1.3)$$

Тогда уравнение (1.2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^k \pi_i (\mu_i - x) \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right] = 0. \quad (1.4)$$

Для определенности положим

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \quad (1.5)$$

и докажем теорему.

Теорема 1. Все корни уравнения (1.4) лежат в интервале (μ_1, μ_k) . Если уравнение (1.4) имеет один корень, то он является модой функции $f(x)$.

Доказательство. В силу (1.3), (1.5) имеем

$$f'_x(\mu_1) > 0, \quad f'_x(\mu_k) < 0, \quad (1.6)$$

Тогда по теореме Больцано - Коши непрерывная функция $f(x)$ в интервале (μ_1, μ_k) хотя бы при одном значении $\tilde{x} \in (\mu_1, \mu_k)$ обращается в нуль, $f'_x(\tilde{x}) = 0$. Но

так как $f'_x(x) > 0$ при всех $x \in (-\infty, \mu_1]$ и $f'_x(x) < 0$ при всех $x \in [\mu_k, +\infty)$, то все корни уравнения (1.4) лежат в интервале (μ_1, μ_k) . Если уравнение (1.4) имеет единственный корень, то в силу неравенств (1.5), (1.6) он является модой функции $f(x)$. Теорема 1 полностью доказана.

Если обозначить число мод функции $f(x)$ через m , то имеет место неравенство [4]

$$1 \leq m \leq k.$$

Уравнение (1.4) равносильно уравнению

$$x = \varphi(x),$$

$$\varphi(x) = \left\{ \sum_{i=1}^k \pi_i \mu_i \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right] \right\} \times \quad (1.7a)$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^k \pi_i \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right] \right\}^{-1}. \quad (1.7b)$$

Теорема 1 перефразируется в теорему 1'.

Теорема 1'. Все неподвижные точки НТ оператора φ лежат в интервале (μ_1, μ_k) . Если оператор имеет одну неподвижную точку, то она является модой функции $f(x)$.

Для доказательства того, что последовательность итераций Пикара при любом $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n=1, 2, \dots, \quad x_0 \in [\mu_1, \mu_k] \quad (1.8)$$

сходится к НТ оператора φ , исследуем его основные свойства. Отметим, что оператор φ является функцией.

2. Основные свойства функции $\varphi(x)$

Теорема 2. Функция $\varphi(x)$ является непрерывной, монотонно возрастающей, ограниченной на всей числовой оси R и имеет две асимптоты, $\varphi(x) = \mu_1$, $\varphi(x) = \mu_k$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \mu_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \mu_k. \quad (2.1)$$

Доказательство. Непрерывность $\varphi(x)$ следует из ее аналитического выражения (1.7б), в котором числитель и знаменатель — непрерывные функции по аргументу x , $x \in R$, и знаменатель в нуль не обращается ни при одном значении $x \in R$.

Для доказательства монотонного возрастания $\varphi(x)$ достаточно показать, что $\varphi'_x(x) > 0$ при всех $x \in R$.

Найдем выражение $\varphi'_x(x)$, используя для удобства введём следующие обозначения:

$$\psi_i = \pi_i \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right], \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.2)$$

Тогда $\varphi(x)$ в (1.7б) примет вид

$$\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^k \mu_i \psi_i\right) \left(\sum_{s=1}^k \psi_s\right)^{-1}. \quad (2.3)$$

Продифференцировав по x выражения (2.3), получим

$$\varphi'_x(x) = \left[\sum_{i<s} (\mu_s - \mu_i) (\psi'_s \psi_i - \psi_i \psi'_s)\right] \left(\sum_{j=1}^k \psi_j\right)^{-2}, \quad (2.4)$$

Продифференцировав по x выражения (2.3) и (2.2), после приведения подобных членов получим

$$\psi'_{ix}(x) = (\mu_i - x) \psi_i \sigma^{-2}.$$

Подставив выражения ψ'_x , ψ'_s из (2.5) в правую часть (2.4) и используя формулу для расстояния Махаланобиса [11]:

$$\rho_{si} = |\mu_s - \mu_i| \sigma^{-1}, \quad i < s, \quad (2.6)$$

получим

$$\varphi'_x(x) = \left(\sum_{s>i} \rho_{si}^2 \psi_s \psi_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^k \psi_j\right)^{-2}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad s = 2, \dots, k. \quad (2.7)$$

Из формул (2.7) и (2.2) следует, что $\varphi'_x(x) > 0$ при всех $x \in R$.

Ограниченность непрерывной, монотонно возрастающей функции $\varphi(x)$ следует из существования её асимптот.

При вычислении $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ рассмотрим два случая:

1) $\mu_1 \neq 0$, 2) $\mu_1 = 0$.

В первом случае выражение (2.3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mu_1 \left\{ 1 + (\pi_1 \mu_1)^{-1} \sum_{i=2}^k \pi_i \mu_i \exp\left[\Delta \mu_{i1} (2x - \mu_{i1}) \cdot (2\sigma^2)^{-1}\right] \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \pi_1^{-1} \sum_{i=2}^k \pi_i \exp\left[\Delta \mu_{i1} (2x - \mu_{i1}) \cdot (2\sigma^2)^{-1}\right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Delta \mu_{i1} = \mu_i - \mu_1$, $\mu_{i1} = \mu_i + \mu_1$, $i = 2, \dots, k$. В силу (1.5)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\Delta \mu_{i1} (2x - \mu_{i1}) (2\sigma^2)^{-1}\right) = 0. \quad (2.9)$$

Из выражений (2.9), (2.8) следует первое из равенств (2.1).

При $\mu_1 = 0$ выражение (2.3) приведём к виду

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \mu_2 \left\{ 1 + (\pi_2 \mu_2)^{-1} \sum_{i=3}^k \pi_i \mu_i \exp \left[\Delta \mu_{i2} (2x - \mu_{i2}) \cdot (2\sigma^2)^{-1} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \pi_2^{-1} \sum_{i \neq 2}^k \pi_i \exp \left[\Delta \mu_{i2} (2x - \mu_{i2}) \cdot (2\sigma^2)^{-1} \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Delta \mu_{i2} = \mu_i - \mu_2$, $\mu_{i2} = \mu_i + \mu_2$. В силу (1.5) $\Delta \mu_{i2} > 0$ при $i > 2$ и $\Delta \mu_{i2} < 0$ при $i = 2$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \left[\Delta \mu_{i2} (2x - \mu_{i2}) (2\sigma^2)^{-1} \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } i > 2, \\ \infty, & \text{если } i = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из равенств (2.10), (2.11) имеем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0,$$

т. е. и для $\mu_1 = 0$ доказано первое равенство в (2.1).

Второе из равенств (2.1) доказывается аналогично, отдельно рассматриваются случаи: $\mu_k \neq 0$, $\mu_k = 0$.

Следствие 2.1. Непрерывный монотонный оператор φ отображает числовую прямую в отрезок $[\mu_1, \mu_k]$.

Следствие 2.2. Непрерывный монотонный оператор φ отображает отрезок $[\mu_1, \mu_k]$ в себя,

$$\mu_1 < \varphi(x) < \mu_k \quad (2.12)$$

при всех $x \in [\mu_1, \mu_k]$.

Доказательство. В силу теоремы 2 и неравенств (1.5) достаточно показать, что

$$\varphi(\mu_1) > \mu_1, \quad \varphi(\mu_k) < \mu_k. \quad (2.13)$$

На основании (2.3) имеем

$$\varphi(\mu_1) - \mu_1 = \left[\sum_{i=2}^k (\mu_i - \mu_1) \psi_i(\mu_1) \right] \left[\sum_{j=1}^k \psi_j(\mu_1) \right]^{-1},$$

где $\mu_i - \mu_1 > 0$, $i = 2, \dots, k$, $\psi_j(\mu_1) > 0$, $j = 1, \dots, k$, в силу (1.5), (2.2). Следовательно,

$$\varphi(\mu_1) - \mu_1 > 0, \quad (2.14)$$

что и требовалось доказать. Второе неравенство в (2.13) доказывается аналогично.

Замечание. В силу следствия (2.2) и теоремы Боля-Брауэра [7], [8] оператор φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Это утверждение слабее теоремы 1'.

Докажем следующие утверждения.

Лемма. При $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ последовательность (1.8) постоянна, если

$$x_1 = x_0, \quad (2.15)$$

она монотонно возрастает, если

$$x_1 > x_0, \quad (2.16a)$$

и монотонно убывает, если

$$x_1 < x_0. \quad (2.16б)$$

Доказательство. Если в последовательности (1.8) имеет место равенство (2.15), то

$$\varphi(x_0) = x_0,$$

т.е. x_0 — неподвижная точка оператора φ . Тогда $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(x_0) = x_0$, $x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(x_0) = x_0, \dots, x_n = x_0, \dots$, что и требовалось доказать.

Если выполнено условие (2.16a), то в силу монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(x_1) > \varphi(x_0)$, т. е. $x_2 > x_1$. Тогда $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, т. е. $x_3 > x_2$ и т. д. При любом значении n неравенство $x_n > x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, влечет за собой неравенство $x_{n+1} > x_n$. А это значит, что последовательность (1.8) является монотонно возрастающей,

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots \quad (2.17)$$

Если для произвольной точки $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ имеет место соотношение (2.16б), то в силу монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ и равенства $x_n = \varphi(x_{n-1})$ последовательность (1.8) является монотонно убывающей, $x_n < x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Лемма полностью доказана.

Теорема 3. Последовательность итераций (1.8) при любом $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ сходится к некоторой НТ x_c оператора φ .

Доказательство. Если для последовательности (1.8) имеет место равенство (2.15), то точка x_0 является НТ оператора φ , а сама последовательность (1.8) в силу леммы — постоянной.

При выполнении условия (2.16a) для произвольной точки $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ последовательность (1.8) является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом μ_k (в силу леммы и следствия 2.2). По теореме Больцано-Коши такая последовательность имеет предел x_c ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_c. \quad (2.18)$$

Переходя в равенстве (1.8) к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}), \quad (2.19)$$

в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ и равенства (2.18) получаем $x_c = \varphi(x_c)$.

Если для произвольной точки $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ выполняется неравенство (2.16б), то последовательность (1.8) является монотонно убывающей и ограниченной снизу числом μ_1 (в силу леммы и следствия 2.2). На основании теоремы Больцано-Коши такая последовательность имеет предел \tilde{x} , который и является

НТ непрерывного оператора φ . Теорема 3 полностью доказана.

Интересно знать геометрическую характеристику каждой НТ \tilde{x} , вычисляемой методом ППП при различных условиях (2.15) — (2.16).

Следствие 3.1. Если для произвольной точки $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ выполняется равенство (2.15), то эта НТ оператора φ может быть экстремальной точкой функции $f(x)$ или ее точкой перегиба. При распределении вероятностей точек на числовой прямой R по закону (1.1) вероятность того, что случайно выбранная точка $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$, $[\mu_1, \mu_2] \subset R$, является неподвижной точкой оператора φ , равна нулю.

Доказательство. Первое утверждение следствия 3.1 имеем из определения НТ оператора, а второе — из того факта, что отрезок $[\mu_1, \mu_k]$ имеет мощность континуум [7], а число НТ оператора φ , лежащих на этом отрезке, конечно.

Теорема 4. Последовательность значений функции $f(x)$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), \dots, \quad (2.20)$$

порождаемая последовательностью (1.8), является монотонно возрастающей и сходящейся,

$$f(x_n) > f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.21a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_c), \quad (2.21b)$$

где x_c — НТ оператора φ .

Доказательство. Пусть для произвольной точки $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ выполняется условие (2.16a), которое в силу леммы влечет за собой неравенство (2.17). По теореме Лагранжа для функции $f(x)$, бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси R , имеем

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'_x(x^*) (x_n - x_{n-1}), \quad x_{n-1} < x^* < x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Для доказательства неравенства (2.21a) достаточно показать, что

$$f'_x(x^*) > 0, \quad x^* \in (x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

при любых x_{n-1}, x_n , последовательности (1.8). Используя формулы (1.1) и (1.7б), выражение (1.3) приведём к виду

$$f'_x(x^*) = \sigma^{-2} [\varphi(x^*) - x^*] f(x^*) \quad (2.24)$$

Так как $f(x^*) > 0$ при любом $x^* \in (-\infty, \infty)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что в выражении (2.24)

$$\varphi(x^*) - x^* > 0 \quad (2.25)$$

при $x_{n-1} < x^* < x_n$, x_{n-1}, x_n — любые члены последовательности (1.8). Функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси R , следовательно,

$$\varphi(x^*) > \varphi(x_{n-1}), \quad x_{n-1} < x^* < x_n. \quad (2.26)$$

Из неравенств (2.26) имеем

$$\varphi(x^*) - x^* > \varphi(x_{n-1}) - x_n, \quad (2.27)$$

В силу (1.8) правая часть (2.27) равна нулю, тогда $\varphi(x^*) - x^* > 0$, откуда следует, что в выражении (2.24) $f'_x(x^*) > 0$, что и требовалось доказать.

В случае выполнения условия (2.16б) доказательство неравенства (2.21а) проводится аналогично. Равенство (2.21б) следует из непрерывности $f(x)$ и равенства (2.18).

Следствие 4.1. Последовательность (1.8) при любом $x_0 \in [\mu_1, \mu_k]$ с вероятностью 1 сходится к такой НТ оператора φ , которая является модой функции $f(x)$ или её точкой перегиба.

Это утверждение базируется на теореме 4 и следствии 3.1.

На основании следствий 3.1, 4.1 имеем: при использовании оператора φ для вычисления корней уравнения (1.7) метод ППП даёт лишь моды и точки перегибов функции $f(x)$. Для вычисления точек локальных минимумов (ЛМ) мультимодальной функции $f(x)$ можно использовать классические методы [12], но проще построить такой оператор ζ , чтобы последовательность итераций Пикара

$$x_n = \zeta(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.28)$$

при любом $x_0 \in (x_{c1}, x_{cm})$ сходилась бы к точке ЛМ функций $f(x)$, x_{c1}, x_{cm} — крайние моды функции $f(x)$, $x_{c1} < x_{c2} < \dots < x_{cm}$.

Для достижения этой цели необходимо выполнение следующих условий:

1. Уравнение $x = \zeta(x)$ должно быть равносильно уравнению (1.2).
2. Оператор $\zeta(x)$ должен быть непрерывным вместе со своей производной $\zeta'_x(x)$ при всех $x \in R$ и отображать в себя отрезок $[\mu_1, \mu_k]$ или отрезок $[x_{c1}, x_{cm}]$, x_{c1}, x_{cm} — крайние моды функции $f(x)$.

В случае унимодальности функции $f(x)$ её единственная СТ — мода вычисляется как предельная точка последовательности (1.8). В работе [13] на основе принципа сжимающих отображений получено несколько достаточных условий унимодальности исследуемой смеси, например, следующие теоремы.

Теорема 5. При $k = 2$ функция $f(x)$ унимодальна, если

$$\rho_{21}^2 \leq 4. \quad (2.29)$$

Теорема 6. При $k \geq 3$ функция $f(x)$ унимодальна, если

$$\rho_{k1}^2 \leq 4, \quad \max_{\rho_{si} \in P} \rho_{si}^2 \leq 2, \quad (2.30)$$

$$P = \{\rho_{si}, s > i\} \setminus \rho_{k1}, \quad s = 2, 3, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Теорема 7. При $k \geq 2$ функция $f(x)$ унимодальна, если

$$\rho_{k1}^2 \leq 2. \quad (2.31)$$

Доказательство. Оператор φ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ является сжимающим, а функция $f(x)$ унимодальной, если $\varphi'_x(x) < 1$ для всех $x \in [\mu_1, \mu_k]$ [7], [13]. Из выражения (2.7) следует, что $\varphi'_x(x) < 1$, если имеет место неравенство (2.31). Так что при малых значениях ρ_{si} , $s > i$, $s = 2, 3, \dots, k$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, т.е. при выполнении неравенств (2.29)-(2.31) исключается использование оператора ζ .

3. Построение оператора ζ по заданным свойствам

Точки локальных минимумов функции $f(x)$ являются точками локальных максимумов функции $-f(x)$. Все СТ функции $-f(x)$ — это корни уравнения

$$-x = -\varphi(x). \quad (3.1)$$

равносильного уравнению (1.7а).

Умножив обе части уравнения (3.1) на некоторый множитель λ , $\lambda \neq 0$, и прибавив к ним x , получим уравнение $x - \lambda x = x - \lambda\varphi(x)$, которое приводится к виду

$$x = (1 + \lambda)x - \lambda\varphi(x). \quad (3.2)$$

Введя обозначение

$$\zeta(x) = (1 + \lambda)x - \lambda\varphi(x), \quad (3.3a)$$

уравнение (3.2) запишем в виде

$$x = \zeta(x). \quad (3.3б)$$

Заметим, что оператор ζ в (3.3а) является функцией.

Множитель λ , $\lambda \neq 0$, в (3.3а) зададим таким, чтобы оператор ζ был непрерывным вместе со своей производной $\zeta'_x(x)$ и возрастающим для всех $x \in R$.

Продифференцировав выражение (3.3а), получим

$$\zeta'_x(x) = 1 + \lambda - \lambda\varphi'_x(x). \quad (3.4)$$

Тогда $\zeta'_x(x)$ будет непрерывной и положительной для всех $x \in R$ при условиях:

$$\lambda > 0, \quad (3.5a)$$

$$\lambda\varphi'_x(x) \leq 1. \quad (3.5б)$$

Из (3.5б) следует

$$\lambda \leq \left[\max_x \varphi'_x(x) \right]^{-1}, \quad x \in R. \quad (3.6)$$

Перейдём к оцениванию правой части (3.6). Для $k = 2$ в силу (2.7) имеем выражение

$$\varphi'_x(x) = \rho_{12}^2 \psi_1 \psi_2 (\psi_1 + \psi_2)^{-2},$$

которое приводится к виду

$$\varphi'_x(x) = \rho_{21}^2 (\psi_1 \psi_2^{-1} + 2 + \psi_1^{-1} \psi_2)^{-1}. \quad (3.7)$$

Так как для любого $a > 0$ имеет место неравенство

$$a + a^{-1} \leq 2, \quad (3.8)$$

то для $\varphi'_x(x)$ в (3.7) будем иметь

$$\varphi'_x(x) \leq 4^{-1} \rho_{21}^2 \quad (3.9)$$

для всех $x \in R$. Тогда на основании (3.6) и (3.9) получим

$$\lambda = 4\rho_{21}^{-2}, \quad (3.10)$$

где ρ_{21} — расстояние Махаланобиса.

Перейдем к исследованию случая $k \geq 3$. В выражении (2.7) для производной $\varphi'_x(x)$ каждое из $k(k-1)2^{-1}$ слагаемых обозначим через $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{k1}$ соответственно и представим их в виде

$$\begin{aligned} a_{21} &= \rho_{21}^2 \psi_2 \psi_1 [(\psi_2 + \psi_1) + (\psi_3 + \psi_4 + \dots + \psi_k)]^{-2}, \\ a_{32} &= \rho_{32}^2 \psi_3 \psi_2 [(\psi_3 + \psi_2) + (\psi_1 + \psi_4 + \dots + \psi_k)]^{-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1} &= \rho_{k1}^2 \psi_k \psi_1 [(\psi_k + \psi_1) + (\psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_{k-1})]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Проведя элементарные алгебраические операции в правой части каждого выражения системы (3.11) и опираясь на (3.8) и (2.2), получим

$$a_{21} < 4^{-1} \rho_{21}^2, \quad a_{32} < 4^{-1} \rho_{32}^2, \quad \dots, \quad a_{k1} < 4^{-1} \rho_{k1}^2. \quad (3.12)$$

Тогда в силу (3.11), (3.12) для $\varphi'_x(x)$ в (2.7) имеем оценку сверху

$$\varphi'_x(x) < 4^{-1} \sum_{s>i} \rho_{si}^2, \quad s = 2, \dots, k, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (3.13)$$

На основании неравенств (3.6), (3.13) можно положить

$$\lambda = 4 \left(\sum_{s>i} \rho_{si}^2 \right)^{-1}, \quad s = 2, \dots, k, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (3.14)$$

Итак, доказана теорема.

Теорема 8. При любом $k, 2 \leq k < \infty$, оператор $\zeta(x)$ в (3.3) является непрерывным вместе со своей производной $\zeta'_x(x)$ и монотонно возрастающим при всех $x \in R$, если λ имеет выражение (3.14).

Легко показать, что построенный оператор ζ не ограничен при $x \rightarrow \pm\infty$ и не отображает в себя отрезок $[\mu_1, \mu_k]$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \zeta(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x) = \infty.$$

Из формул (3.14), (3.3а) следует

$$\lim_{\rho_{k1} \rightarrow \infty} \lambda = 0, \quad \lim_{\rho_{k1} \rightarrow \infty} \zeta(x) = x.$$

Теорема 9. При любом $k, 2 \leq k < \infty$, оператор ζ отображает в себя отрезок $[x_{c1}, x_{cm}]$, x_{c1}, x_{cm} — крайние моды мультимодальной функции $f(x)$.

Доказательство. В силу монотонного возрастания оператора ζ имеем

$$\zeta(x_{c1}) < \zeta(x) < \zeta(x_{cm}) \quad (3.15)$$

при любом $x \in (x_{c1}, x_{cm})$, $x_{c1} < x_{cm}$. Но т.к. $x_{c1} = \zeta(x_{c1})$, $x_{cm} = \zeta(x_{cm})$, то из (3.15) следует

$$x_{c1} \leq \zeta(x) \leq x_{cm}$$

для всех $x \in [x_{c1}, x_{cm}]$, что и требовалось доказать.

Для мультимодальной функции $f(x)$ теорема 9 гарантирует сходимость последовательности (2.28) к неподвижной точке x_c оператора ζ при любом $x_0 \in (x_{c1}, x_{cm})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_c, \quad x_n = \zeta(x_{n-1}). \quad (3.16)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3, и мы его приводить не будем.

Теорема 10. Для мультимодальной функции $f(x)$ последовательность её значений

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), \dots, \quad (3.17)$$

порождаемая последовательностью (2.28), при любом $x_0 \in (x_{c1}, x_{cm})$ сходится к такой НТ оператора ζ , которая является точкой локального минимума функции $f(x)$ или точкой её перегиба.

Доказательство. Покажем, что последовательность (3.17) является монотонно убывающей независимо от того, имеет ли место для всех $n = 1, 2, \dots$ неравенство $x_n > x_{n-1}$ или неравенство $x_n < x_{n-1}$.

Пусть выполняется первое из этих неравенств,

$$x_n > x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Тогда по теореме Лагранжа для $f(x_n) - f(x_{n-1})$ имеем

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'_x(x^*) (x_n - x_{n-1}), \quad x^* \in (x_n, x_{n-1}). \quad (3.19)$$

Покажем, что в (3.19) $f'_x(x^*) < 0$.

В силу формулы (2.24) и (3.3а) $f'_x(x^*)$ представима в виде

$$f'_x(x^*) = \sigma^{-2} \lambda^{-1} [x^* - \zeta(x^*)] f(x^*). \quad (3.20)$$

В выражении (3.20) $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ и $f(x) > 0$ при всех $x \in R$. А так как функция $\zeta(x)$ монотонно возрастает при всех $x \in R$, то в силу $x_{n-1} < x^* < x_n$ и (2.28) имеем

$$x^* - \zeta(x^*) < x_n - \zeta(x_{n-1}) < 0, \quad (3.21)$$

откуда следует, что в выражении (3.20) $f'_x(x^*) < 0$ при любых x_{n-1}, x_n и $x^* \in (x_{n-1}, x_n)$.

В силу непрерывности функции $f(x)$ и равенства (3.16) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_c), \quad (3.22)$$

x_c — НТ оператора ζ . А так как последовательность $\{f(x_n)\}$ монотонно убывает при всех $n = 0, 1, \dots$, то x_c в (3.22) может быть точкой локального минимума функции $f(x)$ или точкой её перегиба.

В случае $x_n < x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, доказательство теоремы 10 проводится аналогично, и мы не будем его приводить.

Из полученных теоретических результатов следует, что алгоритм вычисления СТ функции $f(x)$ должен состоять из чередования использования последовательностей (1.8) и (2.28) для мультимодальной смеси и использования только последовательности (1.8) в случае её унимодальности, которую должен обнаружить алгоритм.

4. Алгоритм вычисления СТ

1. Полагая $x_0 = \mu_1$, в последовательности (1.8) находим такой член x_n с наименьшим номером, что

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (4.1)$$

ε — заданное малое положительное число, $0 < \varepsilon < 1$.

2. Определяем тип НТ x_{c1} оператора φ (мода или точка перегиба функции $f(x)$), приближением которой является вычисленное в п. 1 значение x_n . Для этого фиксируем знаки $f'_x(x_n)$ и $f''_{xx}(x_n)$,

$$f''_{xx}(x_n) = -(\sqrt{2\pi} \sigma^3)^{-1} \sum_{i=1}^k \pi_i \exp[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma^2)^{-1}] [1 - (x - \mu_i)^2 \sigma^2],$$

и, используя заданную погрешность вычисления δ , находим то наименьшее целое значение s или t , при котором имеет место одно из равенств

$$\operatorname{sgn} f'_x(x_n) = \operatorname{sgn} f'_x(x_n + s\delta), \quad (4.2a)$$

$$\operatorname{sgn} f''_{xx}(x_n) = \operatorname{sgn} f''_{xx}(x_n + t\delta), \quad (4.2b)$$

Если в (4.2) $s < t$, то x_{c1} — мода функции $f(x)$, если $t < s$, то x_{c1} — её точка перегиба. В первом случае уточнённое приближённое значение x_{c1} (моды \hat{x}_{11}) равно

$$\hat{x}_{11} = x_n + 2^{-1}(2s - 1). \quad (4.3a)$$

Во втором случае (для точки перегиба \tilde{x}_{11}) имеем

$$\tilde{x}_{11} = x_n + 2^{-1}(2t - 1). \quad (4.3b)$$

3. Если x_{c1} — точка перегиба функции $f(x)$, то для вычисления следующей НТ x_{c2} оператора φ в последовательности (1.8) полагаем

$$x_0 = \tilde{x}_1 + \delta. \quad (4.4a)$$

Повторяя операции п.п. 1-2, получим приближённое значение НТ x_{c2} по одной из формул (4.3a) или (4.3b) — \hat{x}_{12} или \tilde{x}_{12} соответственно. Процесс вычисления неподвижных точек справа от точки μ_1 продолжается до получения первой моды \hat{x}_{1q} , $q = 1, 2, \dots$

4. Определив первую моду \hat{x}_{1q} , переходим к вычислению НТ x_{ck}

оператора φ слева от точки μ_k . В последовательности (1.8) полагаем

$$x_0 = \mu_k \quad (4.4б)$$

и повторяем операции п.п. 1-2. Приближённое значение новой НТ оператора φ вычисляется по одной из формул

$$\hat{x}_{k1} = x_n - 2^{-1} (2s - 1) \delta, \quad s \geq 1, \quad (4.5а)$$

$$\tilde{x}_{k1} = x_n - 2^{-1} (2t - 1) \delta, \quad t \geq 1, \quad (4.5б)$$

где s и t имеют тот же смысл, что и в формулах (4.2а), (4.2б).

Если НТ x_{ck} — точка перегиба функции $f(x)$, то для вычисления следующей НТ $x_{c,k-1}$ в последовательности (1.8) полагаем

$$x_0 = \tilde{x}_{k1} - \delta.$$

Повторяя операции п.п. 1-2, 4, получим приближенное значение НТ $x_{c,k-1}$ по одной из формул (4.5а) или (4.5б). Процесс вычисления неподвижных точек слева от точки μ_k продолжается до получения первой моды \hat{x}_{kp} , $p = 1, 2, \dots$

5. Проверяется совпадение вычисленных мод \hat{x}_{1q} и \hat{x}_{kp} . Если

$$|\hat{x}_{1q} - \hat{x}_{kp}| \leq 2\delta, \quad (4.6)$$

то функция $f(x)$ унимодальна, значение моды \hat{x}_{1k} полагаем равным

$$\hat{x}_{1k} = 2^{-1} (\hat{x}_{1q} + \hat{x}_{kp}), \quad (4.7)$$

и вычисления прекращаются.

6. Если неравенство (4.6) не выполняется, то функция $f(x)$ мультимодальна, и поиск её локального минимума (ЛМ) \check{x}_{11} проводится по последовательности (2.28), в которой полагаем

$$x_0 = \hat{x}_{1q} + \delta.$$

Вычисление ЛМ \check{x}_{11} проводится по аналогии с вычислениями, описанными в п.п. 1-3.

7. По последовательности (1.8) вычисляем вторую моду $\hat{x}_{1,q+u}$, $u = 1, 2, \dots$, положив

$$x_0 = \check{x}_{11} + \delta$$

и повторив операции п.п. 1-3, 5-6.

Если

$$|\hat{x}_{1,q+u} - \hat{x}_{kp}| \leq 2\delta, \quad (4.8)$$

то значение моды \hat{x}_{2k} полагаем равным

$$\hat{x}_{2k} = 2^{-1} (\hat{x}_{1,q+u} + \hat{x}_{kp}), \quad (4.9)$$

и вычисления прекращаются.

8. Если неравенство (4.8) не выполняется, то переходим к вычислению следующего ЛМ по последовательности (2.28) и т. д. до тех пор, пока для некоторой моды \hat{x}_{1v} , $v = q + u + l$, не будет выполнено неравенство

$$|\hat{x}_{1v} - \hat{x}_{kp}| \leq 2\delta,$$

значение последней моды полагаем равным

$$\hat{x}_{vk} = 2^{-1} (\hat{x}_{1v} + \hat{x}_{kp}),$$

и вычисления прекращаются.

Если рассматриваемая смесь удовлетворяет одному из условий унимодальности в [13], то вычисление моды достаточно провести один раз, положив в последовательности (1.8)

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \pi_i \mu_i.$$

5. Оценивание скорости сходимости итерационного процесса

Детально остановимся лишь на оценке скорости сходимости итерационного процесса (1.8) и его трудоёмкости. Так как на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'_x(x)$, то на этом отрезке она удовлетворяет условию Липшица [8]:

$$|\varphi(x'_1) - \varphi(x'_2)| \leq \alpha |x'_1 - x'_2|, \quad (5.1)$$

x'_1, x'_2 — любые точки отрезка $[\mu_1, \mu_k]$, α — положительная константа. Если $\alpha < 1$ (φ — сжимающий оператор, $f(x)$ — унимодальна [7], [13]), то, следуя рассуждениям в [8], для НТ x_c , к которой сходится последовательность (1.8), имеем оценку

$$|x_n - x_c| < \alpha^n (1 - \alpha)^{-1} |x_0 - \varphi(x_0)|. \quad (5.2)$$

Для достижения требуемой точности вычисления δ ,

$$|x_n - x_c| \leq \delta, \quad (5.3)$$

должно выполняться неравенство

$$\alpha^n (1 - \alpha)^{-1} |x_0 - \varphi(x_0)| \leq \delta. \quad (5.4)$$

Для удобства погрешность начального приближения обозначим через τ ,

$$\tau = |x_0 - \varphi(x_0)|. \quad (5.5)$$

Тогда на основании (5.2)–(5.5) необходимое число итераций оценивается из неравенства

$$n \geq -(\ln \alpha)^{-1} \ln[\tau (\delta (1 - \alpha))^{-1}]. \quad (5.6)$$

Можно получить и другую оценку погрешности

$$|x_n - x_c| \leq \alpha (1 - \alpha)^{-1} |x_n - x_{n-1}|, \quad (5.7)$$

где $|x_n - x_{n-1}|$ удовлетворяет неравенству (4.1).

Из неравенств (5.2), (5.7) следует, что скорость сходимости последовательности (1.8) линейна.

Для определения величины α в (5.2), (5.6), (5.7) используем условие Липшица (5.1) для первых трёх членов последовательности (1.8),

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq \alpha |x_1 - x_0|,$$

Тогда

$$\alpha = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \cdot |\varphi(x_0) - x_0|^{-1}. \quad (5.8)$$

Если в (5.8) $\alpha < 1$, то в силу (5.4) имеем

$$\dots\dots\dots (5.17)$$

$$|x_{l+p} - x_{l+p+1}| \leq \beta |x_{l+p-1} - x_{l+p}| < \beta^p \varepsilon.$$

Величину β можно оценить из первого неравенства в (5.17),

$$\beta = |\varphi(x_l) - \varphi(x_{l+1})| \cdot |x_l - x_{l+1}|^{-1}.$$

Тогда по аналогии с (5.2), (5.4)–(5.7) имеют место неравенства

$$|x_{l+p} - x_c| < \beta^p (1 - \beta)^{-1} |x_l - \varphi(x_l)|,$$

$$\beta^p (1 - \beta)^{-1} |x_l - \varphi(x_l)| \leq \delta,$$

$$\tau_1 = |x_l - \varphi(x_l)|,$$

$$p \geq -(\ln \beta)^{-1} \ln[\tau_1 (\delta (1 - \beta))^{-1}], \quad (5.18)$$

$$|x_{l+p} - x_c| < \beta (1 - \beta)^{-1} |x_{l+p} - x_{l+p-1}|.$$

Необходимое число итераций оценивается из неравенства

$$n_1 \geq l + p,$$

l определяется выражением (5.12), p определяется из неравенства (5.18).

Для последовательности (2.28) имеют место все приведённые выше рассуждения, относящиеся к последовательности (1.8), т.к. непрерывная монотонно возрастающая функция $\zeta(x)$ на отрезке $[\mu_1, \mu_k]$ удовлетворяет условию Липшица.

6. Результаты численных экспериментов

Экспериментальная проверка работы программы описанного алгоритма на ПЭВМ проводилась тестовыми примерами (в которых известны значения НТ), графически, а также вычислением значений функции $f'_x(x)$ в СТ. Так, для $k=3$ при $\delta=10^{-3}$ для 10-ти различных смесей мы получили границы значений функции $f'_x(x)$ в вычисленных стационарных точках \tilde{x}_i ,

$$-0.15 \cdot 10^{-4} < f'_x(\tilde{x}_i) < 0.61 \cdot 10^{-7}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 5\},$$

при уменьшении δ , $\delta=10^{-5}$, для тех же смесей имели

$$-0.26 \cdot 10^{-7} < f'_x(\tilde{x}_i) < 0.3 \cdot 10^{-7}.$$

Одна из главных задач эксперимента заключалась в определении того наибольшего значения ρ_{kl} , которое гарантирует вычисление СТ по предлагаемому алгоритму на современных ПЭВМ. Оказалось, что при реализации алгоритма на компьютере PIV, 2.26 Ghz, 1 Gb для любого $k \geq 2$ должно выполняться неравенство

$$\rho_{i,i+1} \leq 76, \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (6.1a)$$

Тогда для ρ_{kl} имеем

$$\rho_{kl} \leq 76(k-1). \quad (6.1б)$$

Неравенства (6.1) получены экспериментальным путём для $k=2, 3, 10, 40$ при различных π_i , $i=1, 2, \dots, k$. Число 76 в (6.1) является результатом ограничения

разрядности программного обеспечения использованного компьютера.

Трудоёмкость предлагаемого алгоритма оценивалась временем расчёта T (в секундах) всех СТ функции $f(x)$ при фиксированных значениях параметров распределения $\pi_i, \mu_i, \sigma^2, k, i=1, 2, \dots, k$. Результаты всех многочисленных экспериментов по расчёту СТ точек, проведённых при различных значениях $k, k=2, 3, 4, 8, 10, 20, 40, \rho_{i,i+1}, \pi_i, i=1, 2, \dots, k-1$, в ВЦ РАН на компьютере PIV, 2.26 Ghz, 1 Gb, невозможно представить в этой статье. Приведём лишь некоторые из них.

Для двухкомпонентной смеси при $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3, \sigma = 1, \pi_1 = 0.6, \rho_{21} = 3$ на рис. 1 даны графики функций $\varphi(x), \zeta(x)$ и $f(x)$. По рис. 1а видно, что каждый из операторов φ, ζ имеет три неподвижные точки и что неподвижные точки этих операторов совпадают. Рис. 1б иллюстрирует поведение бимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[-4, 6]$.

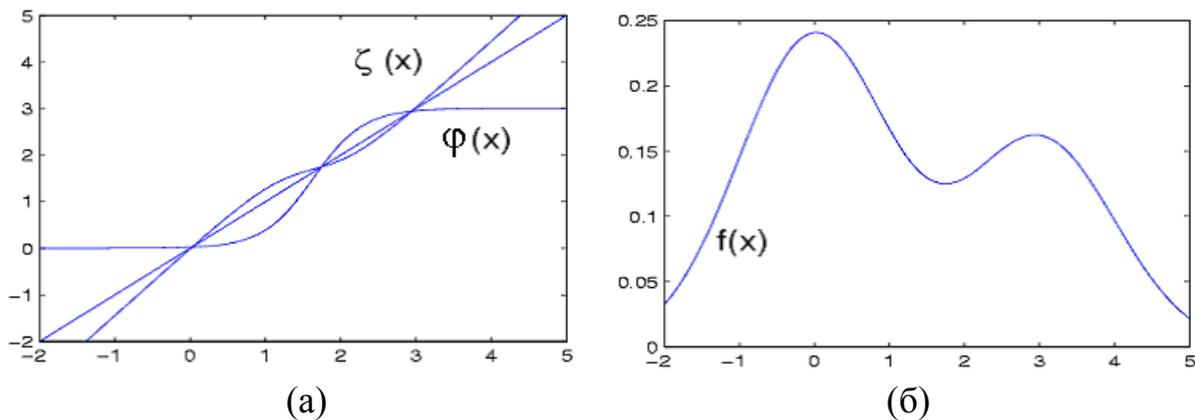


Рис. 1

В табл. 1 для $k=2$ даны значения параметров распределения смесей ($\sigma=1$), вычисленных стационарных точек и время их расчёта T при различных значениях абсолютной погрешности $\delta=0.001, \delta=0.00001$ ($\varepsilon=0.001$). Данные этой таблицы согласуются с теоретическими выводами [13]-[16]: двухкомпонентная смесь при $\rho_{12} \leq 2$ унимодальна, а при $\rho_{12} > 2$ она может быть унимодальной или бимодальной в зависимости от значений π_1, π_2, ρ_{12} .

Анализ данных табл. 1 показывает, что при фиксированном значении δ время расчёта СТ возрастает с увеличением их числа и расстояния Махаланобиса ρ_{12} . При уменьшении абсолютной погрешности δ время расчёта СТ для унимодальных смесей почти не меняется (за исключением смеси № 1, функция $f(x)$ которой в окрестности моды $\hat{x}_1 = 1.00000$, имеет «столообразный» вид), но оно значительно увеличивается для бимодальных смесей.

Таблица 1

№ смеси и	Параметры распределения			Стационарные точки			δ	T
				моды		ЛМ		
	μ_1	π_1	ρ_{12}	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\check{x}_1		
1	0	0.5	2	1.000			10^{-3}	0.047
2	0	0.2	2	1.924				0.016
3	0	0.9	3	0.004				0.015
4	0	0.6	3	0.024	2.942	1.745		0.125
5	0	0.3	4	0.004	3.999	1.717		0.078
6	0	0.95	4	0.0001	3.972	3.016		0.157
7	0	0.99	4	0.00001				0.016
8	0	0.6	9	0.0005	9.000	4.548		0.219
1				1.00000			10^{-5}	0.484
2				1.92423				0.015
3				0.00374				0.015
4				0.02366	2.94160	1.74505		9.391
5				0.00317	3.99942	1.71693		13.219
6				0.00007	3.97164	3.01619		12.765
7				0.00001				0.016
8				0.000005	8.99999	4.54740		28.875

Таблица 2

№ смеси	k	m	ρ_{1k}	p	π_{\min}	π_{\max}	T
1	4	1	2	2	0.25	0.25	0.032
2		1	2	2	0.10	0.40	0.015
3		1	6	2	0.05	0.70	0.016
4		2	4	2	0.10	0.40	0.156
5		2	59	1	0.25	0.25	1.000
6		3	9	0	0.10	0.50	0.328
7		4	9	0	0.25	0.25	0.235
8		4	89	0	0.05	0.85	2.016
9	10	1	9	5	0.05	0.50	0.016
10		2	9	5	0.05	0.30	0.171
11		4	14	3	0.10	0.10	0.437
12		6	24	1	0.01	0.50	1.392
13		8	28	0	0.05	0.15	0.828
14		10	59	0	0.05	0.25	1.406
15		10	30	0	0.10	0.10	0.969
16		10	100	0	0.10	0.10	2.859

В табл. 2 представлены данные о времени расчёта T всех СТ для

различных смесей при $\varepsilon = 0.001$, $\delta = 0.001$. В этой таблице k — число компонент смеси, m — число её мод, $\rho_{k1} = |\mu_k - \mu_1| \sigma^{-1}$, $\pi_{\min} = \min_i \pi_i$, $\pi_{\max} = \max_i \pi_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Параметры смесей, предоставленных в таблицах 1, 2 задавались таким образом, чтобы при фиксированном значении k варьировалось число их мод m , $1 \leq m \leq k$ [13, 16]. Анализ данных таблиц 1, 2 показывает, что величина T есть возрастающая функция параметров m , ρ_{1k} , δ и слабо зависит от величины k .

Заключение

Отметим основные результаты этой работы.

1. Доказано, что последовательность итераций Пикара (1.8) сходится к неподвижной точке (НТ) оператора φ и в том случае, когда он не является сжимающим.

2. Предложенный алгоритм при корректном задании абсолютной погрешности δ вычисляет все стационарные точки (СТ) функции плотности вероятности гауссовой смеси $f(x)$.

3. Алгоритм не требует предварительной локализации корней уравнения $f'_x(x) = 0$, прост и удобен для программирования и вычислений.

4. Установлено, что время расчёта стационарных точек T есть возрастающая функция параметров m , ρ_{1k} , δ и слабо зависит от числа компонент смеси k (m — число мод функции $f(x)$, ρ_{1k} — расстояние Махаланобиса от первой компоненты смеси до последней, δ — абсолютная погрешность вычисления СТ).

Литература

1. Патрик Э. Основы теории распознавания образов. М.: Сов. радио, 1980.
2. Titterington D.M., Smith A.F, Makov U.E. Statistical analysis of finite mixture distributions. Chichester cct., 1987.
3. Анраушева Н.Н., Горлач И.А., Желнин А.А., Сорокин С.В. Об опыте автоматического статистического распознавания облачности. // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1998. Т. 38. № 10. С. 1788-1792.
4. Carreira-Perpiñán M.A. Mode-finding for mixtures of Gaussian distributions. Tech. Rep. CS-99-03. Sheffield: Univ. Sheffield UK, 1999.
5. Robertson C.A., Fryer J.G. Some descriptive properties of normal mixtures // Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1969. № 3-4. P. 137-149.
6. Carreira-Perpiñán M.A. Mode-finding for mixture of Gaussian distributions // IEEE Trans. on Pattern Analys. and Mach. Intell. 2000. V. 22. № 11. P. 1318-1323.

7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
8. *Алимов Ш.А.* Принцип сжатых отображений // Новое в жизни, науке, технике. Сер. математика, кибернетика. М.: Знание, 1983. № 5.
9. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решений нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
10. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
11. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.
12. *Демидович Б.П. Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
13. *Апраушева Н.Н., Сорокин С.В.* Об унимодальности простейшей гауссовой смеси // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 5. С. 838-846.
14. *Апраушева Н.Н.* Об условиях унимодальности и бимодальности смеси двух нормальных классов // Иссл. по вероятностно-статистич. моделированию реальных явлений. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. С. 17–31.
15. *Konstantelos A.C.* Unimodality conditions for Gaussian sums // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. AC-25. № 4, P. 438-439.